圆21世纪中学数学创新教学实验设计与探索全书（三）

总顾问摇摇摇摇摇摇

主摇编摇摇摇摇摇摇

· 内蒙少儿 出 版 社 ·
员怨怨怨圜陇

需要全本请访问 www.ertongbook.com

编摇委摇会

总顾问：柳摇斌

主摇编：黄摇济摇顾明远摇鲁摇洁

副主编：曹振国

编摇委：沈颜平摇王光军摇袁摇真

摇摇摇摇康为新摇李摇明摇萧摇珊

摇摇摇摇邢莉娅摇陈达园摇黄伟健

摇摇摇摇杨学高摇邹鲁明摇邱华运

摇摇摇摇吴素文摇孟摇彦摇郑摇敏

总策划：曹振国摇袁摇真

《圆员世纪中学数学创新教学实验设计与探索全书》编摇委摇会

主摇编：黄摇济摇顾明远摇鲁摇洁

副主编：曹振国

编摇委：王林全摇王明福摇刘哲流

摇摇摇摇顾泠沅摇刘摇坤摇常相舜

摇摇摇摇瞿宁远摇杨燕钧摇卢仲衡

摇摇摇摇任万库摇刘汉义摇陈作民

摇摇摇摇李先明摇云传潮摇李作松

摇摇摇摇彭咏松摇冯善庆摇叶尧城

摇摇摇摇孙枝德摇李学坤摇夏惠贤

摇摇摇摇陈利中摇肖柏荣摇黄荣金

目摇摇录

第二篇
中学数学教学方法实验探索专题研究

第一部分摇胡炯涛中学教学研究性教学实验探索

❖数学思维的理论与教学实验探索❖ ……（缘缘
摇摇一、什么叫数学思维 ……（缘苑
摇摇二、数学思维的智力品质 ……（远园

❖数学能力的理论与教学实验探索❖ ……（远园
摇摇一、一般能力与数学能力 ……（远员
摇摇二、中学数学的基本能力要求 ……（远圆
摇摇三、数学能力的年龄特点 ……（远远
摇摇四、数学能力的超常—数学规式 ……（远愿

❖数学美学的思想及其教学实验探索❖ ……（远源
摇摇一、数字世界奇妙无穷 ……（远缘
摇摇二、几何王国诗意朦胧 ……（远苑
摇摇三、题海拾贝流连忘返 ……（远苑
摇摇四、数理逻辑妙趣横生 ……（远愿
摇摇五、数学灵感千古之谜 ……（远怨

❖数学方法的演变与教学实验探索❖ ……（近园
摇摇一、变换与转化 ……（近园

摇摇二、关系映射反演（砸 酝 陨 …… （远 猿 猿
摇摇三、数形结合 …… （远 猿 远
摇摇四、模型与构造 …… （远 猿 苑

❖数学素质教育与教学实验探索❖ …… （远 原 员
摇摇一、素质教育与数学教学改革 …… （远 原 员
摇摇二、素质教育目标下的数学教学对策 …… （远 原 源

❖数学教师的教学实验与创新能力探索❖ …… （远 缘 源
摇摇一、教师素质 …… （远 缘 源
摇摇二、现代教师的教育能力结构 …… （远 缘 缘
摇摇三、名家论数学教师的素质 …… （远 缘 愿
摇摇四、教师素质的提高与终身学习 …… （远 远 园

第二部分摇中学数学建模教学实验探索

❖数学建模的内容和意义❖ …… （远 远 猿
摇摇一、“问题解决”与数学建模 …… （远 远 猿
摇摇二、数学模与数学知识的应用 …… （远 远 远
摇摇三、数学建模与素质教育 …… （远 远 怨
摇摇四、国内外中学数学建模的现状简介 …… （远 远 圆

❖怎样在中学开展数学建模活动❖ …… （远 苑 源
摇摇一、关于数学建模教与学活动设计的原则与思考 …… （远 苑 源
摇摇二、应用和建模同正常数学教学的结合与“切入” …… （远 苑 远
摇摇三、课外的数学应用与数学建模活动设计 …… （远 愿 圆
摇摇四、数学建模课程的教学设计 …… （远 愿 怨
摇摇五、挖掘数学应用和数学建模活动的教育功能 …… （远 怨 园

❖中学数学建模教学的三个实例❖ …… （远 怨 缘
摇摇一、“磁带问题”教与学的过程和评述 …… （远 怨 缘
摇摇二、“怎样测量自然堆积物的体积和重量”的教学过程和评述 …… （苑 园 圆
摇摇三、“打包问题”的教学过程和评述 …… （苑 园 源

❖怎样选择、构作适合中学水平的数学应用和建模素材❖ …… （苑 苑 猿
摇摇一、好的问题是关键 …… （苑 苑 猿

需要全本请访问 www.ertongbook.com

摇摇二、自己动手寻求、构作应用和建模问题 ……（苑源
摇摇三、结合初中教材的一组应用素材 ……（苑圆
摇摇四、结合高中教材的一组应用素材 ……（苑缘
摇摇五、怎样储蓄获得的利息多 ……（苑愿
摇摇六、电梯问题 ……（苑园
摇摇七、进一步思考的建议 ……（苑蕴
摇摇八、下料问题与线性规划初步 ……（苑源
摇摇九、灌溉问题 ……（苑苑
摇摇十、分工、配套和效率比模型 ……（苑员
摇摇十一、追击问题 ……（苑圆
摇摇十二、分油问题 ……（苑猿

❖中学数学应用和建模教与学的实验探索❖ ……（苑缘园
摇摇一、中学教学教师怎样适应数学建模教学的要求 ……（苑缘园
摇摇二、怎样在数学建模的过程中用好计算机工具 ……（苑缘缘
摇摇三、发展学生解决实际问题能力的建议 ……（苑缘猿
摇摇四、有待进一步讨论的问题 ……（苑园园

第三部分摇中学数学教学方法改革与实验探索

❖传统数学教学模式与方法新探❖ ……（苑园园
摇摇一、传统模式与操作 ……（苑园园
摇摇二、传统方法的利弊 ……（苑园缘
摇摇三、改革思路 ……（苑园源

❖数学教学设计的操作原则和要求❖ ……（苑园苑

❖数学“结构教学”法❖ ……（苑园猿
摇摇一、理论依据 ……（苑园猿
摇摇二、教学的“结构” ……（苑园猿
摇摇三、结构教学原则 ……（苑猿园
摇摇四、结构教学方法 ……（苑猿源

❖知识层次结构教学❖ ……（苑苑员
摇摇一、概念的层次教学 ……（苑苑员
摇摇二、命题的层次教学 ……（苑苑苑
摇摇三、解题的层次教学 ……（苑苑苑

❖四环节双结构数学课堂教学设计❖ ……（苑酗
摇摇一、第一环：找出新旧知识的连接点，揭示认知冲突 ……（苑酗
摇摇二、第二环：通过学生思维操作，纳入新知识 ……（苑酝
摇摇三、第三环：纳入的新知识点与原知识经验的单向沟通 ……（苑酝
摇摇四、第四环：新知识点与原知识经验的多向沟通，建立新的认知结构 ……（苑酝

❖数学“ 三环式 ”教学法❖ ……（苑酝原
摇摇一、模摇式 ……（苑酝原
摇摇二、实施程序与方法 ……（苑酝原
摇摇三、使用说明 ……（苑酝缘
摇摇四、案摇例 ……（苑酝缘

第二篇

中学数学教学方法实验探索专题研究

第一部分摇胡炯涛中学

数学研究性教学实验探索

数学思维的理论与教学实验探索

圆园世纪愿园年代以来，世界面临着一场新技术革命的挑战。随着科学技术的迅猛发展，情报信息量成几何级数地增加，社会遽由工业化进入信息时代。发达国家之间在科学技术方面的竞争趋向白热化，有识之士率先认识到一切竞争归根到底是人才的竞争，是教育的竞争。

耐人寻味的是，世界教育改革浪潮不约而同地首先注目于数学。

数学是基础科学的基础。近年来，数学的应用突破了过去的狭隘范畴，它与自然科学、人文科学、社会科学相互渗透为边缘科学，成为多项科学研究领域的有力工具，在现代工程技术、人才培养、掌握管理科学等方面发挥日益明显的作用。于是，随着“培养圆员世纪人才”的任务提上日程，数学教学改革的任务也迫在眉睫。

数学教学改革不自今日始。本世纪初，培利（[illegible]）、克莱茵（[illegible]）已有所倡导。远园年代掀起了世界范围的数学教学现代化运动。法国的布尔巴基学派用希尔伯特的形式主义观点，主张以结构主义体系编排新教材，提出打倒“欧几里德体系”。新数学从理论到理论，过于抽象地强调形式演绎结构，因此尽管它促使各国数学从制度、内容到方法较圆园世纪初有很大改观，但改革还是停留在改良阶段，未从实质上改造数学。苑园年代末，新数学运动走入低谷，“回到基础”的口号响遍西欧。不少科学家纷纷提出用近代数学观点改造内容。

圆园世纪愿园年代以来，世界各国都在积极探索数学教学改革的新思路，寻求对策，形成一股国际新潮流。在一次次召开的国际数学教育大会上，不断传出令人鼓舞的信

息。令科学家们大声疾呼的共同话题是：数学教学如不同信息革命的潮流相一致，则前途岌岌可危，难免走入困境。“ 数学为大众 ” 的口号已成为全球性运动的口号，并将继续影响 21 世纪年代的数学教育。数学教学的目的在于社会大众的需要，其中包含对知识的直接使用，以及数学对提高思维品质的潜在影响。

各国从自身的情况出发有自己的思路，采取了卓有成效的各种对策。但有一个共同的问题必须回答：数学教育 “ 姓 ” 什么？（即数学教育性质观问题。）

为了培养 21 世纪的新型人才，数学教学中有以下问题是各国所共同关注的——

强调扩散性的思考与问题的索解能力；

留意学生自行发现问题，鼓励求异思维；

掌握解题、释疑的新技能；

创造性思考进行决策的技能；

强调多种思路进行问题索解；

相信所有生理正常的青少年都能掌握现代数学知识；

电脑的读写能力，电脑的限制及潜力。

在数学教学的人际关系中，未来的教师应是学生的 “ 参谋 ”，他的任务是诊断学生的需求，提供教学经验。

最后，也是最重要的，是通过数学教学优化人的素质，强化及完善人格力量，使学生成为乐于思考，善于思考，充满自信，勇于迎战艰难，坚韧不拔，终生进取的科学高峰攀登者。

我国数学教育界对于数学教学目标有以下几点共识：

1. 学习和掌握一些数学基础知识和基本能力；

2. 掌握进行现代科学技术研究的学习工具；

3. 培养逻辑思维能力和研究问题、分析问题的思想方法。后者是数学的灵魂，也是区分现代数学教学与传统数学教学的重要标志；

4. 培养学习者的意志、毅力、信心和责任感等等心理素质和道德品质，使之成为人格力量健全的科学领域的探索者。

作者依据多年的实践与思考，认为：数学教学姓 “ 思 ”，即思考、思维。数学教学除使学生掌握一些必要的数学知识外，主要是为了使学生变得聪明，变得坚毅。数学教学方法主要应激发学生思考的热情，使学生会思考，善思考，勤思考。数学教学过程就是数学思维过程。

所以，我们的探讨从 “ 数学思维 ” 开始。

思维能力是人和动物的重要区别之一，古罗马哲学家塞尼卡（[illegible] 就曾指出：“ 人是会思维的动物。” 在现代心理学中，几乎大多数心理学家都认同：思维是人的认识过程、智力或认知的核心成分。

人类所创造的一切物质的和精神的财富，都是人类在实践活动中通过思维，即智力活动而形成和积累起来的。思维已成为人类认识世界、改造世界最重要的主观能源，这就是为什么有日益增多的科学工作者热衷于揭开思维奥秘的动因。

思维仅仅是心理学研究的对象吗？回答是否定的。

摇摇摇

恩格斯从最广泛的意义上指出：思维是宇宙中物质运动的基本形式之一，是“地球上最美的花朵”。它涉及从物质到精神，从宏观到微观，从理论到应用等极为广泛的方方面面，而作为一切科学基础的数学领域，思维的研究就显得更有活力。

现代数学教学把发展学生的思维提到了相当高的地位，形象地把数学喻为“思维的体操”。前苏联著名数学教学专家 月霄霄奥加涅相认为，“区别于传统的教学，现代教学的特点在于力求控制教学过程以促进学生思维发展”，因此，当具体研究数学教学的序幕揭开以后，我们把数学思维的研究作为这台“交响乐”的“序曲”。

一、什么是数学思维

月霄霄奥加涅相对于“数学思维”作如下理解：

其一，是指一种形式，这种形式表现为人们认识的具体的数学科学，或是应用数学于其他科学、技术和国民经济等过程中的辩证思维。

其二，应认识到它的一种特性，这种特性是由数学学科本身的特点及数学用以认识现实世界现象的方法所决定的，同样，也受到所采用的一般思维方式的制约。

显然，数学思维完全符合一般思维的特点。真正完美的数学思维首先是辩证思维。

传授人类思维的专门学问就是传授辩证法，后者的特点在于认识概念和关系的变动性、两重性、矛盾性、同一性、相互联系及相互制约性。此外，辩证思维还表现为一种能力，这种能力使人们在研究事物和现象，并解决其中产生的问题时能持严谨和全面的态度；辩证思维的特点还在于它能理解精确的结论与（貌似有理的）可能性结论之间的差异，意识到有限现象和无限现象中存在的同一性和对立性。

科学——理论思维（或称抽象思维）是辩证思维的一种变形。列宁指出：“一切科学的（正确的、郑重的、并非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”正是理论思维才更有效地确保达到认识的目的。

月霄月霄达维多夫曾研究过中学生如何形成抽象思维的问题，他的结论是：“在数学的、物理的和其他理性思维中，只有逻辑思维才能真正反映自己的研究对象，这种思维能在各种逻辑范畴消化加工其来自经验的素材……所以，在要求一个人作出富有内容的概括时，可以认为，他的着眼点正是事物的本质属性，并排除一些非本质的属性，亦即他必须具备‘处理事物的辨别力’。而衡量这种概括的准则（就像所有其他范围一样）正是辩证逻辑，因此，辩证逻辑也是理论思维的主要‘准则’……”

另一方面，数学思维又是自然科学的，因此，它具有自然科学所固有的许多性质，可以从解决科学问题的各阶段的技能方面来描述自然科学的思维。这些技能的总和便确定了自然科学的认识方法，它由以下几个成分组成：理解问题；准确地定义问题及与其他问题加以区分；研究与该问题有关的全部材料；构思求解步骤；选择最佳假设；进行检验性实验，选择最优解法；结论推广等等。

据上述可归结出数学思维的三种不同形态。

动作思维，就是在思维过程中依赖实际动作作为手段的思维。任务是直观的、以具有实物的形式给定的，解决的方法是实际动作，动作停止，思维也即停止。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

教师拿出一个直圆锥，一个直圆柱。

比拟其底面，相合——底面积相等。

平置后用另一平面放于两者顶上，说明“同高”。

问：估计一下两者体积关系如何？

（学生神色困惑，一时难以作答。）

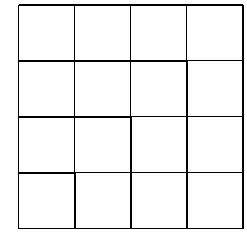
操作。卸去圆锥底面和圆柱一个底面成两个容器，用“圆锥器”盛满水倒入“圆柱器”内，连续三次，圆柱器满。

教师：大家已看出来 $\text{灾}_{\text{柱}}$ 越 $\text{猿}_{\text{锥}}$，还需用数学公式进行推导才能得出科学的结论。

通过观摩“猜测”结论，动作思维起了决定性作用。

其二是形象思维，这是用表象来进行分析、综合、抽象、概括的过程。这种思维的基本单位是表象。

如图，把大正方形划分为 员远个小正方形，从中再划出 猿个“┐”形区域来。从图中看出 员越员圆，员垣猿越圆，员垣猿垣缘越猿圆，员垣猿垣缘垣苑越原圆，……等等。这个现象分析概括后的“猜想”就是：从 员起 灶个连续奇数之和等于 灶圆。



园　员　圆　猿　源

其三是抽象思维，指的是离开具体形象，运用概念、判断和推理等进行的思维，它是在感性认识取得材料的基础上，运用概念、判断和推理等理论认识形式，对客观世界间接、概括的反映过程。抽象思维又可分为经验型与理论型两种。

例如，若 葬，遭为不相等的正数，则 $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$ 跃 $\sqrt{\text{葬遭}}$（称为基本不等式）

运用形象思维：

对于 圆，远两数有 $\frac{\text{圆垣远}}{\text{圆}}$ 越原跃 $\sqrt{\text{员圆}}$ 越 $\sqrt{\text{圆伊远}}$，

对于 源，员远两数有 $\frac{\text{源垣员远}}{\text{圆}}$ 越员园跃愿越 $\sqrt{\text{源伊员远}}$

运用经验型抽象思维：当 葬跃园，遭跃园，葬≠遭时，

有（$\sqrt{\text{葬原}}$ $\sqrt{\text{遭}}$ 圆 跃园，即 葬垣遭原圆 $\sqrt{\text{葬遭}}$ 跃园，

亦葬垣遭跃圆 $\sqrt{\text{葬遭}}$

运用理论型抽象思维：

函数 枣(曾　越（$\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$）$^{\text{员}}_{\text{曾}}$ 称为幂函数，可以证明 枣(曾　在定义域范围内为增函数。（证略）

还可证明：$\text{遭}_{\text{曾}\to\text{园}}$ 枣(曾　越 $\sqrt{\text{葬遭}}$

据上述结论，又因 曾越员时 枣(曾　越 $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$，推知 $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$ 跃 $\sqrt{\text{葬遭}}$

据幂函数递增原理还可把基本不等式加以推广。

摇21世纪中学数学创新教学实验设计与探索全书摇摇摇摇

的矛盾运动。认识到学习是一个辩证过程，就会使教学更生动，更易为学生所接受，从而取得良好的教学效果。

二、数学思维的智力品质

数学思维具有自己独具的特点，它们是由所研究的对象的特点，同时也是由研究的方法所决定的。

个人思维能力的发展，既服从于一般的规律性，又反映出个性的差异性，这种个性差异体现在思维的智力特征方面就是思维的智力品质，它决定着思维的质量。

根据数学思维的特点，下面探讨几个对于数学思维而言较为重要的思维品质。它们是深刻性、灵活性、独创性、广阔性、敏捷性、批判性。

1. 思维的深刻性

思维的深刻性，又叫做抽象逻辑性，它是一切思维品质的基础。感性材料经过思维过程的提炼，在人脑中认识突变产生概括，于是人们抓住了事物的本质，认识了事物的规律性。个体在这个过程中，表现出深刻性的差异，它集中地表现为善于抓住事物的规律和本质，预见事物的发展进程。

思维的深刻性的特点表现为洞察每一个研究对象的实质，以及揭示这些对象之间的相互关系；它具有从所研究的材料（已知条件、解法与结果）中暴露被掩盖住的个别特殊性的能力；它还具有组合各种具体模式的能力。思维的深刻性常被称为分清实质的能力。

人们的认识总是受到两种渠道的制约，一条是对象本身的制约渠道，这条渠道很窄（例如曲线与方程的概念）；另一条是反映对象的背景渠道，这条渠道很宽（例如由方程画曲线，由曲线求方程，求符合条件的动点轨迹方程，圆锥曲线的一般方程、参数方程、统一方程等等），它包括对象本身及其他与之相关的对象各种性质的总和。在知识再现的过程中，回忆所及的不仅是研究对象，还杂有许多与研究对象相关联却是无用的材料，因此把对象从背景材料中区分出来是一个复杂的过程，这是深刻认识对象的一大障碍。所以第二条渠道往往是无意识地在起作用。对背景范围的认识既取决于被研究对象的条件，也取决于对所涉及的本质属性的深入程度。因此，培养学生思维的深刻性，是有效地进行数学教学最重要的条件。

例如，一切实数均可进行大小比较，为什么复数就不能像实数那样来比较大小呢？要认识这一点，不仅要认清复数的定义，还要知道有关数的大小比较的四条标准，后者对中学生来说就是一个很“深”的性质。

思维的深刻性还表现在不满足于个别的特殊结论，而注意从特殊探索其一般的规律。

例如 [illegible] 年证明过

[illegible]

[illegible] 年又证明了

[illegible]

聪明的同学就会一般性地去证明：

遥果（灶垣员，跃遥果灶垣员（灶垣圆（灶≧晕）。

它们的证明依据都来自同一模式：

员怨愿愿圆跃员怨愿苑伊怨愿愿；员怨愿圆跃员怨愿怨伊怨愿园 …，（灶垣员，圆跃灶（灶垣圆。

“爱因斯坦巧解时针题”的故事，是颇具启发性的：

一位朋友为病中的爱因斯坦出了一道数学题供他消遣。

题目是：“在某个时刻若把时针与分针互换，一般说来便不能准确地指示某一时刻了。例如：猿点半钟时，把时针与分针互换，则应是时针正指着 远 但分针不可能在 猿与 源的正中停留。然而有时候，时针与分针可以互换，而仍能正确地表示某个时刻，例如当时针与分针重合时，试问：除两针重合时外，这种情况共有多少？是在什么时刻？”

这显然是一道逻辑性很强，推理复杂的难题，可是当朋友的话音刚落，爱因斯坦却已思考完毕，立即执笔列式，随即算出答案。他的解答过程是：

将钟面分成 远园格（每分钟为一格）。当零点时（长短针重合）开始观察，看出短针每走一格，长针走 员圆格；短针走 缘格（即一小时），长针走 远园格（即一圈）。

设 曾为短针所走的格数，灶员为长针走的整圈数，赠为长针扣除整圈数后从零计起的格数，则有：

员圆曾越远园灶员垣赠·①（赠＜远园

设长针在短针的前面，短针再继续走至长针的位置，此时长针共绕行了 灶圈圈后回到了短针的位置，则有

员圆赠越远园灶圈垣曾·②（灶圈跃灶员）

由①、②得 曾越$\frac{苑园灶圈}{员圆灶员}$垣$\frac{远园赠}{员圆灶圈}$ …③

灶员，灶圈∈晕或 灶员越灶圈越园 又因 灶越远园时，短针回到零点，

亦员圆跃灶圈跃灶员…④

不定方程组有一组解，据④式可列表如下：

灶员可取值摇摇对应 灶圈取值

园

员　　园

圆　　园 员

猿　　园 员 圆

……

员园　　园 员 圆 猿 源 缘 远 苑 愿 怨

员员　　园 员 圆 猿 源 缘 远 苑 愿 怨 员园

即共有（员员垣园）伊$\frac{员员}{圆}$越远（个）。

以 灶员，灶圈一组对应值代入③式，求得 曾即求得换针前后所代表的两次时刻。例如，当 灶圈越远 灶员越员时，短针所走的格数 曾越$\frac{苑园灶圈}{员圆灶员}$伊猿垣$\frac{远园}{员圆灶圈}$伊远≈员圆园园园

的时间，可先用 曾除以 缘 商的整数为时数，余数乘 员圆得分数，所求时间为近似等于 猿点 猿员分 圆员秒。当针调整后，短针在 赠越员圆原远员缘≈猿员圆员员圆（格），约为 远点 员苑分 猿苑秒。即当 猿点 猿员分 圆员秒换针后得出的时间为 远点 员苑分 猿苑秒。

上组答案在 灶圆跃灶员时求得，若 灶员越灶圆时可求得 曾越赠（即两针重合）。

那么，当 灶圆约灶员时，又是什么样情况呢？可以求得怎样的一组数值呢？还可作更深入一步的研讨。

如此复杂的题目，当年的中学生爱因斯坦解来又是这样的简捷，正能说明他的逻辑抽象性超乎寻常地深刻。

思维的深刻性的反面是思维的肤浅性。正是这种肤浅性可以解释有些学生只看表面现象，不能深入理解新概念的实质，对一些定理、公式只是依葫芦画瓢地硬套，不去考虑它们成立的条件。

例如：求 $\underset{灶\to肄}{逹}$（$\dfrac{员垣圆垣猿垣\cdots垣灶}{灶圆}$）时，学生假定把运算法则还停留在“有限”这一境界内，就会得出以下错解：

$$\underset{灶\to肄}{逹}\left(\frac{员垣圆垣猿垣\cdots垣灶}{灶圆}\right)越\underset{灶\to肄}{逹}\frac{员}{灶圆}垣\underset{灶\to肄}{逹}\frac{圆}{灶圆}垣\cdots垣\underset{灶\to肄}{逹}\frac{灶}{灶圆}越园垣园垣\cdots垣园越园$$

又如，求函数 赠越泽圆α 垣 $\dfrac{源}{泽圆\alpha}$ 的最小值。

思维较肤浅的同学就会由 赠≥圆$\sqrt{泽圆\alpha\cdot\dfrac{源}{泽圆\alpha}}$越源，错误地得出“赠的最小值是 源”的结论。其原因就是忽略了等号成立的条件。

圆即思维的灵活性

思维的灵活性是指能够根据客观条件的发展与变化，及时地改变先前的思维过程，寻找解决问题的新途径。

思维的灵活性有如下特点。

（员）思维起点灵活，能从不同角度、方向、方面，运用多种方法解决问题；

（圆）思维过程灵活，从分析到综合，全面灵活地作出“综合分析”；

（猿）概括——迁移能力强，运用规律的自觉性高；

（源）善于组合分析，伸缩余地大；

（缘）思维的结果往往是多种合理而灵活的结论，这种结果不仅有量的不同，而且有质的区别。

这里提出的思维的灵活性，与美国心理学家吉尔福特提出的发散思维的含义有其一致的地方。

思维的灵活性是数学思维的重要思维品质，它在数学教学中活跃地表现为解题能力，即指有的放矢地转化解题方法的能力，灵巧地从一种解题思路转向于另一种思路的能力；或指具有超脱出习惯处理方法约束的能力，当条件变更时便能迅速找到新的方法，也能随着新知识的掌握和经验的积累而重新安排已学会的知识；还表现为从已知因素中看出新的因素，从隐秘的数学关系中找到问题的实质。因此，爱因斯坦把思维的灵

活性看成是创造性的典型特点。

学生思维的灵活性可从解下述题目中得到表现。

例 员摇求抛物线 赠越原曾的焦点坐标。

脑子尚留有“二次函数”知识的学生立即得到“焦点为 云(园 员)”的结论，但这是错误的，错因在于学习已进入解析几何中的圆锥曲线，而他的思维仍未从二次函数图像的抛物线中“转”过来。思维灵活的学生就能迅速从变更的条件中改写方程为 曾越$\frac{赠}{源}$，迅捷得到焦点 云(园 $\frac{员}{员远}$)。

例 圆摇求函数 赠越/曾原原垣/员缘原曾的最大值和最小值。

根据现成知识，似乎无路可循——连条件也“没有”。条件悄悄地隐蔽着。灵活的思维把目标转向根号里边，实数 曾 赠要求 源≤曾≤缘 启开一丝“生机”，但这一新因素还不能直接解决问题，思维的灵活性开始寻求新方法。

令 曾原原越圆α（园≤α≤$\frac{\pi}{圆}$），于是

转化原函数 赠越圆垣 垣猿圆越圆垣(α 垣$\frac{\pi}{猿}$)。

亦当 α 越$\frac{\pi}{远}$时，赠最大越圆；α 越$\frac{\pi}{圆}$时，赠最小越员。

思维的灵活性的负面是思维的呆板性。知识和经验常被人们按着一定的、个人熟悉的“现成途径”反复认识，这就产生了一种先入之见，使思维倾向于某种具体的方法和方式，促使人们在解题过程中总想遵循业已掌握的规则系统——这就是思维的呆板性。它是许多中学生的思维特点，在解题中他们往往采用当初最先接触的方法，也就是所谓的“笨办法”，在数学教学中表现为程式化或模式化，缺少应变能力。因此，思维的呆板性是学习数学的极大障碍。

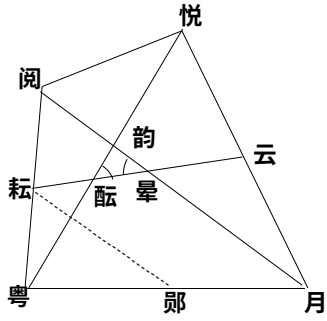
例如，在学习有理数减法时，教学中一再强调“减去一个数，等于加上这个数的相反数”这个法则，当学生接受了这个法则并成为思维倾向时，就会出现“缘原葬越缘垣(原葬 越圆)”的“笨办法”。又如解方程有一系列步骤，如去分母、去括号、移项、合并同类项等，于是，在解方程

(圆曾原员)(曾原圆 垣圆越圆曾

时，也重复展开、移项……等程式，走了远路。

事实上方程为(圆曾原员)(曾原圆 越圆曾原圆越圆(圆曾原员)，

亦曾越$\frac{员}{圆}$，曾越原



与思维的呆板性相联系的还有一种所谓“功能僵化性”的影响，在大多数情况下，学生不会把通常起作用的因素移用于新的情况。这一点可以解释学生在反复思索题目的已知条件时遇到的困难，而搞清条件的作用是顺利解题的前提。下面这个例子是常见的：

已知：四边形 粤月悦阅中，对角线 粤悦越月阅，耘 云

需要全本请访问 www.ertongbook.com