CONTENTS
目 录

一、数与代数

二、空间与图形

三、统计与概率

四、课题学习

一、数与代数

专题一　实　数

名师教案

1. 考点点击

本章主要考查以下知识点:

(1)实数的有关概念. 如:数轴、相反数、绝对值、倒数、科学记数法、近似数、有效数字、实数的大小比较、有理数、无理数等.

(2)实数的运算. 如:加、减、乘、除、乘方、开方、简单的估算、科学计算器的使用.

分析 2005 年各地的中考试卷,考查本专题知识点的试题比重约为 4 分. 以填空、选择题为主,用以检测对基础知识的理解与掌握情况,还有少量以规律探索、阅读理解、实数的运算等形式出现的中档推理、计算题. 解决本专题的题目常用分类的数学思想及数形结合的数学思想.

解决本专题的问题,一方面要注意正确运用基本概念,另一方面要善于抓住题目的特征,探索事物间的联系与规律,从而达到事半功倍的效果.

2. 样题教案

【例 1】 (2005・山东)下列各数:$\frac{22}{7}$,π,$\sqrt{8}$,$\sqrt[3]{64}$,$\sin60^\circ$中,无理数有______个.

解析:确定是否是无理数,一定要将那些不明显的数进行化简,如 $\sqrt[3]{64}$,$\sin60^\circ$ 等,然后根据无理数的概念,即可得到正确结果.

解:$\because \sqrt[3]{64}=4$,$\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,故其中的无理数共 π,$\sqrt{8}$,$\sin60^\circ$这 3 个.

答案:3

【例 2】 (2005・无锡)-5 的相反数是________,4 的平方根是______.

解析:本题考查相反数与平方根的概念,需要注意的是正数的平方根为一对相反数,不要漏掉其中的负数.

答案:5;±2

【例 3】 若 $|a|=4$,$|b|=5$,则 $|a+b|$ 的值等于(　　)

A. 9　　B. 1　　C. ±9 或 ±1　　D. 9 或 1

解析:与平方类似,绝对值为一个正数的数也是一对相反数. 因此,本题需要根据分类的数学思想进行分类后再求结果.

解:$\because |a|=4$,$\therefore a=\pm4$,$\because |b|=5$,$\therefore b=\pm5$. 分类计算 $a+b$ 的值有:$4+5=9$,$4+(-5)=-1$,$-4+5=1$,$-4+(-5)=-9$ 四种,但 $|a+b|$ 只有 9 和 1 两种.

答案:D

【例 4】 (2004・长沙)设 $a=\sqrt{15}$,则实数 a 在数轴上对应的点的大致位置是(如图 1-1)(　　)

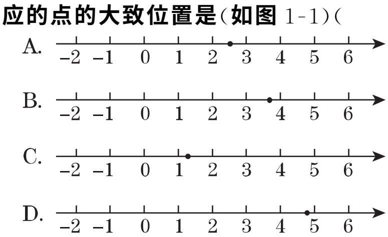


图 1-1

解析:此题是用有理数估计无理数的大致范围,并利用数轴考查数形结合的数学思想.

解:$\because \sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}$,$\therefore 3<\sqrt{15}<4$.

答案:B

【例 5】 下列说法中正确的是(　　)

A. 近似数 1.70 与近似数 1.7 的精确度相同

B. 近似数 5 百与近似数 500 的精确度相同

C. 近似数 4.70×10^4 是精确到百位的数,它有三个有效数字 4,7,0

D. 近似数 24.30 是精确到十分位的数,它有三个有效数字 2,4,3

解析:精确度由所得近似数的最后一位有效数字在该数中所处的实际位数决定. 如 5 百的最后一位有效数字是 5,在百位上,所以 5 百是精确到百位的近似数. 4.70×10^4 的最后一位有效数字是 0,0 在 4.70×10^4 中,也在百位而不是百分位,因此 4.70×10^4 也是精确到百位的近似数.

答案:C

【例 6】 联欢会上,小红按照 4 个红气球、3 个黄气球、2 个绿气球的顺序把气球串起来装饰会场,第 52 个气球的颜色是______.

解析:探索规律是近年来的一类热点题,此题应把 $(4+3+2)$ 个球作为一个组合考虑. 一个组合是 9 个球,求出第 52 个气球前有多少组合,还剩几个,问题也就解决了.

解:$52\div(4+3+2)=5\cdots7$,每个组合中的第 7 个球都应为黄色.

答案:黄色

【例 7】 一粒纽扣式电池能够污染 60 升水,太原市每年报废的电池有近10 000 000粒,如果废旧电池不回收,一年报废的电池所污染的水约有______升(用

科学记数法表示).

解析:科学记数法要求把数写成 $a\times10^n$ 的形式,其中 a 的整数数位只有 1 位. 即 $1\leqslant a<10$,n 为整数,当原数大于等于 1 时,n 比原数的整数数位小 1;当原数大于 0 小于 1 时,n 为负整数,它的绝对值等于原数中左起第 1 个非零数字前零的个数(含小数点前面的那个零). 另外,本题还容易误解题意,而只把 10 000 000写成科学记数法形式.

解:$60\times10\ 000\ 000=600\ 000\ 000=6\times10^8$ 升

答案:6×10^8

【例 8】 (2005·资阳)观察下列等式(等式中的"!"是一种数学运算符号),$1!=1$,$2!=2\times1$,$3!=3\times2\times1$,$4!=4\times3\times2\times1$,…计算:$\frac{100!}{98!}=$________.

解析:本题应通过分析所给算式之间的关系,类比、归纳、猜想、推断获得结论.

解:由题意应有 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$,故有 $\frac{100!}{98!}=\frac{100\times99\times98\times97\times\cdots\times3\times2\times1}{98\times97\times\cdots\times3\times2\times1}=100\times99=9\ 900$.

答案:9 900

【例 9】 若▲表示最小的正整数,●表示最大的负整数,■表示绝对值最小的有理数,则(▲+●)×■=______.

解析:首先根据题意确定相应符号的值:最小的正整数是 1;最大的负整数是 −1;绝对值最小的有理数是 0. 然后代入所求式进行四则运算即可.

解:依题意知▲=1,●=−1,■=0,

则(▲+●)×■=[1+(−1)]×0=0.

答案:0

【例 10】 如果 a、b 两个实数的点在数轴上的位置如图 1-2 所示,那么化简 $|a-b|+\sqrt{(a+b)^2}$ 的结果等于( )

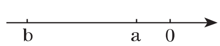


图 1-2

A. $-2b$ B. $2b$ C. $-2a$ D. $2a$

解析:原式 $=|a-b|+|a+b|$,所以解决本题的关键即如何去这两个绝对值符号. 根据绝对值的性质:正数的绝对值等于它本身,负数的绝对值是它的相反数. 这就需要结合图 1-2 去判断 $a-b$ 与 $a+b$ 的正负性了. 数轴上右边的数总比左边的大,由此可知 $b<a<0$,则 $a-b>0$,$a+b<0$. 再求解即可.

解:由图可知 $b<a<0$,则 $|a-b|+\sqrt{(a+b)^2}=|a-b|+|a+b|=a-b-(a+b)=a-b-a-b=-2b$.

答案:A

说明:解决本题需要用到算术平方根、绝对值的性质和数形结合的思想,能够锻炼学生综合运用所学知识的能力.

【例 11】 用计算器探索:

① $\sqrt{121(1+2+1)}=?$

② $\sqrt{12\ 321(1+2+3+2+1)}=?$

③ $\sqrt{1\ 234\ 321(1+2+3+4+3+2+1)}=?$

…

由此猜想:

$\sqrt{1\ 234\ 567\ 654\ 321(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1)}$
$=$________.

解析:本题虽说用计算器探索,但若利用计算器直接求出每个算式的结果则很难发现其规律,也无法猜想原式的值. 因此,可把式子分为括号前、括号内两部分分别探索规律.

解:$121(1+2+1)=11^2\times2^2=(11\times2)^2=22^2$,

$12\ 321(1+2+3+2+1)=111^2\times3^2=(111\times3)^2=333^2$,

$1\ 234\ 321(1+2+3+4+3+2+1)=1\ 111^2\times4^2=(1\ 111\times4)^2=4\ 444^2$,

…

由此猜想:

$1\ 234\ 567\ 654\ 321(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1)=1\ 111\ 111^2\times7^2=7\ 777\ 777^2$,

求算术平方根得结果为 $7\ 777\ 777^2$.

答案:$7\ 777\ 777^2$

说明:新教材要求学生会使用计算器计算一类数字运算题. 但对于本题,不能因计算器的便利而忽视对题中所给信息的观察分析,否则也不容易做出正确答案.

名校题库

一、选择题

1. 下列运算中正确的是( )

A. $\left|-\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}$ B. $-(-2)=-2$

C. $3^{-2}=9$ D. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

2. 数 1 是( )

A. 最小整数 B. 最小正数

C. 最小正整数 D. 最小有理数

3. 若四个有理数之积为负数,则这四个有理数中,负数可能有( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 1 个或 3 个

4. (2004·徐州)树叶上有许多气孔,在阳光下,这些气孔一面排出氧气和蒸腾水分,一面吸收二氧化碳. 一个气孔在一秒钟内能吸收25 000亿个二氧化碳分子. 用科学记数法表示25 000亿为( )

A. 2.5×10^{10} B. 2.5×10^{11}

C. 2.5×10^{12} D. 2×10^{11}

5. 下列说法正确的是( )

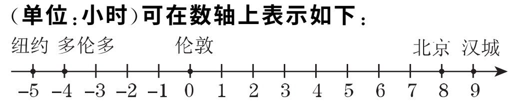
A. 非负实数就是指一切实数

B. 数轴上任一点都对应一个有理数

C. 若 $\sqrt{(-a)^2}$ 是实数,则 a 为任意实数

D. 若 $|a|=-a$,则 $a<0$

6. (2005·连云港)北京等五个城市的国际标准时间(单位:小时)可在数轴上表示如下:



如果将两地国际标准时间的差简称为时差,那么( )

A. 汉城与纽约的时差为 13 小时

B. 汉城与多伦多的时差为 13 小时
C. 北京与纽约的时差为 14 小时
D. 北京与多伦多的时差为 14 小时

7. 实数 $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ 中，分数的个数是(　　)

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

8. 某粮店出售的三种品牌的面粉袋上，分别标有质量为(25±0.1) kg、(25±0.2) kg、(25±0.3) kg 的字样，从中任意拿出两袋，它们的质量最多相差(　　)

A. 0.8 kg　B. 0.6 kg　C. 0.5 kg　D. 0.4 kg

9. (2005·南京)一根 1 米长的绳子，第一次剪去一半，第二次剪去剩下的一半，如此剪下去，第六次后剩下的绳子的长度为(　　)

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 米　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 米

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 米　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ 米

10. 已知 $0<x<1$，那么 x, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, x^2 中，最大的数是(　　)

A. x　B. $\frac{1}{x}$　C. $\sqrt{x}$　D. x^2

二、填空题

1. 如果节约 16 度电记作 +16 度，那么浪费 6 度电可记作______度.

2. (2005·黄冈) $-\sqrt{3}$ 的绝对值是______；$-3\frac{1}{2}$ 的倒数是______；$\frac{4}{9}$ 的平方根是______.

3. 如果数轴上的点 A 和点 B 分别代表 -1, 2，点 P 到点 A 或者点 B 的距离为 3，那么所有满足条件的点 P 到原点的距离之和为______.

4. 写出一个 3 到 4 之间的无理数______.

5. (2005·海安)小明的妈妈为了奖励小明在学习中取得的进步，给小明新买了一个文具盒，你估计这个文具盒的厚度为 3 ______(填上合适的长度单位).

6. (2005·龙岩)我国著名数学家华罗庚曾说过："数形结合百般好，割裂分家万事非". 在一个边长为 1 的正方形纸板上，依次贴上面积为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, …, $\frac{1}{2^n}$ 的矩形纸片(n 为大于 1 的整数)，请你用"数形结合"的思想，依数形变化的规律，计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=$______.

三、解答题

1. 某检测小组乘汽车沿公路检测线路，约定前进为正，后退为负，某天自 A 地出发到收工时所走路程(单位：千米)为：+10, −3, +4, −2, −8, +13, −2, +12, +7, +5.

问收工时距出发点 A 地多远？

2. 若 $x<2$，化简 $\sqrt{(x-2)^2}+|3-x|$.

3. (2003·南通)计算：$-9+5\times(-6)-(-4)^2\div(-8)$.

4. (2003·贵阳)观察下列算式：

$3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$, $3^7=2\,187$, $3^8=6\,561$, …

用你所发现的规律写出 $3^{2\,003}$ 的末位数字是______.

5. 计算(可用计算器计算).

$\frac{22\times22}{1+2+1}=$______；

$\frac{333\times333}{1+2+3+2+1}=$______；

$\frac{4\,444\times4\,444}{1+2+3+4+3+2+1}=$______.

由此你可以猜想出哪些类似的等式：______.

6. (2005·黄冈)已知 x、y 为实数，且 $\sqrt{x-1}+3(y-2)^2=0$，求 $x-y$ 的值.

7. 有一种"二十四点"的游戏，其游戏规则是这样的：任取 4 个 1 至 13 之间的自然数，将这 4 个数(每个数用且只用一次)进行加减乘除四则运算，使得其结果等于 24. 例如对 1, 2, 3, 4 可作运算：$(1+2+3)\times4=24$[注意上述运算与 $4\times(2+3+1)$ 应视作相同方法的运算]. 现有 4 个有理数 3, 4, −6, 10，运用上述规则写出 3 种不同方法的运算式，使其结果等于 24. 运算式如下：

(1)______；
(2)______；
(3)______.

另有四个数 3, −5, 7, 13. 可通过运算式：

(4)______使其结果等于 24.

专题二 整 式

名师教案

1. 考点点击

本章主要考查以下知识点：

(1)整式的有关概念. 如：单项式、单项式的系数、单项式的次数、多项式、多项式的项数、多项式的次数、同类项、整式等.

(2)整式的运算. 如：整式的加减法(其实质就是合并同类项)、整式的乘法(包括单项式乘以单项式、单项式乘以多项式、多项式乘以多项式)、整式的除法(只要求多项式除以单项式这一种类型)、整式的变形(即因式分解).

(3)乘法公式. 乘法公式包括平方差公式，完全平方公式. 乘法公式的逆运算可作为因式分解的公式应用于因式分解中.

(4)幂的运算. 包括同底数的幂相乘、幂的乘方、积的乘方、同底数的幂相除及由此得出的 0 指数、负整数指数的有关运算.

分析 2005 年各地的中考试卷，本专题与下面的两个专题：分式、二次根式一起作为代数式，这一考点的试题比重约为 8%. 本专题的知识仍主要以填空题、选择题、简单的解答题的形式出现. 其中乘法公式、因式分解又常渗透到综合题中进行考查.

解决本专题的题目，除了熟记运算法则、公式外，还要能对它们进行灵活、开放地运用. 做题过程中常用的数学思想有：整体、降次、数形结合的数学思想，另外，注意逆向思维这一方法也常会起到意料不到的作用.

2. 样题教案

【例 1】 正确地进行整式运算，可得(　　)

A. $2x+3y=5xy$

B. $4x^2y-5xy^2=-x^2y$

C. $3x^2\cdot 2x^3=6x^6$

D. $4x^4y^2\div(-2xy^2)=-2x^3$

解析：整式的加减运算实际就是合并同类项，A、B 中等号左边的两项不是同类项，因此不能合并. 即 A、B 都不正确；C、D 是单项式的乘除法，应注意的是要把系数与同底数的幂分别相乘除；同底数的幂相乘，底数不变，指数相加，C 中指数相乘，所以错误；D 中系数与同底数幂的运算都正确.

答案：D

【例 2】 (2003·烟台)若 $2a^mb^{2m+3n}$ 与 $a^{2n-3}b^8$ 的和仍是一个单项式，则 m 与 n 的值分别是(　　)

A. 1,2　　B. 2,1　　C. 1,1　　D. 1,3

解析：依据整式加减的实质是合并同类项，可知题中的 $2a^mb^{2m+3n}$ 和 $a^{2n-3}b^8$ 是同类项. 根据同类项的概念知，既然两式所含的字母相同，相同字母的次数也应相同，由此得方程组即可求 m、n 的值.

解：依题意得 $\begin{cases}m=2n-3\\2m+3n=8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2.\end{cases}$

答案：A

【例 3】 计算 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(\sqrt{2}-1)^0+|-3|$

解析：本题由三部分组成，分别考查负指数、0 指数、绝对值这三个知识点. 根据法则 $a^{-P}=\frac{1}{a^P}(a\neq0，P$ 为正整数)可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$，根据 $a^0=1(a\neq0)$ 可得 $(\sqrt{2}-1)^0=1$.

解：原式$=2-1+3=4$

说明：关于负指数的计算是学生的易错点. 这里应让学生理解后记住：求某非零数的负指数次幂即求其相应的正指数次幂的倒数.

【例 4】 (2005·福州)化简求值：$(a+b)^2-2a(b+1)-a^2b\div b$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$.

解析：代数式求值的题目，能化简的一定要先化简再求值，这样既节省时间，又不易出错. 化简的时候注意整式混合运算的顺序与有理数的运算是一致的.

解：$(a+b)^2-2a(b+1)-a^2b\div b$

$=a^2+2ab+b^2-2ab-2a-a^2$

$=b^2-2a$

把 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 代入上式得：

原式$=2^2-2\times\frac{1}{2}=4-1=3$.

【例 5】 分解因式：

(1)$2a^3b+8a^2b^2+8ab^3$

*(2)$1-a^2-b^2+2ab$

*(3)$x^2-5x-14$

*(4)x^2-bx-a^2+ab

解析：分解因式的一般思路是“一提、二公式、三分组、四检查”，也就是先考虑能否提取公因式，其次考虑能否运用公式，然后考虑分组分解，最后检查是否分解彻底以及运用整式的乘法检查是否分解正确. 另外，还可以从多项式项数的角度来考虑：提完公因式后，如果是二项式，一般考虑能否用平方差公式分解；三项式考虑用完全平方公式(或十字相乘法)；四项式及多于四项的则考虑用分组分解的方法. 由此，例 5 中的(1)应先提公因式再用完全平方公式；(2)，(4)应用分组分解；(3)则应用十字相乘法.

解：(1)$2a^3b+8a^2b^2+8ab^3=2ab(a^2+4ab+4b^2)$

$=2ab(a+2b)^2$

*(2)$1-a^2-b^2+2ab=1-(a^2-2ab+b^2)$

$=1-(a-b)^2=(1+a-b)(1-a+b)$

*(3)$x^2-5x-14=(x-7)(x+2)$

*(4)$x^2-bx-a^2+ab=(x^2-a^2)-b(x-a)$

$=(x+a)(x-a)-b(x-a)=(x-a)(x+a-b)$

说明：例 5 的后 3 题用分组分解或十字相乘法分

解，这在新课改区已不作要求，但新课改区有的题目先用括号把组分开，就在范围之内了.(2)，(4)两题都用分组分解法，但(2)分为的是一项与三项，(4)分为两项与两项，这是许多学生不会区分的地方.(2)题这样分组的多项式一般为四项式，其中有三项为平方项，这三项中有一项的符号与另两项相反，这一项就作为单独的一组，与另外三项组成的完全平方式再用平方差公式分解.

【例 6】　(2003·黄石)若 $x^2+2xy+y^2-a(x+y)+25$ 是完全平方式.求 a 的值.

解析：容易看出：前三项为完全平方式，可以写成 $(x+y)^2$；第三项 25 可以写成 5^2，中间一项就应是 $\pm2\times(x+y)\times5=\pm10(x+y)$，这样便可求出 a 的值了.

解：$x^2+2xy+y^2-a(x+y)+25=(x+y)^2-a(x+y)+5^2$

∴$a=\pm2\times5=\pm10$.

说明：求完全平方式中一次项的系数是常见的双解题之一.它等于二次项系数的算术平方根与常数项的算术平方根的积的 2 倍及其相反数.另外，本题还渗透了整体的数学思想.

【例 7】　在如图 2-1 的日历中，任意圈出一竖列上相邻的三个数，设中间一个数为 a，则这三个数之和为______(用含 a 的代数式表示).

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

图 2-1

解析：因为日历上的数是按从小到大顺序排列整齐的正整数，而且一排为 7 个，因此同一列的 3 个数上下相差 7.这样设中间的数为 a，上、下的数就分别为 $a-7$，$a+7$，随即可求三数之和.

解：设中间一个数为 a，则三个数依次为 $a-7$，a，$a+7$.

∴这三个数的和是 $(a-7)+a+(a+7)=3a$.

说明：日历上的数因其排列的顺序性和规律性，近年来常被选为课本或中考题中题目的背景.有本题这样选上下三个数，也有选其中的 2×2 或 3×3 方阵中的数来命题，只要弄清这些数左右相差 1，上下相差 7 这个规律，这一类题都不难解.

【例 8】　(2003·南平)请你写出一个三项式，使它能先提公因式，再运用公式来分解.

你编写的三项式是______________，分解因式的结果是______________.

解析：依据题设条件，能用公式法分解且含字母 a、b 的较简单的三项式有 $a^2\pm2ab+b^2$，再考虑到要先提公因式，故可写出如下一些式子：

$2a^2\pm4ab+2b^2=2(a^2\pm2ab+b^2)=2(a\pm b)^2$

$a^3\pm2a^2b+ab^2=a(a^2\pm2ab+b^2)=a(a\pm b)^2$

$2a^2\pm8a+8=2(a^2\pm4a+4)=2(a\pm2)^2$

…

说明：本题是开放性试题，我们不仅要学会解课本上的例题和习题，而且要懂得借助课本内容的思维方法编拟习题，这是创新教育的一种具体表现，也是近年来中考题中的一个热点.需要注意：做这类试题，一定要选既正确又简单的，写的答案复杂了往往容易出错.

【例 9】　现规定一种运算：$a*b=ab+a-b$，其中 a、b 为实数，则 $a*b+(b-a)*b$ 等于(　　)

A. a^2-b　　B. b^2-b

C. b^2　　D. b^2-a

解析：这是一道考查阅读理解能力的中考热点题，题设规定了一种新的运算"$*$"，我们只要按"$*$"的运算法则把这个非常规的式子：$a*b+(b-a)*b$ 化为常规的式子，按常规运算的做法计算即可.

解：$a*b+(b-a)*b$

$=ab+a-b+(b-a)\times b+(b-a)-b$

$=ab+a-b+b^2-ab+b-a-b$

$=b^2-b$.

答案：B

说明：此题运算 $(b-a)*b$ 时，要运用整体的数学思想，把 $(b-a)$ 这个多项式看作法则里的 a 来运算.整体的数学思想在整式这部分的应用非常广泛.

名校题库

一、选择题

1. 下列算式是一次式的是(　　)

A. 8　　B. $4s+3t$　　C. $\frac{1}{2}ah$　　D. $\frac{5}{x}$

2. (2005·威海)下列计算结果正确的是(　　)

A. $a^3+a^5=a^8$　　B. $(a^2)^3=a^6$

C. $a^3-a^2=a$　　D. $a^2\cdot a^{-2}=a^0=0$

3. (2005·临沂)把 $45ab^2-20a$ 因式分解的结果是(　　)

A. $5ab(9b-4)$　　B. $5a(9b^2-4)$

C. $5a(3b-2)^2$　　D. $5a(3b+2)(3b-2)$

4. (2005·济宁)下列各式中能运用公式法进行因式分解的是(　　)

A. x^2+4　　B. x^2+2x+4

C. x^2-2x　　D. x^2-4y^2

*5. 多项式 $a^2-\frac{1}{4}b^2-b-1$ 可以分解为(　　)

A. $\left(a+\frac{1}{2}b+1\right)\left(a-\frac{1}{2}b-1\right)$

B. $\frac{1}{4}(2a-b+1)(2a+b-1)$

C. $\left(a-\frac{1}{2}b+1\right)\left(a+\frac{1}{2}b+1\right)$

D. $\frac{1}{4}(a-b-1)(a-b+1)$

6. 当代数式 $a+b$ 的值为 3 时，代数式 $2a+2b+1$ 的值是(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

7. 若 $x^2+mx-15=(x+3)(x-5)$，则 m 的值为(　　)

A. -5　　B. 5　　C. -2　　D. 2

*8. 多项式 x^4+2x^2-3 分解因式结果正确的是(　　)

A. $(x^2+3)(x^2-1)$

B. $(x^2+1)(x^2-3)$

C. $(x^2+3)(x+1)(x-1)$

D. $(x^2+1)(x+3)(x-3)$

9. 若$(a^{m+1}b^{n+2})\cdot(a^{2n-1}b^{2m})=a^5b^3$,则 $m+n$ 的值为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. -3

10. 已知 $5^x=a$,$5^y=b$,则用 a、b 表示 5^{2x-3y}为(　　)

A. $2a-3b$　　B. $\frac{2a}{3b}$　　C. a^2b^3　　D. $\frac{a^2}{b^3}$

二、填空题

1. (2005・福州)分解因式:$x^3-4x=$______.

2. (2005・安徽)化简 $x-y-(x+y)$ 的最后结果是______.

3. (2005・泉州)有一个多项式为 $a^8-a^7b+a^6b^2-a^5b^3+\cdots$,按照此规律写下去,这个多项式的第八项是______.

4. 若 $|m-1|+(\sqrt{n}-5)^2=0$,则 $m=$______,$n=$______,此时将 mx^2-ny^2 分解因式得______.

5. 如果多项式 $x^2-axy+y^2-b$ 能用分组分解法分解因式,则符合条件的一组整数值是 $a=$______,$b=$______.

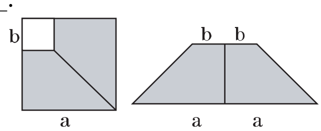


图 2-2

6. (2005・福州)如图 2-2,在边长为 a 的正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形($a>b$),把剩下的部分拼成一个梯形,分别计算这两个图形阴影部分的面积,验证了公式__________________.

三、解答题

1. 先化简,再求值:

$5x^2-(3y^2+5x^2)+(4y^2+7xy)$,其中 $x=-1$,$y=1-\sqrt{2}$.

2. 化简:$(2x+y)(2x-y)+(x+y)^2-2(2x^2-xy)$.

3. (2004・山西)已知 $x+y=1$,求 $\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$ 的值.

4. (2005・烟台)已知 $2^n+2^{-n}=k$(n 为正整数),则试用含 k 的代数式表示 4^n+4^{-n}.

5. (2005・聊城)试描述代数式 $3a+b$ 可表示的实际意义.

6. 如图 2-3,由一个边长为 a 的小正方形与两个长、宽分别为 a、b 的小矩形拼接成矩形 $ABCD$,则整个图形可表达出一些有关多项式分解因式的等式,请你写出其中任意三个等式:

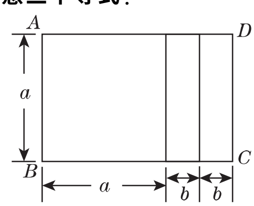


图 2-3

______________________________;

______________________________;

______________________________.

7. (1)根据多项式相乘的法则,计算下列各式:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

(2)运用这两个式子可以把具有等式左边结构特点的运算直接按等式右边写出结果,从而使运算简化.请你用语言总结、概括并叙述出你发现的规律.

(3)运用这个规律,判断下列两式是否符合以上公式.若符合,根据公式直接写出结果;若不符合,试改为符合公式的式子.

$(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

$(9x^2+6xy+4y^2)(3x+2y)$

专题三　分　式

名师教案

1. 考点点击

本章主要考查以下知识点：

(1)分式及其有关概念. 依据分式的定义，会区分整式和分式. 判断分式有意义的条件只与分母有关，当分母为零时，分式无意义.

(2)分式的基本性质. 能灵活运用分式的基本性质解决有关问题，例如：对分式进行恒等变形.

(3)分式的加、减、乘、除以及乘方的运算法则，会进行简单的分式运算.

(4)零指数和负整数指数幂的意义. 正整数指数幂的运算性质可以推广到整数指数幂.

分析 2005 年各地的中考试卷，本专题常与二次根式、分式方程一起命题. 本专题在中考试卷中所占分值约为 3～5 分，常以填空题、选择题及简单的解答题等形式出现，其中分式的基本性质又常渗透到方程中进行考查.

解决本专题的关键在于掌握通分、约分的方法，灵活地运用分式的基本性质. 运算时一方面应注意运算顺序；另一方面应注意化为最简分式. 做题过程中常用的数学思想有：整体、类比的数学思想. 常用的方法有换元法等.

2. 样题教案

【例 1】 在① $\frac{1}{a}$，② $\frac{5}{4}xy-y$，③ $-\frac{7}{8}$，④ $\frac{2}{x+1}$，⑤ $\frac{a-b}{3}$ 中，是分式的有(　　)

A. ①③④　B. ①②④　C. ③⑤　D. ①④

解析：分式与整式的主要区别是：分母中含有字母的是分式；分母中不含字母的是整式，如 x，$\frac{a-b}{3}$ 等都是整式而不是分式. 分母含有字母的式子只有①④.

答案：D

【例 2】 当 x 取何值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{1}{x+5}$　(2) $\frac{x+1}{x^2-1}$　(3) $\frac{x^2-1}{x-1}$　(4) $\frac{1}{x^2+1}$

解析：判断分式是否有意义，关键看分母，当分母不为零时，分式有意义；当分母为零时，分式无意义.

解：(1)由分母 $x+5=0$ 得 $x=-5$

所以当 $x\neq-5$ 时，分式 $\frac{1}{x+5}$ 有意义.

(2)由分母 $x^2-1=0$ 得 $x=\pm1$

所以当 $x\neq\pm1$ 时，分式 $\frac{x+1}{x^2-1}$ 有意义.

(3)由分母 $x-1=0$ 得 $x=1$

所以当 $x\neq1$ 时，分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 有意义.

(4)由于无论 x 取何值时，x^2+1 的值均不为零，所以 x 取任意值时，分式 $\frac{1}{x^2+1}$ 都有意义.

【例 3】 x 为何值时，下列分式的值为零？

(1) $\frac{x+3}{x(x+2)}$　(2) $\frac{3-|x|}{2x^2+1}$　(3) $\frac{1-|x|}{x^2+x-2}$

(4) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$

解析：在求分式值为零时，必须在分式有意义的前提下进行，不仅要考虑分式分子值为零，而且要考虑分母的值不为零，两个条件缺一不可. 分式 $\frac{A}{B}$ 的值为零的条件是分子 $A=0$，而分母 $B\neq0$. 在解题时特别不能漏掉“$B\neq0$”这个条件，否则分式就没有意义. 在第(3)小题中需 $x\neq-2$ 且 $x\neq1$，在第(4)小题中需 $x\neq-\sqrt{3}$. 注意，解决第(4)小题这类问题时，不要先约分，即不要先约去 $x+\sqrt{3}$.

解：(1) $x=-3$　(2) $x=\pm3$　(3) $x=-1$

(4) $x=\sqrt{3}$

【例 4】 写出下列等式中未知的分子或分母.

(1) $\frac{a-b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^2}$　(2) $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2-4}{(\quad)}$

解析：解决这类问题先要观察分式的分子或分母做了怎样的变化，然后对该分式的分子或分母做相应的变化. 对分式基本性质的理解，应特别注意“都”和“同”这两个字，“都”的意思体现在分子，分母乘以(或除以)非零整式时，分子分母是整体参与，而不是其中一部分；“同”的意思体现在分子，分母乘以(或除以)的整式必须是同一个，不能是两个不同的整式.

解：(1) a^2-ab　(2) $(x-2)^2$

【例 5】 (2005 · 宁德)计算：$\frac{x-1}{x-2}+\frac{1}{2-x}=$______.

解析：容易看出 $(x-2)$ 与 $(2-x)$ 互为相反数，可将 $\frac{1}{2-x}$ 变为 $-\frac{1}{x-2}$，直接通分. 但计算过程中应注意符号的变化，注意变号.

答案：1

【例 6】 计算：(1) $\frac{-3ab}{4x^2y}\cdot\frac{10xy}{21b}$

(2) $\frac{12xy}{5a}\div(-8x^2y)$

解析：分式的乘除运算实为约分，约分的关键是找出分子中的分子、分母的公因式，因此，应先观察确定公因式.

答案：(1) $-\frac{5a}{14x}$　(2) $-\frac{3}{10ax}$

说明：和分数的乘除类似，分式的乘除要按照法则进行运算，然后通过约分使运算结果化成最简分式. 分式的分子或分母的系数是负数时，一般先把负号提到分式的前边.

【例 7】 计算：

*(1)$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{x-3}$

(2)$\frac{x^2-9}{4-4x+x^2}\div(x+3)\cdot\frac{2x-4}{3-x}$

解析:在分式的乘除运算中,约分是关键.对于分子、分母是多项式的,一般应先分解因式,并在运算过程中约分,以便运算简化.

答案:(1)$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{x-3}$

$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x(x+1)}{x-3}$

$=\frac{x(x-2)}{(x-1)}$

$=\frac{x^2-2x}{x-1}$

(2)$\frac{x^2-9}{4-4x+x^2}\div(x+3)\cdot\frac{2x-4}{3-x}$

$=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{2(x-2)}{-(x-3)}$

$=-\frac{2}{x-2}$

说明:在解题过程中一定要注意运算顺序,分式的混合运算的顺序与数的混合运算顺序相同.

【例8】 (2004·临沂)如果$x-\frac{1}{x}=3$,那么$x^2+\frac{1}{x^2}$的值为( )

A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

解析:观察给定的已知条件$x-\frac{1}{x}=3$,x与$\frac{1}{x}$互为倒数,所求结果中x^2与$\frac{1}{x^2}$也互为倒数,x与$\frac{1}{x}$、x^2与$\frac{1}{x^2}$呈对称分布,由x到x^2,只须平方即可.因此,可对$x-\frac{1}{x}=3$两边平方,即可得到有关$x^2+\frac{1}{x^2}$的形式.

解:将$x-\frac{1}{x}=3$两边同时平方

得:$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=9$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=11$

答案:D

说明:利用将等式两边平方的方法通常适用于由$x\to x^2$或由$x^2\to x^4$.应先观察题目已知条件,选择合适的方法.

【例9】 (2003·潍坊)已知$x+\frac{1}{x}=4$,则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值是______.

解析:根据题意:$x\neq0$,观察所求式的特点,可利用分式的基本性质,分子、分母同除以x^2,得:$\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

即$\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$,由上题易知,可对$x+\frac{1}{x}=4$两边平方,得$x^2+\frac{1}{x^2}=14$,代入即可求得.

解:将$x+\frac{1}{x}=4$两边平方

得:$x^2+\frac{1}{x^2}=14$

又$\because\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$

$\therefore$原式$=\frac{1}{14+1}=\frac{1}{15}$

说明:此题综合性较强,既要用到等式的性质,又要用到分式的基本性质,熟练掌握有关概念及有关性质,是灵活运用的前提.对于以上两类问题,应先观察所给题目的特点,选择恰当方法,灵活处理.

【例10】 (2004·益阳)已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$,则分式$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值为______.

解析:观察所求结果$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$可变形为:$\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}$,其值只与$(x-y)$、$xy$有关,原题转化为求$(x-y)$与$xy$的关系.$(x-y)$与$xy$的关系不难看出应由$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$变形得来.方法有二,可将等式左边通分,又可直接将等式两边同乘xy,得到$(x-y)=-3xy$,再利用整体代入法,约分求得结果.

解:方法一:由$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$,得$\frac{y-x}{xy}=3$

$\therefore y-x=3xy$,即$x-y=-3xy$ $(xy\neq0)$

又$\because\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}$

$\therefore$原式$=\frac{2\times(-3xy)+3xy}{-3xy-2xy}=\frac{-3xy}{-5xy}=\frac{3}{5}$

方法二:由题意知:$x\neq0$,$y\neq0$,将$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$两边同时乘以$xy$得:$y-x=3xy$

以下与方法一相同.

答案:$\frac{3}{5}$

说明:此题也可将$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$直接变形,即分子分母同除以$xy$,得:$\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}=\frac{2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+3}{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)-2}$,将$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$变形为$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-3$,直接代入求得.不过这样计算出现了繁分式,较为繁琐,易出错.

【例11】 (2004·十堰)若分式$\frac{4x-9}{3x^2-x-2}=\frac{A}{3x+2}-\frac{B}{x-1}$($A$、$B$为常数),则$A$、$B$的值为( )

A. $\begin{cases}A=4x\\B=-9\end{cases}$ B. $\begin{cases}A=7\\B=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}A=1\\B=7\end{cases}$ D. $\begin{cases}A=-35\\B=13\end{cases}$

解析：此题利用待定系数法来求 A、B 的值．通过通分后原等式化为：$4x-9=A(x-1)-B(3x+2)$，化简得：$4x-9=(A-3B)x-(A+2B)$，即：$\begin{cases}A-3B=4\\A+2B=9\end{cases}$．解二元一次方程组得 A、B 的值．

解：$\because \dfrac{4x-9}{3x^2-x-2}=\dfrac{A}{3x+2}-\dfrac{B}{x-1}$

$\therefore \dfrac{4x-9}{(3x+2)(x-1)}=\dfrac{A(x-1)-B(3x+2)}{(3x+2)(x-1)}$

$\therefore 4x-9=A(x-1)-B(3x+2)$

$\therefore 4x-9=(A-3B)x-(A+2B)$

$\therefore \begin{cases}A-3B=4\\A+2B=9\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}A=7\\B=1\end{cases}$.

答案：B

名校题库

一、选择题

1．在代数式 $3x+\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{a}$，$\dfrac{6x^2y}{\pi}$，$\dfrac{3}{5+y}$，$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$，$\dfrac{2ab^2c^3}{5}$，$\dfrac{x^2}{x}$ 中分式共有(　　)个

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

2．若 $3x-2y=0$，则 $\dfrac{x}{y}$ 的值等于(　　)

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$

C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$ 或无意义

3．在 $\dfrac{b^2}{a+2b}$ 中，a、b 都扩大两倍，则分式的值(　　)

A. 扩大 4 倍　　B. 不变

C. 扩大 2 倍　　D. 扩大 6 倍

4．若分式 $\dfrac{x+1}{3x-2}$ 的值为零，则 x 等于(　　)

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. -1

5．若分式 $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的值为零，则 x 的值为(　　)

A. 3　　B. 3 或 -3

C. -3　　D. 0

6．计算 $\dfrac{1}{m+2}+\dfrac{4}{m^2-4}$ 的结果是(　　)

A. $m+2$　　B. $m-2$

C. $\dfrac{1}{m+2}$　　D. $\dfrac{1}{m-2}$

7．化简 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ 的结果是(　　)

A. $\dfrac{a-b}{2a}$　　B. $\dfrac{a-b}{a}$　　C. $\dfrac{a+b}{a}$　　D. $\dfrac{a-b}{a+b}$

8．以下式子，正确的是(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{x+y}\right)^2=\dfrac{1}{x^2+y^2}$　　B. $\dfrac{(a^3)^2}{a^2}=a^3$

C. $\dfrac{b-a}{a^2-b^2}=-\dfrac{1}{a+b}$　　D. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=b-a$

9．计算 $\left(x-y+\dfrac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right)$ 的正确结果是(　　)

A. y^2-x^2　　B. x^2-y^2

C. x^2-4y^2　　D. $4x^2-y^2$

10．按下面图 3-1 的程序计算，若开始输入的值为 $x=3$，则最后输出的结果是(　　)

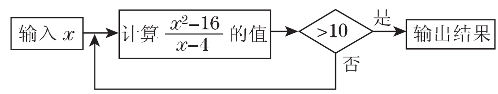


图 3-1

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

二、填空题

1．(2005・北京)在函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是__________．

2．(2003・江西)写出一个分母至少含有两项且能够约分的分式__________．

3．(2003・潍坊)已知 $x-\dfrac{1}{x}=2$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3$ 的值为__________．

4．不改变分式 $\dfrac{0.5x-1}{0.3x+2}$ 的值，把它的分子和分母中的各项系数都化为整数，则所得的结果为__________．

*5．已知实数 x 满足 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=0$，那么 $x+\dfrac{1}{x}$ 的值是______．

6．(2004・威海)观察下列等式：

$\dfrac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\dfrac{5+2}{5+3}$

$\dfrac{7^3+5^3}{7^3+2^3}=\dfrac{7+5}{7+2}$

$\dfrac{9^3+5^3}{9^3+4^3}=\dfrac{9+5}{9+4}$

请你用两个字母表示这个规律：________________．

三、解答题

1．计算：$\dfrac{a-1}{a^2-1}+\dfrac{a}{a+1}$．

2. 化简$\left(2-\frac{4}{x+3}\right)\cdot\frac{x}{x+1}$.

3. 先化简,再求值.

$\frac{a}{a-2}+\frac{2}{a^2+2a}-\frac{a+6}{a^2-4}$,其中 $a=\frac{1}{3}$.

4. 如图 3-2,在有两条支路的并联电路中,总电阻是 R,两个支路的分电阻分别是 R_1 与 R_2,总电阻的倒数等于两个分电阻的倒数之和,请用 R_1、R_2 的代数式表示 R.

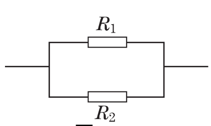


图 3-2

5. 已知$\frac{3x+1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$,求 A、B 的值.

6. 甲、乙两人两次同时在同一粮店购买粮食(假设两次购买粮食的单价不同),甲每次购买粮食 100 kg,乙每次购买粮食用去 100 元. 设甲、乙两人第一次购买粮食的单价为 x 元/kg,第二次单价为 y 元/kg. (1)用含 x、y 的代数式表示甲两次购买粮食共需付款______元,乙两次共购买______ kg 粮食. (2)若甲两次购买粮食的平均单价为每千克 Q_1 元,乙两次购粮的平均单价为每千克 Q_2 元. 则 $Q_1=$______,$Q_2=$______. (3)若规定谁两次购粮的平均单价低,谁的购粮方式就更合算. 请你判断甲、乙两人的购粮方式哪一个更合算些,并说明理由.

专题四　二次根式

名师教案

1. 考点点击

本专题主要考查以下知识点：

(1)二次根式、最简二次根式、同类二次根式的概念及辨别.

(2)二次根式的主要性质：

①$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$

②$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

③$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$

④$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$

会根据二次根式的性质熟练地化简二次根式.

(3)二次根式(不含双重根号)的加、减、乘、除的运算法则，会用它们进行运算.

(4)分母有理化.(分母中只含有一个二次根式的式子)

(5)二次根式的大小比较、估算.

分析近几年各地的中考试题可以发现：二次根式的性质、二次根式的加、减、乘、除混合运算(有时渗透在分式的化简求值中进行考查)、二次根式的大小比较、由根指数、被开方数的变化而产生的阅读理解规律探索题仍是中考考查的重点. 分值一般在 4～6 分左右，主要以填空题、选择题、解答题、阅读题的形式出现.

解决本专题的问题，除了真正理解、熟记运算法则、性质外，还要求有准确的计算能力，灵活应用有关知识的能力. 本专题解题过程中常用的数学思想有类比思想、分类思想以及化归思想等，另外，要善于发现和挖掘题中的隐含条件.

2. 样题教案

【例 1】　x 为何值时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{2-3x}$　(2)$\sqrt{x}+\sqrt{-x}$　(3)$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

(4) $\sqrt{x^2-4x+4}$

解析：二次根式在实数范围内有意义的条件是字母的取值使被开方数为非负数；分式有意义的条件是分母不为零，由此得不等式(组)求解集即可.

解：(1)由 $2-3x\geqslant 0$，得：$x\leqslant\frac{2}{3}$

∴当 $x\leqslant\frac{2}{3}$ 时，$\sqrt{2-3x}$有意义.

(2)由 $x\geqslant 0,-x\geqslant 0$，得：$x\geqslant 0,x\leqslant 0$

所以 $x=0$

∴当 $x=0$ 时，$\sqrt{x}+\sqrt{-x}$有意义.

(3)由 $x\geqslant 0,x-1\neq 0$，得：$x\geqslant 0$，且 $x\neq 1$

∴当 $x\geqslant 0$，且 $x\neq 1$ 时，$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$有意义.

(4)由$(x^2-4x+4)=(x-2)^2\geqslant 0$

得 x 的取值范围是全体实数.

∴当 x 为任意实数时，$\sqrt{x^2-4x+4}$均有意义.

【例 2】　(2005·北京)下列根式中，与$\sqrt{3}$是同类二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{24}$　B. $\sqrt{12}$　C. $\sqrt{\frac{3}{2}}$　D. $\sqrt{18}$

解析：判断几个根式是不是同类二次根式，就看它是否同时满足两个条件：(1)化成最简二次根式后被开方数相同；(2)根指数是 2.

解：$\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=\sqrt{2^2\times 6}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$

故 $\sqrt{12}$是$\sqrt{3}$的同类二次根式.

答案：B

【例 3】　(2004·本溪)下列根式中，最简二次根式是(　　)

A. $\sqrt{\frac{x}{3}}$　B. $\sqrt{8x}$　C. $\sqrt{6x^3}$　D. $\sqrt{x^2+1}$

解析：判断一个二次根式是不是最简二次根式，就看它是否满足最简二次根式的两个条件：(1)被开方数不含分母；(2)被开方数中每一个因式的指数都为 1，不满足其中任何一个条件的二次根式都不是最简二次根式.

解：$\sqrt{\frac{x}{3}}$中，被开方数有分母 3，

$\sqrt{8x}$中的因数 4 能开方，

$\sqrt{6x^3}$中的因式 x^2 能开方，

$\sqrt{x^2+1}$被开方式已经最简，不能开方.

答案：D

【例 4】　(2005·菏泽)若 $x\leqslant 0$，则化简$|1-x|-\sqrt{x^2}$的结果是(　　)

A. $1-2x$　　B. $2x-1$

C. -1　　D. 1

解析：对二次根式$\sqrt{a^2}$的化简，关键在于确定 a 的符号. 即$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$.

解：∵$|1-x|-\sqrt{x^2}=|1-x|-|x|$

又∵$x\leqslant 0$，∴$1-x\geqslant 0$

∴原式$=1-x+x=1$.

答案：D

【例 5】　(2004·武汉)已知 $xy>0$，化简二次根式

$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$的正确结果为(　　)

A. $\sqrt{y}$　　B. $\sqrt{xy}$　　C. $-\sqrt{y}$　　D. $-\sqrt{-y}$

解析:本题考查二次根式的性质及化简,考查学生分析问题和解决问题的能力. 题的关键是通过已知条件和式子特征发现隐含条件 $x<0$,且 $y<0$. 可将根号外的 x 移入根号内,亦可将根号内的 x 移到根号外.

解:方法一:$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=-(-x)\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=-\sqrt{(-x)^2\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)}=-\sqrt{-y}$

方法二:$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=x\cdot\frac{\sqrt{-y}}{|x|}=x\cdot\frac{\sqrt{-y}}{-x}=-\sqrt{-y}$

答案:D

说明:解题时要防止符号错误.

【例 6】 (2005·北京)计算:$\sqrt{27}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(\cos30°)^0$

解析:本题考查了二次根式的化简、分母有理化、特殊角的三角函数值、$a^0=1(a\neq0)$等知识点、综合性较强.

解:$\sqrt{27}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(\cos30°)^0$

$=3\sqrt{3}+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}-1$

$=3\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-1$

$=2\sqrt{3}+1$

说明:分母有理化时,选择合适的有理化因式是做题的关键. 形如$\sqrt{a}(a>0)$的根式做分母时,有理化因式是$\sqrt{a}$,形如$\sqrt{a}+\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0$,且 $a\neq b)$的根式的有理化因式是$\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

*【例 7】 先化简再求值:$\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x}$,其中 $x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

分析:应先对$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$分母有理化得 $x=2-\sqrt{3}$,由此得隐含条件 $x-1=1-\sqrt{3}<0$,这是化简 $\sqrt{x^2-2x+1}$ 的前提,然后再化简、求值.

解:$\because x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\therefore x-1=1-\sqrt{3}<0$

$\therefore$原式$=\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x(x-1)}$

$=\frac{2}{x}+\frac{|x-1|}{x(x-1)}$

$=\frac{2}{x}+\frac{1-x}{x(x-1)}$

$=\frac{1}{x}$

$\therefore$原式$=\frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}=2+\sqrt{3}$.

说明:化简二次根式时,要注意题目中所给字母的取值,否则会因为符号问题,而使化简出错.

【例 8】 (2005·漳州)观察分析下列数据,按规律填空:$\sqrt{2},2,\sqrt{6},2\sqrt{2},\sqrt{10},\cdots$,______(第 n 个数).

解析:此题是探索规律型题目,可将数据改写成下列形式:$\sqrt{2},\sqrt{4},\sqrt{6},\sqrt{8},\sqrt{10},\cdots$,其规律就一目了然.

答案:$\sqrt{2n}$

【例 9】 (2004·桂林)观察下列分母有理化的计算,$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\sqrt{2}-1$,$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$,$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-\sqrt{4},\cdots$,从计算结果中找出规律利用规律计算. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2001}}\right)(\sqrt{2002}+1)=$______.

解析:此题从特殊到一般,探索某些特殊数据分母有理化后的规律,通过分解、分拆简化了计算.

解:$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2\,002}+\sqrt{2\,001}}\right)(\sqrt{2\,002}+1)$.

$=(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2\,002}-\sqrt{2\,001})(\sqrt{2\,002}+1)$

$=(\sqrt{2\,002}-1)(\sqrt{2\,002}+1)$

$=2\,002-1=2\,001$.

说明:本题貌似复杂,其实不然,仔细观察审题,找到规律,即可解出. 对于此类题型,常有规律可寻,善于寻找发现规律,是解题的关键所在,亦是数学能力的一种体现.

*【例 10】 在实数范围内分解因式:x^4-4

解析:在实数范围内分解因式的常见方法有提公因式、运用公式、分组分解法. 根据二次根式的性质,有理数范围内不能再分解的有些因式,在实数范围内还可继续分解,直到不能再分解为止.

解:$x^4-4=(x^2)^2-2^2=(x^2+2)(x^2-2)=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

【例 11】 根据爱因斯坦的相对论,当地面上经过 1 秒时,宇宙飞船内只经过$\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c}\right)}$秒,公式中的 c 是指光速(30 万千米/秒),v 是指宇宙飞船的速度,假定有一对亲兄弟,哥哥 18 岁,弟弟 15 岁,哥哥乘着以光速 0.98 倍的速度飞行的宇宙飞船做了五年宇宙旅行后回来了,这个五年是指地面上的五年,所以弟弟的年龄已为 20 岁,可是他的哥哥的年龄在这段时间里只长了 1 岁,只有 19 岁,就这样,宇宙旅行后,弟弟比哥年长 1 岁,请你用上述公式验证一下这个结论.

解析:此题题目较长,应仔细阅读关键语句,只需将有关数据代入$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$中计算出结果,即可比较.

解:地面上经过 1 秒,飞船内只经过$\sqrt{1-\left(\frac{0.98c}{c}\right)^2}=\sqrt{1-0.98^2}=0.199\approx0.2$(秒). 相当于地面上时钟走的

速度的五分之一,所以地面上过了五年,宇宙飞船上才过去 1 年.原来哥哥比弟弟大 3 岁,旅行回来后,弟弟比哥哥长 1 岁.

【例 12】 (1)估算:$\sqrt{2\,536}$(精确到 0.1)

(2)比较下列各组数的大小:①$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,$\frac{3}{8}$ *②$\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$2-\sqrt{3}$ ③$3\sqrt{2}$,$2\sqrt{3}$

解析:(1)估算方法是:①用平方运算,估计并取平方根的第一次近似值 a;②用 a 除被开方数得商 b;③$\frac{b+a}{2}$的值就是所求平方根的第二次近似值,如果准确度不够,则将②,③步骤重做一次,直到符合精确度的要求.

(2)无理数的大小比较,常用以下方法:①估算法;②求差法;③倒数法;④平方法.

解:(1)由于 $50^2=2\,500$,$51^2=2\,601$,取第一次近似值为 $\sqrt{2\,536}\approx 50$,$\frac{2\,536}{50}=50.72$

$\frac{50.72+50}{2}=50.36$

$\therefore \sqrt{2\,536}\approx 50.4$

(2)①$\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3}{8}=\frac{12-4\sqrt{5}}{8}-\frac{3}{8}=\frac{9-4\sqrt{5}}{8}$

又$\because (4\sqrt{5})^2=80<9^2$

$\therefore 4\sqrt{5}<9$,即$\frac{9-4\sqrt{5}}{8}>0$

$\therefore \frac{3-\sqrt{5}}{2}>\frac{3}{8}$

②$\because \sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,

$2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

又$\because 2>\sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{3}+\sqrt{2}<2+\sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\therefore \sqrt{3}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}$

③$\because (3\sqrt{2})^2=18$,$(2\sqrt{3})^2=12$

又$\because 18>12$ $\therefore 3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$

名校题库

一、选择题

1.(2004·新疆)$\sqrt{81}$的平方根是( )
A. ± 9 B. 9 C. ± 3 D. 3

2.化简 $\sqrt{20}$的结果是( )
A. $5\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{5}$

3.下列根式中,不是最简二次根式的是( )
A. $\sqrt{a^2+1}$ B. $\sqrt{2x+1}$
C. $\frac{\sqrt{2b}}{4}$ D. $\sqrt{0.1y}$

4.有根式:$\sqrt{54}$,$\sqrt[3]{6}$,$\sqrt{\frac{2}{3}}$,$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,$\sqrt{\frac{27}{8}}$其中,同类二次根式有( )
A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

5.化简$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}$的结果为( )
A. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
C. $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

6.已知 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,那么 $x+\frac{1}{x}$的值等于( )
A. $2\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

7.(2004·宁夏)如果代数式$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$有意义,那么直角坐标系中,点 $A(a,b)$的位置在( )
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

8.(2004·烟台)若代数式 $\sqrt{(2-a)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$的值是常数 2,则 a 的取值范围是( )
A. $a\geqslant 4$ B. $a\leqslant 2$
C. $2\leqslant a\leqslant 4$ D. $a=2$ 或 $a=4$

9.若 $ab<0$,将 $b\sqrt{a}$中的 b 移到根号内,结果为( )
A. $\sqrt{(-b)^2a}$ B. $-\sqrt{b^2a}$
C. $\sqrt{-b^2a}$ D. $\sqrt{b^2a}$

10.(2005·长沙)小明的作业本上有以下四题:①$\sqrt{16a^4}=4a^2$;②$\sqrt{5a}\sqrt{10a}=5a\sqrt{2}$;③$a\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{a}$;④$\sqrt{3a}-\sqrt{2a}=\sqrt{a}$.做错的题是( )
A. ① B. ② C. ③ D. ④

二、填空题

1.(2005·厦门)已知函数 $y=\sqrt{-3x-1}-2\sqrt{2}$,则 x 的取值范围是________.若 x 是整数,则此函数的最小值是________.

2.计算:$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=$________.

3.如果代数式$\frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$有意义,那么 x 的取值范围是________.

4.(2005·黄石)最简根式$\sqrt[a+b]{3a}$与$\sqrt{a+2b}$是同类二次根式,则 $ab=$________.

5.通过估算,比较大小:①$\sqrt{10}$______3.2; ②$5\sqrt{5}$______$8\sqrt{2}$.(填“>”、“<”、“=”)

6.(2004·山西)观察下列各式:$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$,$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$,$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$,…,请你将猜想到的规律用含自然数 $n(n\geqslant 1)$的代数式表示出来________.

三、解答题

1.在实数范围内分解因式:$3x^4-27$

2.(2005·温州)计算：$\sqrt{12}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}-(2+\sqrt{3})^2$

3.已知 $0<a<1$，化简 $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$

4.先化简，再求值：

$\frac{4-x}{x-2}\div\left(x+2-\frac{12}{x-2}\right)$，其中 $x=\sqrt{3}-4$

5.已知正数 a、b，有下面命题：

(1)若 $a+b=2$，则 $\sqrt{ab}\leqslant 1$；

(2)若 $a+b=3$，则 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{3}{2}$；

(3)若 $a+b=6$，则 $\sqrt{ab}\leqslant 3$.

根据以上三个命题所提供的规律猜想：若 $a+b=9$，则 $\sqrt{ab}\leqslant$__________.

6.(2005·烟台)先化简，再求值：

$\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{2}{x^2-2x}$，其中 $x=2(\cot 45^\circ-\cos 30^\circ)$

7.已知刹车距离计算公式 $v=16\sqrt{df}$，v 表示车速(单位：km/h)，d 表示刹车距离(单位：m)，f 表示摩擦系数，在一次交通事故中，测得 $d=16$ m，$f=1.69$，而发生交通事故的路段限速为 80 km/h，肇事汽车是否违规超速行驶？说明理由.

专题五　一元一次方程及可化为一元一次方程的分式方程

名师教案

1. 考点点击

本专题主要考查以下知识点：

(1)等式的概念、等式的性质、方程、方程的解、解方程等概念，会检验一个数是不是某个一元一次方程的解.

(2)应用等式的性质、移项法解一元一次方程.

(3)结合生活实际，分析数量关系，利用相等关系列方程解决实际问题.

(4)会解可化为一元一次方程的分式方程(方程中的分式不超过两个).

(5)增根、验根.

(6)利用分式方程解决实际问题.

分析 2005 年各地的中考试卷，本专题在中考中占一定比例，是解决其他数学知识以及进一步学习数学的基础. 分值一般在 6～10 分，题型多样，其中可化为一元一次方程的分式方程常以填空题、选择题、解答题的形式出现.

解决本专题的问题，关键在于正确地解方程，正确地利用等式的两个性质，正确地列方程；而正确地列方程，关键在于正确地分析应用问题中的已知量、未知量，并能够根据问题中提供的信息正确地列出相等关系. 本专题常用的数学方法有换元法，并利用转化的思想来解决问题.

2. 样题教案

【例 1】 下列方程：① $x+\frac{1}{x}=2$；② $x^2-x=2$；③ $x=0$；④ $x+2y=1$；⑤ $\frac{x+1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2-4x}{6}$. 其中是一元一次方程的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解析：判断一个等式是不是方程，关键在于看它是否满足(1)只有一个未知数(元)x，(2)未知数 x 的指数都是 1(次). 只有同时满足以上两条，这样的等式才能是一元一次方程.

答案：B

【例 2】 $x=3$ 不是下列哪个方程的解(　　)

A. $\frac{3x-1}{2}=4x-8$

B. $\frac{1}{2}[x-\frac{1}{2}(x-1)]=1$

C. $8x-\frac{7x+1}{2}=14$

D. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=3$

解析：检验一个数或一个字母是不是某个一元一次方程的解，只需将它代入方程，看等式是否成立. 成立，就是方程的解，否则，就不是方程的解. 因此，只要将 $x=3$ 代入方程检验即可.

答案：C

【例 3】 填空题

(1)如果 $x=-4$ 是方程 $2x+a=x-1$ 的解，那么 a 的值是______.

(2)若把方程 $(2x+3)-(3x-5)=6$ 变形为 $-x=-2$，则变形过程中方程两边应同时减去______.

解析：(1)因为 -4 是方程的解，则把 -4 代入方程，这样问题就变为解关于 a 的一元一次方程. (2)方程展开后为 $-x+8=6$，而变形后的方程右边为 -2，说明两边减去了 8(或加上了 -8).

答案：(1)$a=3$；(2)8

说明：等式的性质是方程变形中，新方程与原方程同解的保证，方程两边加上(或减去)的必须是同一个数或整式；同乘以或同除以的也必须是同一个不等于零的数或整式.

【例 4】 解方程：$\frac{1-2x}{3}=\frac{3x+1}{7}-3$

解析：由于方程中有分母，可通过方程两边同乘以分母的最小公倍数去掉分母，然后通过移项合并同类项化成最简方程，从而解出方程.

解：方程两边同乘以 21，得

$7(1-2x)=3(3x+1)-63$

去括号，得 $7-14x=9x+3-63$

移项，得 $-14x-9x=3-63-7$

合并同类项，得 $-23x=-67$

系数化为 1，得 $x=\frac{67}{23}$　∴ $x=\frac{67}{23}$

说明：去分母时要注意，应用各分母的最小公倍数去乘方程中的每一项，不要漏乘没有分母的项. 分数线不仅起除号作用，还起括号作用，若分子是一个多项式，去分母时，不要忘记将分子作为一个整体加上括号. 去括号时，不要漏乘括号内的项，当括号前面是“－”号时，要改变括号内各项的符号. 移项时一定要改变被移项的符号.

【例 5】 解方程 $\frac{0.4x+0.9}{0.5}-\frac{0.03+0.02x}{0.03}=\frac{x-5}{2}$.

解析：有分母，若先去分母，则系数仍为小数，不如先把系数都化成整数，再去分母. 注意到 $\frac{0.4x+0.9}{0.5}$、$\frac{0.03+0.02x}{0.03}$ 中分子、分母的小数点位置相同，可把它们的分子、分母分别乘以 10 和 100.

解：方程变形为 $\frac{4x+9}{5}-\frac{3+2x}{3}=\frac{x-5}{2}$

去分母，得 $6(4x+9)-10(3+2x)=15(x-5)$

去括号，得 $24x+54-30-20x=15x-75$

移项，得 $24x-20x-15x=-75-54+30$

合并同类项，得 $-11x=-99$

系数化为 1，得 $x=9$

∴ $x=9$

【例 6】 某校为初一年级住校学生安排宿舍，若