

初中数学总复习优化设计

俞剑波 蔡继蓉 俞凯 张杰 主编

《初中数学总复习优化设计》 编委会名单

主 编: 俞剑波 蔡继蓉 俞 凯 张 杰
副主编: 李良骅 焦中安 於岳辉 陈田阳
孙安成 王叶锋 叶泳泳 张海雄
编 委: 李满成 李贤军 庄 杰 彭来生 周增斌
徐其学 周水峰 李 斌 张伟斌 郑 辉
陆威力 张海东 虞珠亚 张明永 宋惠芬
张飞定 陈明儒 王仲年 黄忠平 李舟君
周海光 刘长忠 刘煜宁 李 雪 吴兆全

内容简介

本书按九年制义务教育新大纲编写,又和初中各年级数学课本同步编写。本书每节内容分为:概念、结论、防患点、典型考题例析、分层练习等栏目。其典型范例与分层练习题均精选自近几年的各地中考数学试题。通过对典型考题的讲解及层层剖析,介绍各类题型的基本特点、考查目的、传授基本的解题思路、技巧及诀窍、简捷途径;提示易误易混处;最后进行分层练习。本书具有基础性强、难度适宜、题型多样和覆盖面广等优点。本书第四部分给出全部习题和试题的答案,便于练习时参考。

本书适合初中二、三年级师生使用,尤其适合初三教师辅导学生进行中考总复习时参考。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学总复习优化设计/俞剑波,蔡继蓉,俞凯主编.—北京:气象出版社,2001.10

ISBN 7-5029-3276-3

. 初 俞 ... 蔡 ... 俞 数学课-初中-升学参考资料
.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 076622 号

初中数学总复习优化设计

俞剑波 蔡继蓉 俞凯 张杰 主编

责任编辑:陈爱丽 终审:周诗健

封面设计:沈辉 责任技编:陈红 责任校对:刘秀华

出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号 邮编 100081)

北京市宏怀印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:16.375 字数:419千字

2001年10月第一版 2001年10月第一次印刷

ISBN 7-5029-3276-3/G·0952

印数:1~8000 定价:15.50元

编者的话

素质教育召唤我们,教学改革必须走“提高教学效率,减轻学生过重负担”之路。理论与实践告诉我们,讲练结合、精讲精练,是学生掌握知识、强化能力、提高素质的关键。因此,讲什么、练什么、怎么讲、如何练、考什么、如何考,这越来越成为广大教师、学生及家长关注的焦点。《初中数学总复习优化设计》就是为了解决这一问题而编写的。

对于本书,我们邀请了富有备考经验的一线教师,以严肃、认真、科学、负责的态度编写而成的。我们从体例的制定,章节的划分,到例习题的选配,均经过仔细斟酌和严格推敲。本书力求体现以教师为主导,学生为主体的现代教育思想,使广大师生能在及时反馈中获得更多的信息量。

本书在编写过程中我们以分层递进教学原理为指导,每一单元中均设计了分层练习。我们认为分层练习是课堂上实施分层递进教学的一种重要形式。通过分层练习来体现分层目标的要求,有助于师生把握教学目标:在课堂上进行分层练习,可以使各层次学生都能比较充分地参与学习活动,也便于教师的区别、有针对性的指导;分层练习中的“阶梯”为中、低层次学生中的学有余力者、设立了递进的目标,提供了递进的机会。我们相信,这项工作对大面积提高初中数学教学质量将会产生有益的作用,同时也会促进分层递进教学的研究和实践进一步深化。

全书由三部分组成:

第一部分是同步辅导与训练,按照知识体系分为十九讲。通过这一部分的复习,使学生全面而且有重点地掌握初中数学内容,达到巩固、提高的目的。

第二部分是专题辅导与训练,在这一部分,根据初中数学重点内容、方法和中考要求共分为十讲。在每个专题中,阐述所涉及的内容、方法在中考中的地位 and 作用,不避疑难,进一步加强对解题规律和数学思想方法的总结,强化对知识能力的综合要求,使学生的应考能力有切实的提高。

第三部分是中考模拟试题,该试题紧贴中考要求,从题型、重点、难度都符合大纲要求和中考试题的特点,具有较强的针对性和实用性。通过模拟测试,以求学生适应中考数学试题的综合要求。

在编写本书的过程中,我们力求对初中数学总复习的全过程达到优化设计,为广大师生提供一本较好的复习用书。尽管我们付出了较大的努力,但因能力有限,时间仓促,不妥或疏漏之处在所难免,恳请广大读者提出宝贵意见。最后我们将期待着它能成为更多初三学生打开中考数学题库的金钥匙,愿它能为身处无边题海中的初三学生送去一叶小舟,一付双桨,顺利到达理想的彼岸。

作者 俞剑波

2001年8月于浙江普陀

作者简介

俞剑波同志 1964 年 3 月生, 1987 年毕业于舟山师范专科学校数学系, 1991 年毕业于浙江师范大学数学系, 他现任教于浙江省舟山市普陀区五星中学, 中学一级教师, 中国教育学会数学教育研究发展中心会员, 现被聘任为山西师范大学《数学报》编委兼特约撰稿人。1989 年被评为舟山市优秀教师, 并被授予首届海岛园丁奖。教学业绩已被载入《当代中国数学家和数学英才》大辞典。

俞剑波同志近几年来在省级以上刊物上发表过的教育教学论文达 70 余篇, 其中:

《学生思维障碍成因分析》荣获 2000 年第十届全国初中数学教育论文评选一等奖, 获奖论文被选入全国初中数学教育第十届年会论文集。

俞剑波同志近几年来主编或参编的主要著作有:

《初中数学解题思路》1996 年, 气象出版社; 1996 年 10 月参编《初中数学 50 讲》; 《初中数学教与学》1997 年 1 月由气象出版社出版; 《初中数学解题技巧》1998 年气象出版社; 《名师谈数理化练与考——2000 中考数学》1999 年, 中国文史出版社; 《初中数学中考冲刺复习指导》2000 年, 气象出版社出版。

作者简介

俞凯同志 1957 年 10 月生, 1984 年毕业于杭州师范学院数学系。现任浙江省普陀区教研室数学教研员。几年来一直致力于“六课型单元教学法”的实验。发表论文《运用‘六课型单元教学法’培养学生思维能力的实验报告》等 20 余篇。《学生思维障碍成因分析》荣获 2000 年第十届全国初中数学教育论文评选一等奖, 获奖论文被选入全国初中数学教育第十届年会论文集。主编的数学参考书为《初中数学 50 讲》, 《初中数学中考冲刺复习指导》2000 年, 气象出版社出版, 教学业绩已被载入《中国数学教育人名辞典》。

第一部分 同步辅导篇

§ 1 实数及其运算

一、正确理解十一个概念

实数的分类; 数轴; 相反数; 倒数; 绝对值; 非负数; 近似数的精确度; 有效数字; 零指数; 负整数指数; 科学记数法.

二、熟记四个结论

1. 负数绝对值大的反而小.
2. 绝对值最小的实数是零.
3. 若 a, b 互为相反数, 则 $a + b = 0$; 若 a, b 互为倒数, 则 $ab = 1$.
4. 倒数等于它本身的数是 ± 1 ; 相反数等于它本身的数是 0 ; 平方数等于它本身的数是 0 和 1 ; 立方等于它本身的数是 0 和 ± 1 .

三、五个防患点

1. 区别“除”与“除以”.
2. 括号前面是负号, 去掉括号各项变号.
3. 零没有倒数.
4. 同级运算从左到右依次计算.
5. 零的零次幂没有意义.

四、典型考题例析

例 1. 填空题

- (1) 满足 $|x| < 3$ 的所有负整数为_____.
- (2) 用科学记数法表示: $0.001997 =$ _____.
- (3) $(\sqrt{3} - 1.733)^2$ 的算术平方根是_____.
- (4) 用四舍五入法求得 56.32 的近似值(保留三个有效数字)是_____; 求得 0.7096 的近似值(精确到千分位)是_____.

(5) 已知 a, b 互为相反数, c, d 互为倒数, 那么 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{1}{cd} =$ _____.

解 (1) $-1, -2, -3$ (2) 1.997×10^{-3}
(3) $1.733 - \sqrt{3}$ (4) $56.3, 0.710$ (5) -1

例 2. 在数 $3.14, \sqrt{2}, \pi, 0.\dot{3}, \sin 60^\circ, \frac{1}{7}, \sqrt{9}$ 中无理数的个数为().

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{9} = 3,$

给定各数中, 无理数有: $\sqrt{2}, \pi, \sin 60^\circ$; 故应选 B.

评析: 1. 无理数的定义有两层意思: (1) 无尽小数; (2) 不循环, 二者缺一不可. 2. 无理数有三种形式: (1) 不尽根: 比如 $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$; (2) 特殊常数, 比如圆周率 π ; (3) 特定结构的无尽小

数, 比如 $0.1010010001\dots$ (每两个 1 之间依次多一个 0). 3. 能表示成 $\frac{Q}{P}$ (Q, P 互质的整数) 的形式的数, 是有理数.

例 3. 计算下列各式

$$(1) (-1)^3 \times (-2)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$(2) \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-2)^3 \times 0.125 + \frac{1}{3-2} + 2\cos 30^\circ - (-9)^0$$

解 (1) 原式 = $-1 \times 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times 3$
 $= -7$

(2) 原式 = $9 - (-8) \times 0.125 - \frac{1}{3-2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
 $= 9 + 1 - \frac{1}{3-2} + \sqrt{3}$
 $= 8$

评析: (1) 计算时应注意运算顺序, 巧妙运用运算律能使计算简化.

(2) 分段击破是解这类题的基本思路.

例 4. 已知实数 a, b 在数轴上表示的点如图所示.

化简: $|a+b| - \sqrt{(a-b+1)^2}$ 的结果是()

- A. $2b-1$ B. $2a+1$ C. $-2a-1$ D. $-2b+1$

解: 由图可知 $a < 0, b > 0$, $|a| < |b|$, $a+b > 0, a-b+1 < 0$.

$$|a+b| - \sqrt{(a-b+1)^2} = a+b - (a-b+1) = 2b-1 \quad \text{故应选 A.}$$

评析: (1) 去绝对值符号关键看绝对值内数的符号. (2) 两点落在原点两旁时, 对应的两数和(差)的符号应特别留心.

例 5. 若 $m < 0, n < 0$, 且 $m-n = -6$, 则 $|m| - |n|$ 的值为()

- A. 6 B. -6 C. 6 或 -6 D. 以上答案均不对.

解法一: 令 $n = -2$, 代入 $m-n = -6$, 得 $m = -8$, 则 $|m| - |n| = 8 - 2 = 6$ 故应选 A.

解法二: 因为 $m < 0, n < 0$, $|m| = -m, |n| = -n, |m| - |n| = m - (-n) = n - m$, 由于 $m-n = -6$, 可得 $n-m = 6$, 即 $|m| - |n| = n-m = 6$.

例 6. 若实数 x 满足条件:

$$(x^2 - 5x + 6)^2 + |x-2| = 0$$

1. 求 x 的值; 2. 写出 x 的 x 次方根.

解: (1) x 为实数, 故由已知可得 $x-2=0, x^2-5x+6=0$. 解得 $x=2$.

(2) x 的 x 次方根为 $\pm \sqrt[2]{2}$

评析: 1. 完全平方式、绝对值、算术根均为非负数. 2. 非负数的常用性质有: (1) 有限个非负数的和仍然是非负数 (2) 若有限个非负数的和等于零, 则每个非负数同时为零.

例 7. 选择题(将正确答案的代号填入题后的括号内)

(1) 下列判断正确的是()

- A. 一个数的相反数是负数; B. 最大的负数是 -1;

C. 非负数中最小的数是零; D. 比正数小的数都是负数.

(2) 已知 $(a+1)^0 = 1$, 那么 a 的取值范围是()

A. $a > -1$ B. $a \neq -1$ C. 一切实数 D. 不等于 -1 的实数

(3) 对任意实数 a , 下列各式中一定成立的是()

A. $a > |a|$ B. $a < -|a|$ C. $a \geq |a|$ D. $a \leq -|a|$

解: (1)C (2)D (3)C

评析: 这是一组考查概念的问题, 在解答时要注意全面和细致, 例如零这个数不能忽略, 零的零次幂没有意义, 绝对值最小的实数是零, 把“0”这个数作为一个特例情况考虑.

三、易混、易错题点拨

例 8. (1) 计算: $-3 - 3^2 + 3^2 \div \frac{1}{3} \times 3$ 其结果是()

A. -3 B. 15 C. 69 D. 87

(2) 将 0.03046 四舍五入精确到千分位, 它的有效数字的个数是_____.

(3) 我国的国土面积约为 9.60×10^6 平方千米, 由四舍五入得到的近似数 9.60×10^6 ()

A. 有 3 个有效数字, 精确到百分位; B. 有 3 个有效数字, 精确到百万位;
C. 有 3 个有效数字, 精确到万位; D. 有 2 个有效数字, 精确到十万位.

(4) 若 $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$, 则 x _____.

(5) 某数的绝对值的算术根等于它本身, 这个数必为().

A. 1 或 -1 B. 1 或 0 C. -1 或 0 D. $1, -1$ 或 0

错解: (1)A; (2) $0.03046 \approx 0.031$, 有效数字的个数是 2; (3)A; (4) $x < 1$; (5)D.

点拨: (1) 一要注意运算顺序, 二要区别 -3^2 与 $(-3)^2$ 的意义, 正确解应选 C.

(2) 在四舍五入时, 要求精确到哪一位, 只要对这一位后面的第一个数字四舍五入即可. 而不能从最后一位的数字逐次四舍五入, 如本题 $0.03046 \approx 0.0305 \approx 0.031$ 就错了. 正确解法: 0.03046 的万分位是“4”, 故舍去, $0.03046 \approx 0.030$, 有两个有效数字, 分别是 3、0, 注意: “0”切勿漏掉.

(3) 带单位(或用科学计数法表示)的近似数, 其精确度由单位前(或 10^n 前)的位数与单位(或 10^n)确定. 如近似数 24 万、2.40 万它们的单位都是万, 分别精确到万位、百位. 通常可这样确定: 24 万 = 240000 . “4”是万位, 故精确到万位, 2.40 万 = 24000 , “0”是百位, 故精确到百位. 再如: 近似数 1.80×10^3 、 1.80×10^{-3} 分别精确到十位、十万分位. (同学们可仿上法试一下). 近似数的有效数字是单位前(或 10^n 前)所有的数字. 故本题应选 C.

(4) 0 的绝对值与相反数均仍是 0, 若 $|x-1| = x$, 则 $x < 0$, $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x$, $x = -(x-1)$ 时, $x-1 < 0$, $x < 1$. 事实上这类题由绝对值、算术根均为非负数来解为佳. 如: 算术根为非负数, $\sqrt{(x-1)^2} \geq 0$, 又 $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$, $1-x \geq 0$, $x \leq 1$. 这样就漏不掉等于号了.

(5) 本题分三步思考: 什么数的算术根等于它本身, 进而得这个数为 0 或 1; 由 $|x| = 0$ 或 $|x| = 1$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$; 算术根为非负数, 故舍去 -1 . 应选 B.

分层练习

A 组

一、填空题

1. 若 a 、 b 互为相反数, 则 $a + b =$ _____.
2. 计算: $1 - (-5) =$ _____.
3. 若 $a < 0$, 则 $|a| =$ _____.
4. -2 的相反数的倒数是_____.
5. 数 -3.14 与 π 的大小关系是_____.
6. $(-7)^2$ 的平方根是_____.
7. 设 $x > 2$, 化简: $|x - 2| =$ _____.
8. 用四舍五入法, 对 200626 取近似值, 保留四个有效数字, 200626 _____.
9. 4 的倒数是_____, 绝对值是_____, 算术平方根是_____.
10. (2000 年安徽) 据统计, 全球每分钟约有 8500000 吨污水排入江河湖海, 这个排污量用科学计数法表示应是_____吨.
11. 某商品原价是 500 元, 经连续两次降价 10% 后, 又提价 20%, 则商品现价是_____.
12. 若 $|a| = \sqrt{11}$, 则 $a =$ _____.
13. 比较大小: $2 - \sqrt{5}$ _____ $2 - \sqrt{3}$ (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)
14. 已知 $|a + 3| + |b - 1| = 0$, 则实数 $(a + b)$ 的相反数为_____.
15. 若 1 减去 $(1 - x)$ 的倒数的差等于 $(1 - x)$ 的倒数, 则 $x =$ _____.

二、选择题:

1. 若 $2a$ 与 $1 - a$ 互为相反数, 则 a 等于()
A. 1 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$
2. 数 0.000125 的保留两个有效数字的近似数, 可用科学计数法表示为()
A. 1.3×10^{-4} B. 1.3×10^4 C. 1.3×10^{-3} D. 1.2×10^{-4}
3. 下面的说法, 正确的是()
A. 0 没有平方根 B. -1 的平方根是 -2
C. 4 的平方根是 -2 D. 2 是 4 的算术平方根
4. 下列命题中, 假命题的是()
A. 9 的算术平方根是 3 B. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2
C. 27 的立方根是 ± 3 D. 立方根等于 -1 的实数是 -1
5. 在实数 π , $-\frac{2}{5}$, 0, $\sqrt{3}$, -3.14 , $\sqrt{4}$ 中, 无理数有()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
6. 用四舍五入法对 318.96 取近似值, 要求保留四个有效数字, 则 $318.96 =$ ()
A. 318 B. 318.0 C. 319 D. 319.0

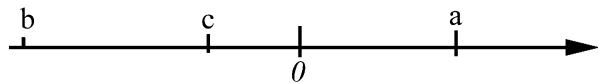
5. (2000年西宁) 计算: $-2^3 + (-3.14)^0 - \left|1 - 2\frac{1}{2}\right| \times -\frac{1}{2}^{-1}$

B 组

一、填空题

1. (2000年江西) 有一列数: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... 当按顺序从第2个数数到第6个数时, 共数了_____个数; 当按顺序从第m个数数到第n个数($n > m$)时, 共数了_____个数.

2. (2000年河南) 实数 a, b, c 在数轴上的对应点如图, 化简: $a + |a + b| + \sqrt{c^2} - |b - c| =$ _____.



二、选择题

1. 一个到火星旅行的计划, 来回的行程需要三个地球年(包括在火星上停留 449 个地球天). 已知火星和地球之间的距离为 34000000 千米, 那么, 这个旅行的平均速度是每小时多少千米?(说明: 地球年、地球天是指在地球上一年或一天, 即一年 = 365 天, 一天 = 24 小时).

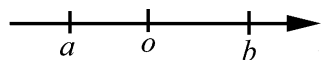
A. $\frac{(3 \times 365 - 449) \times 12}{34000000}$

B. $\frac{34000000}{(3 \times 365 - 449) \times 24}$

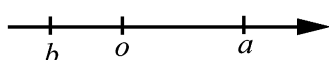
C. $\frac{2 \times 34000000}{(3 \times 365 - 449) \times 24}$

D. $\frac{34000000 \times 24}{2 \times (3 \times 365 - 449)}$

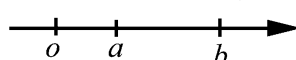
2. (2000年潜江) 已知 $|a + b| + |a - b| - 2b = 0$, 在数轴上给出关于 a, b 的四种位置关系(如图), 则可能成立的有()



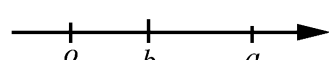
(1)



(2)



(3)



(4)

A. 1 种

B. 2 种

C. 3 种

D. 4 种

三、解答题

1. 计算: $\frac{2}{3} \div \frac{27}{8} - \frac{2}{3 - \frac{2}{5}} + (\sin^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ)$

2. 已知 m, n 是实数, 且 $\sqrt{2m + 1} + |3n - 2| = 0$, 求实数 $m + n^2$ 的相反数的倒数值.

3. 已知 $|a| = 3$, $|b| = 4$, $ab > 0$, 求 $a - b$ 的值.

§ 2 代数式

一、九个重要概念

单项式; 多项式; 整式; 分式; 二次根式; 最简根式; 分母有理化; 因式分解; 代数式的值.

二、七个防患点

1. 求代数式的值, 一般先化简后再求值.
2. 正确认识单项式的系数与次数, 多项式的项与次数, 常数项.
3. 分式的分母不能为零.
4. 运用分式的基本性质时, 乘以或除以的数或整式的值不能为零.
5. 因式分解应在指定范围内分解到不能再分解为止, 遇相同的因式应写成幂的形式.
6. \sqrt{a} 必须满足 $a \geq 0$.
7. 正负不明确的因式, 根号内外移动时要特别小心.

三、典型考题例析

例 1. 用代数式表示

(1)(1996 西宁) a 的一半与 b 的绝对值的 $\frac{1}{3}$ 的差是_____.

(2)(1994 济南) 某印刷厂四月份印刷了科技书籍 20 万册, 第二季度平均每月增长的百分率为 x , 那么六月份印刷科技书籍_____万册.

(3)(1995 江西) 某食品连续两次涨价 10% 后价格是 a 元, 那么原价是().

- A. $\frac{a}{1.1^2}$ 元 B. $a \times 1.1^2$ 元 C. $a \times 0.9^2$ 元 D. $\frac{a}{0.9^2}$ 元

解 (1) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}|a|$ (2) $20(1+x)^2$ (3) A

评析: 用代数式表示简单的数量关系, 它实际上就是考查数学的语言表达能力. 在用字母表示数时, 要注意运算顺序和括号的使用方法.

例 2. (92 吉林) 若代数式 $2y^2 + 3y + 7$ 的值是 8, 那么 $4y^2 + 6y - 9$ 的值是().

- A. 2 B. - 17 C. - 7 D. 7

分析: 注意到题设代数式某些与结论代数式对应项系数成比例, 由条件 $2y^2 + 3y + 7 = 8$, 可直接变换出结论代数式.

解: 由 $2y^2 + 3y + 7 = 8$ 得 $2y^2 + 3y = 1$,

$$\begin{aligned} 4y^2 + 6y - 9 &= 2(2y^2 + 3y) - 9 \\ &= 2 \times 1 - 9 = -7 \end{aligned}$$

评析: 1. 以上解法是: 整体代入的思路, 使问题简捷迅速地得到解决. 这是求条件代数式值的常用方法之一.

2. 若按常规思路: 解方程得 y , 而后代入计算. 其繁难程度同学们一试即知.

例 3. (1992 宿州) 若 $10^{2y} = 25$, 则 10^{-y} 等于()

- A. $\pm \frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{25}$

解: $10^{2y} = 25$ $(10^y)^2 = 25$ 又 $10^y > 0$

$$10^y = 5 \quad 10^{-y} = \frac{1}{10^y} = \frac{1}{5} \quad \text{故选 C}$$

评析: 1. 熟悉幂的乘方运算性质的逆变形; 2. 理解一个正实数的任何(实数)次幂皆正.

例 4. (1996 济南) 已知分式 $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$ 的值为 0, 则 x^{-2} 的值为().

A. -1 或 $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ 或 1 C. -1 D. 1

解: $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)^2}$

当 $(x-3)^2 \neq 0$, 即 $x \neq 3$ 时分式有意义

当 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 即 $x = -1$ 或 $x = 3$ 时分式的分子为零.

当 $x = -1$ 时分式的值为零.

于是 $x^{-2} = (-1)^{-2} = 1$ 故应选 D.

评析: 1. 分式的值为零的条件为: 分子等于零且分母不等于零. 千万不可忽视分母不等于零; 2. 正确理解“且”、“或”的意义.

例 5. (1) (1995 河北) 若 $0 < a < 1$, 且 $a + \frac{1}{a} = 6$, 则 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值为_____.

(2) (1993 山西) 已知方程 $2x^2 - 6x - 1 = 5$ 且 $\sqrt{x^2 - 3x - 1} = 4$, 求代数式 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}$

5 的值. (准确值)

(3) (1994 南京) 当 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 时, 求 $\frac{x^2}{x-1} - (1 + \frac{1}{x^2 - x})$ 的值.

解: (1) $0 < a < 1$, $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} < 0$

又 $(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = a + \frac{1}{a} - 2 = 6 - 2 = 4$

$$\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -2.$$

(2) 设 $\sqrt{x^2 - 3x - 1} = y$, 得 $2y^2 - 5y - 3 = 0$

解得 $y_1 = 3$ 或 $y_2 = -\frac{1}{2}$ (舍去)

当 $y = 3$ 时, $\sqrt{x^2 - 3x - 1} = 3$

解得 $x_1 = 5, x_2 = -2$ (舍去)

故原式 = $\frac{1}{5-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$.

(3) 由题意, x 是已知方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的根, 且 $x \neq 0$, 那么 $x^2 + 1 = 4x$, 方程两边

同除以 x , 得 $x + \frac{1}{x} = 4$.

故原式 = $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} = 4$.

评析: 代数式求值的常见题型有:

(1) 先化简后再求值; (2) 用配方法或乘法公式进行转化; (3) 对于一类式中的字母隐含在方程等知识中, 解这类题时, 一方面要从方程中求出未知数的值, 另一方面可把式子化简, 只有

双管齐下, 才能获解.

例 6. 把下列各式分解因式:

(1)(1996 河南) $4 - x^2 - y^2 + 2xy$

(2)(1995 宁夏回族) $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8$

解: (1) 原式 = $4 - (x^2 - 2xy + y^2) = 4 - (x - y)^2$
 $= (2 - x + y)(2 + x - y)$

(2) 原式 = $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2)$
 $= (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 4)$

评析: (1) 多于三项的多项式可考虑分组分解法, 分组分解时, 需预见分组后的情况, 各组是否有公因式可提, 是否能运用公式法等.

(2) 对于高次的多项式常根据题目特征视某一代数式为整体变成二次三项式进行分解.

例 7. 在实数范围内分解因式

(1)(1996 辽宁) $x^2 - 2x - 4$

(2)(1996 陕西) $(a^2 + a + 1)(a^2 - 6a + 1) + 12a^2$

解: (1) 方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的根是

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2 - 2x - 4 = (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$$

(2) 原式 = $(a^2 + a + 1)[(a^2 + a + 1) - 7a] + 12a^2$
 $= (a^2 + a + 1)^2 - 7a(a^2 + a + 1) + 12a^2$
 $= (a^2 - 2a + 1)(a^2 - 3a + 1)$
 $= (a - 1)^2(a - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})(a - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$

评析: (1) 用求根公式分解时, 注意二次项系数不要漏写; (2) 因式分解应在指定范围内分解到不能再分解为止, 遇相同因式应写成幂的形式.

例 8. 化简

(1)(1996 云南) 如果 x 满足 $\frac{1}{2} < x < 2$, 化简 $(2 - x) + \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$ 的结果是_____.

(2)(1997 宁波) 化简: $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + (\sqrt{1 - 4x})^2$

解: (1) 在条件 $\frac{1}{2} < x < 2$ 下, $(2 - x) + \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = (x - \frac{1}{2})^2 = (2 - x) - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}$$

$$(2 - x) + \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = (2 - x) + (x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

(2) 要使 $\sqrt{1 - 4x}$ 有意义, 必须 $1 - 4x \geq 0$, 即 $x \leq \frac{1}{4}$

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + (\sqrt{1 - 4x})^2 = 3x - 1 + 1 - 4x$$

$$= 1 - 3x + 1 - 4x$$

$$= 2 - 7x$$

评析: 若根式中的字母给出了取值范围, 则应在这个范围内进行化简; 若没有给出取值范

围,则应在字母的允许取值的范围内进行化简.

例 9. 若 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, 求 $x - \frac{1}{x}$ 的值.

解: $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 3 - 2 = 1.$$

即 $x - \frac{1}{x} = \pm 1$

评析: 将 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 看做一个整体, 这是代换思想的应用.

例 10. 已知 x, y 为实数, 且 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2} + 1}{x - 2}$, 求: $3x + 4y$ 的值.

解: 由 x, y 为实数的条件, 可知

$$x^2 - 4 \geq 0, 4 - x^2 \geq 0, \text{ 则 } x^2 = 4, x = \pm 2$$

分母为 $x - 2, x - 2 \neq 0, x \neq 2$

$$x = -2$$

当 $x = -2$ 时, $y = -\frac{1}{4}$

$$3x + 4y = -7$$

评析: 题目中所给的条件都是隐含条件, 只有将隐含条件显得完整、准确, 才有可能进一步发展自己的思维.

分层练习

A 组

一、填空题

1. 计算: $(a^2b)^2 =$ _____.

2. 分解因式: $2a(b+c) - 3(b+c) =$ _____.

3. 若分式 $\frac{x^2 - 3}{x + 3}$ 的值为零, 则 $x =$ _____.

4. 分解因式: $a^2 - b^2 - 2b - 1 =$ _____; $x^3 - 2x^2 + x =$ _____.

5. 多项式 $3xy^2 - 4x^3y + 12$ 的次数是 _____; 单项式 $-5xy^2$ 的系数是 _____, 次数是 _____.

6. 计算: $4x(x-1)^2 + x(2x+5)(5-2x) =$ _____.

7. 某煤矿 1 月份的产量为 a 吨, 如果按每月平均增长 10% 计算, 那么 3 月份的煤产量用代数式表示为 _____ 吨.

8. 把 $x^2 + 6x + 1$ 化为 $(x+h)^2 + k$ (其中 h, k 是常数) 的形式是 _____.

9. 计算: $\frac{12}{x^2 - 9} + \frac{2}{3 - x} =$ _____.