第一章　数与式

1.1　钟面数字问题（本题适合初中一年级）

钟面上有 1,2,3,…,11,12 共十二个数字，如图 1.1—1 所示.

(1) 试在某些数的前面添加负号，使它们的代数和为零；

(2) 能否改变钟面上的数，比如只剩下六个偶数，仍按第(1)小题的要求来做；

(3) 请试着改变第(1)小题，使它更加有趣一些，比如：哪些时间里分针和时针所夹的那些数的前面添加负号，钟面上的各数的代数和就为零；

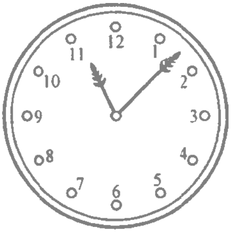

图　1.1—1

(4) 在解上述各题的过程中，你能总结出一些什么数学规律？

【分析与参考答案】

(1) 我们先试着选定任意几个数字，在其前面添加负号，如

$$-12-11-10+9+8+7+6-5+4+3+2+1=2.$$

这当然不是我们要的答案，但我们可以再将其调整，比如改变 1 前面的符号，得

$$-12-11-10+9+8+7+6-5+4+3+2-1=0. \quad Ⓐ$$

用这种方法当然可以得到许多解答，但我们并不满足. 我们希望寻找其中的规律，使我们能找到更多的解答. 我们发现：

▲在调整符号的过程中，若将一个正数变号，十二个数的代数和就减少这个正数的两倍；若将一个负数变号，十二个数的代数和

就增加这个负数的绝对值的两倍.

▲要使十二个数的代数和为零，其中正数的和的绝对值必须与负数的和的绝对值相等，均为十二个数之和的一半，即等于 39.

为了便于叙述，我们把Ⓐ式所表示的一个解答（即一种满足题意要求的添加负号的方式）用一个记号表示为：(12,11,10,5,1). 我们还可发现：

▲如果(12,11,10,5,1)是一个解答,那么(9,8,7,6,4,3,2)也必定是一个解答（对偶律）；

▲由于最大三个数之和为 33＜39，因此必须再加上一个 6 才有解答(12,11,10,6)，所以添加负号的数至少要有四个；由对偶律，添加负号的数最多不超过八个.

根据以上规律，就能在很短的时间内得到许多解答，但是要写出所有解答，还必须把答案作适当的分类. 本题共有 124 个解答. 亲爱的读者，你能写出这 124 个解答来吗？这可要有高超的智慧和毅力的哟！

(2) 因为 2＋4＋6＋8＋10＋12＝42，它的一半为 21,而奇数不可能通过偶数求和得到，所以回答是否定的；

(3) 每当 3∶45～3∶50 或 9∶15～9∶20，分针和时针所夹的那些数前面添加负号，钟面上的各数代数和就是零；

(4) 第 (1) 小题中我们已提到一些规律，其他规律还是留给读者自己去发现创造.

【说明】本题经测试，1993 年 6 月 15 日，浙江省德清县雷甸中学,初一(3)班 47 位同学，通过试错的方法，用 4 分钟，平均每人得到 2.1 个解答，掌握规律之后，同样用 4 分钟，平均每人得到 7.0 个；1997 年 4 月 8 日，杭州第二中学，初一选修班 31 位同学，用 3.5分钟，掌握规律前后得到的解答平均每人分别为 4.1 个和 5.5 个. 本题还可发展为：如果钟面上有 $1,2,3,\cdots,n-1,n$ 共 n 个数，结论又如何？

1.2 勾股数（本题适合初中二年级）

给出一组式子：

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$5^2+12^2=13^2,$$
$$7^2+24^2=25^2,$$
$$9^2+40^2=41^2,$$
$$\cdots\cdots$$

（1）你能发现关于上述式子中的一些规律吗？

（2）请你运用所发现的规律，或者通过试错的方法（利用计算器），给出第五个式子；

（3）请你证明你所发现的规律。

【分析与参考答案】

（1）①这些式子每个都呈 $a^2+b^2=c^2$（a,b,c 为正整数）的形式.这样的 a,b,c 可作为直角三角形的三边，其中 a,b 是直角边，c 是斜边，我们把 a,b,c 称为一组“勾股数”，也就是满足勾股定理的一组正整数；

②每个等式中 a 是奇数，b 是偶数（实际上还是 4 的倍数），c 是奇数；

③ $c=b+1$；

④各个式子中，a 的取值依次为 $3,5,7,9,\cdots$，是连续增大的奇数，所以 a 的第五个取值为 11；

⑤各个式子中，b 的取值依次为 $4,12,24,40,\cdots$，它的规律可以作这样的探讨：

先把它们写成 $2k$ 的形式，其中 k 为相邻两整数之积：

$$2\times2,\ 2\times6,\ 2\times12,\ 2\times20\cdots\cdots$$

即

$$2\times(1\times2),\ 2\times(2\times3),\ 2\times(3\times4),\ 2\times(4\times5),\cdots\cdots$$

或把它们写成 $4k$ 的形式，即

$$4\times1,4\times3,4\times6,4\times10,\cdots\cdots$$

这里的 k 的取值，第一个为 1；第二个比第一个大 2，即为 3；第三个比第二个大 3，即为 6；第四个比第三个大 4，即为 10；……

所以 b 的第五个取值为 $2\times(5\times6)$ 或 $4\times(10+5)$，也就是 60；

(2）根据上面所发现的规律，我们猜想 a,b,c 的第五个取值分别为 11，60 和 61，经验算：

$$11^2+60^2=3721=61^2,$$

即第五个式子为：

$$11^2+60^2=61^2;$$

(3）由（1）的④⑤③，我们猜测第 n 个 a,b,c 的取值为：

$$a=2n+1,$$

$$b=2\times n(n+1)$$

$$=2n^2+2n,$$

$$c=2n^2+2n+1.$$

下面来证明 $a^2+b^2=c^2$.

证明一 $\because$ $a^2+b^2=(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2$

$$=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1,$$

又 $c^2=(2n^2+2n+1)^2$

$$=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1,$$

$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$.

证明二 $\because c=b+1$,

因此，为了证明 $a^2+b^2=c^2$，只要证明

$$a^2=c^2-b^2$$

$$=(b+1)^2-b^2$$

$$=2b+1,$$

事实上

$$a^2=(2n+1)^2$$

$$=2(2n^2+2n)+1$$
$$=2b+1,$$

于是得证.

让我们来反思一下题目中各式子的规律. 因为 a 为奇数,所以 a^2 为奇数，不妨表示为 $2b+1$. 于是有

$$a^2=2b+1$$
$$=(b+1)+b$$
$$=[(b+1)+b][(b+1)-b]$$
$$=(b+1)^2-b^2.$$

令 $b+1=c$,即得

如今年是 1999 年,设 $1999^2+p^2=q^2$,其中 p,q 为连续正整数,即 $q=p+1$，我们就可依上面的方法确定此式.

$$1999^2=3996001$$
$$=1998001+1998000$$
$$=1998001^2-1998000^2$$

$$\therefore\quad 1999^2+1998000^2=1998001^2.$$

根据上述式子的规律性，英国数学家波尔特编了一道趣题，我们把它提供出来，以供读者思考：

为了庆祝红宝石婚纪念日，威廉和露西全家人一起举行聚会.威廉回想起这段漫长的婚姻生活，追忆当年在大学里因与年轻的露西同桌而产生爱情，他突然发现现在他的年龄的平方与露西年龄的平方的差，正好等于他们子女数目的平方.请问当年他们结婚时，两人各是几岁？他共有子女几人？（注：在西方，结婚 40 周年纪念日被称为红宝石婚纪念日. 另外,在英国,法定结婚年龄为 16 岁.）

1.3 和与积相等的两个数（本题适合初中一、二年级）

怎样的两个数，它们的和等于它们的积？你大概马上就会想到

$$2+2=2\times 2.$$

其实这样的两个数还有很多，例如

$$3+\frac{3}{2}=3\times\frac{3}{2}.$$

(1) 你能再写出一些这样的两个数吗？你能从中发现一些规律吗？

(2) 你能否提出一些类似的问题？在你提出的问题中选择一个问题进行研究.

【分析与参考答案】

(1) 首先考虑整数的情况. 除了 2 和 2 以外，还有

$$0+0=0\times 0.$$

稍后我们将证明：除此之外没有其他的两个整数满足要求.

现在我们来寻找分数的答案. 我们可以从已知的答案中去寻找线索：

$$3+\frac{3}{2}=\frac{3\times 2+3}{2}=\frac{3\times 3}{2}=3\times\frac{3}{2}.$$

一般地，我们有：

$$\begin{aligned}(a+1)+\left(\frac{a+1}{a}\right)&=\frac{a(a+1)+(a+1)}{a}\\&=\frac{(a+1)^2}{a}\\&=(a+1)\cdot\left(\frac{a+1}{a}\right).\end{aligned}$$

这样，用任意一个整数代替字母 a，我们就可以得到无穷多个分数的解答. 例如，取 $a=5$ 得

$$6+\frac{6}{5}=6\times\frac{6}{5}.$$

更一般地，a 还可以取分数（初二同学还可考虑 a 取无理数），例如：

$$\frac{7}{5}+\frac{7}{2}=\frac{7}{5}\times\frac{7}{2},\left(a=\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{11}{6}+\frac{11}{5}=\frac{11}{6}\times\frac{11}{5},\left(a=\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{7}{3}+\frac{7}{4}=\frac{7}{3}\times\frac{7}{4}.\left(a=\frac{4}{3}\right)$$

我们发现，在以上的各组数中，两个数的分子相同，并且分母的和等于分子.这是不是一般性的规律呢？

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}&=\frac{b(a+b)+a(a+b)}{ab}\\&=\frac{(a+b)^2}{ab}\\&=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{a+b}{b}.\end{aligned} \quad Ⓐ$$

让我们再回到问题的起点，设这两个数为 a 和 b,由 $a+b=ab$，我们有（不妨设 a,b 不为零）：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1, \quad Ⓑ$$

也就是说，当且仅当 a,b 两数的倒数之和为 1 时，这两个数的和等于它们的积.

利用这一规律，我们来证明非零整数的解答只有（2,2）一组数,首先当 a,b 绝对值都大于 2 时，Ⓑ式左边的绝对值小于 1，故Ⓑ式不成立.而当 a,b 绝对值不都大于 2 时，不难验证 a,b 不能等于 $\pm1,-2$（即使其中之一等于 $\pm1,-2$ 也不行）.故只有 $a=2,b=2$；

（2）类似的问题如：

①怎样的两个数，它们的差等于它们的商？

②怎样的三个数，它们的和等于它们的积？

等等.

下面我们对问题①作一简要的研究：设这两个数为 a 和 b,由

$a-b=\frac{a}{b}$,我们有：

$$ab-b^2=a,$$

$$\therefore \quad a=\frac{b^2}{b-1}.$$

任意选定 b 的值($b\neq1$)，即可得到相应的 a 的值.

例如：

$$4-2=4\div2,(b=2)$$

$$\frac{9}{2}-3=\frac{9}{2}\div3,(b=3)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{1}{2}\right),\left(b=\frac{1}{2}\right)$$

$$(2\sqrt{2}+2)-\sqrt{2}=(2\sqrt{2}+2)\div\sqrt{2},(b=\sqrt{2})$$

……

1.4 单项式的分类(本题适合初中一年级)

试用尽可能多的方法对下列单项式进行分类：

$$3a^3x,bxy,5x^2,-4b^2y,a^3,-b^2x^2,\frac{1}{2}axy^2.$$

【分析与参考答案】

要对一组对象进行分类，关键是要选定一个分类的标准.不同的分类标准对应于不同的分类方法.下面给出四种不同的分类方法，当然这不是本题的所有解答.我们希望读者由此得到启发，给出更多的答案.

(1) 按单项式的次数分，二次式的有：$5x^2$；三次式的有：$bxy,-4b^2y,a^3$；四次式的有：$3a^3x,-b^2x^2,\frac{1}{2}axy^2$；

(2) 按字母 x 的次数分，x 的零次式有：$-4b^2y,a^3$；x 的一次式有：$3a^3x,bxy,\frac{1}{2}axy^2$；$x$ 的二次式有：$5x^2,-b^2x^2$；

（3）按系数的符号分，系数为正的有：$3a^3x$，bxy，$5x^2$，a^3，$\frac{1}{2}axy^2$；系数为负的有：$-4b^2y$，$-b^2x^2$；

（4）按含有字母的个数分，只含有一个字母的有：$5x^2$，a^3；含有两个字母的有：$3a^3x$，$-4b^2y$，$-b^2x^2$；含有三个字母的有：bxy，$\frac{1}{2}axy^2$.

1.5 单项式的异同（本题适合初中一年级）

试比较下列两个单项式的异同：

$12a^2b^2c$；$8a^3xy$.

【分析与参考答案】

（1）两式的相同点有：

①都是单项式；

②都有三个字母；

③系数都是正整数；

④都含有字母 a；

⑤ 最高公因式为 $4a^2$；

⑥ 都是 5 次齐次式，

等等；

（2）它们的不同点有：

①所含的字母不全相同；

②系数不同；

③它们不是同类项；

④尽管都含有字母 a，但字母 a 的次数不同，

等等.

1.6 分数变大了吗（本题适合初中各年级）

将一个分数的分子、分母同时加上一个正数，这个分数变大

了吗？

【分析与参考答案】

先用一组具体的数来做一些试验：

$$\frac{1}{2}\to\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2};$$

$$\frac{3}{5}\to\frac{3+5}{5+5}=\frac{4}{5}>\frac{3}{5};$$

$$\frac{5}{4}\to\frac{5+2}{4+2}=\frac{7}{6}<\frac{5}{4};$$

$$\frac{7}{2}\to\frac{7+3}{2+3}=2<\frac{7}{2};$$

$$-\frac{2}{3}\to-\frac{2+3}{3+3}=-\frac{5}{6}<-\frac{2}{3};$$

$$-\frac{8}{3}\to-\frac{8+2}{3+2}=-2>-\frac{8}{3}.$$

从中我们可以发现：

（1）当这个分数是正的真分数时，分数变大；

（2）当这个分数是正的假分数时，分数变小；

（3）当这个分数是负分数时，结论刚好与上述相反.

以上结论是通过一些具体的数归纳出来的，但是我们不可能把所有数都拿出来一一验证这些结论是否正确.因此，在数学中把这种未经严格证明而只是从一些具体的数中归纳出来的规律，叫做“猜想”.猜想可能是对的，也可能是错的.要肯定上述结论是对的，我们必须用字母表示任意的数，利用代数式来证明它们.

（1）当这个分数是正的真分数时，这个真分数可表示为 $\frac{b}{a}$（a，b 均为正整数，且 $a>b$，下同）.在这个真分数的分子、分母同时加上一个正数 m 后，就变成 $\frac{b+m}{a+m}$.

$$\because \quad \frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+m)-b(a+m)}{(a+m)a}$$

$$=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0,$$

$$\therefore \quad \frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}; \qquad Ⓐ$$

(2) 当这个分数是假分数时，同理可证

$$\frac{b+m}{a+m}<\frac{b}{a}; \qquad Ⓑ$$

(3) 当这个分数是负分数时，在 Ⓐ、Ⓑ 式两边同时乘以 -1,即得：

$$-\frac{b+m}{a+m}<-\frac{b}{a};$$

$$-\frac{a+m}{b+m}>-\frac{a}{b}.$$

通过上述的证明，可知我们的猜想是正确的。

1.7 自然数乘方的个位数（本题适合初中各年级）

(1) 当自然数 n 的个位数分别为 $0,1,2,3,\cdots,9$ 时，n^2、n^3、n^4、n^5 的个位数各是多少？试列表说明；

(2) 从(1)所列的表中你能发现什么规律？

【分析与参考答案】

(1) 当自然数 n 的个位数分别为 $0,1,2,3,\cdots,9$ 时，n^2、n^3、n^4、n^5 的个位数如下表所示：

n 的个位数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 的个位数	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3 的个位数	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
n^4 的个位数	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
n^5 的个位数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(2) 本小题的解答思路因人而异，相信读者即使不看以下解

答，也早已发现了不少规律．以下解答仅供参考，并不是本题的所有解答．

①n^5 的个位数与 n 的个位数相等；

②个位数是 0，1，5，6 的自然数的任何次幂，其个位数不变；

③个位数是 4，9 的自然数的乘方，其个位数交替变化；

④第 2 行的各数以 5 为中心呈对称分布，与 5 对称的数可表示为 $a,(10-a)$，其中 $a=1,2,3,4$，它们的平方差：

$$(10-a)^2-a^2=10(10-2a)$$

为 10 的倍数．所以 a 与 $(10-a)$ 两数平方的个位数相同；

⑤第 4 行不但有第 2 行的规律，并且除 0，5 两数之外，均由 1，6 两数交替分布；

⑥由第 3 行规律，可把自然数分为三类：

第一类是以 0，1，4，5，6，9 为个位数的自然数，它们 3 次方后个位数不变；

第二类是以 2，8 为个位数的自然数，它们 3 次方后个位数刚好对调；

第三类是以 3，7 为个位数的自然数，它们 3 次方后个位数也刚好对调；

⑦任何自然数，乘方后的奇偶性不变；

⑧以 2，8 为个位数的自然数，其乘方的个位数可能是除 0 以外的一个偶数；以 3，7 为个位数的自然数，其乘方的个位数可能是除 5 以外的一个奇数；

⑨第 3 行各数由 0～9 十个数字重新排列而成；

⑩如果我们统计一下表中各数字出现的次数，结果如下表所示：

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现的次数	5	9	3	3	5	5	9	3	3	5

可以发现：凡是除以 5 的余数相同的两个数，在表中出现的次数也相同.

1.8 举反例（本题适合初中各年级）

设 a、b 是有理数，举例说明下列说法是错误的：

(1) $a>-a$；(初一)

(2) 若 $ab>0$，则 $a>0$，$b>0$；(初一)

(3) 若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；(初一)

(4) 若 $a+b>2+2$，$ab>2\times2$，则 $a>2$ 且 $b>2$；(初一)

(5) $|-a|=a$；(初一)

(6) $\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$；(初一)

(7) 若 $a\leqslant b$，则 $a^2\leqslant b^2$；(初一)

(8) $4a^2+9b^2>12ab$；(初一)

(9) $|a+b|=|a|+|b|$；(初一)

(10) $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$；(初二)

(11) 关于 x 的不等式 $ax>b$，其解为 $x>\frac{b}{a}$；(初一)

(12) 关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x>a,\\x\leqslant b,\end{cases}$ 其解为 $a<x\leqslant b$；（初一）

(13) 若 $a>b>0$，则 $\sqrt{a}>\sqrt[3]{b}$；(初二)

(14) 关于 x 的方程 $ax=b$ 的解为 $x=\frac{b}{a}$；(初一)

(15) 若一元二次方程的两个根为 a 和 b，则这个一元二次方程必为 $x^2-(a+b)x+ab=0$；(初二)

(16) 在正比例函数 $y=kx$ 中，y 随着 x 的增大而增大.（初三）

【分析与参考答案】

(1) 当 $a=-1$ 时，$a<-a$ ；

(2) 当 $a=-1,b=-2$ 时，$ab>0$ 但 $a<0,b<0$；

(3) 当 $a=1,b=-1$ 时，$a>b$，但 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

(4) 当 $a=1,b=5$ 时，$a+b>2+2,ab>2\times2$，但 $a<2$；

(5) 当 $a=-3$ 时，$|-a|=-a$；

(6) 当 $a=1,b=2$ 时，$\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$；

(7) 当 $a=-2,b=1$ 时，$a<b$，但 $a^2>b^2$；

(8) 当 $a=3,b=2$ 时，$4a^2+9b^2=12ab$；

(9) 当 $a=1,b=-1$ 时，$|a+b|=0$，但 $|a|+|b|=2$；

(10) 当 $a=1,b=2$ 时，$\sqrt{(a-b)^2}=1$，但 $a-b=-1$；

(11) 当 $a=0,b=1$ 时，不等式 $ax>b$ 无解；

(12) 当 $a=3,b=1$ 时，不等式组$\begin{cases}x>a,\\x\leqslant b\end{cases}$无解；

(13) 当 $a=0.01$，$b=0.001$ 时，$a>b>0$，但 $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=0.1$；

(14) 当 $a=0,b=1$ 时，方程 $ax=b$ 无解；

(15) 方程 $2x^2-2(a+b)x+2ab=0$ 的两个根也是 a 和 b；

(16) 在函数 $y=-2x$ 中，y 随着 x 的增大而缩小．

你还能列出一些不正确的式子或其他的判断，让你的同伴举出反例来加以否定吗？

1.9 单位分数（本题适合初中各年级）

分子为 1 的真分数叫做“单位分数”．我们注意到某些真分数可以写成两个单位分数的和，例如：

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

(1) 把 $\frac{7}{12}$ 写成两个单位分数的和；

（2）研究真分数$\frac{13}{x}$.对某些x的值，它可以写成两个单位分数的和.例如当$x=42$时，

$$\frac{13}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$

你还能找出多少x的值,使得$\frac{13}{x}$可以写成两个单位分数的和？

（3）我们注意到对某些真分数，把它写成两个单位分数之和时，写法有两种.例如：

$$\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$$

你还能找出一些这样的真分数吗？

【分析与参考答案】

解答这道开放题.就像游览著名旅游胜地黄山一样有趣.你不但会感受到一步一景的绚丽风光，而且它对你智力的挑战也就像黄山对你的胆量和体力的挑战一样刺激.以下的分析只是作一个简要的“导游”，聪明的读者大概不会满足于我们所介绍的研究.

（1）设 $$\frac{7}{12}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}. \qquad Ⓐ$$

我们尝试令$A=2$,解得$B=12$.再令$A=3$,解得$B=4$.这样我们就得到了本题的两个解答：

$$\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.$$

还有没有其他解答？如果还有，那么④式中的A, B应是不等于$2,3,4,12$的正整数（否则与以上解答相同）.因此A,B至少等于5(A,B显然不等于1).但是

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}<\frac{7}{12},$$

当把分母换成比 5 大的数时，$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$ 将更小. 所以 $\frac{7}{12}$ 不可能写成其他两个单位分数之和.

通过以上分析，我们可以发现，把真分数 $\frac{q}{p}$ 写成两个单位分数之和时，两个单位分数的分母不可能同时大于 $\frac{2p}{q}$，也不可能同时小于 $\frac{2p}{q}$. 也就是说，两个单位分数的分母必定是一个不大于 $\frac{2p}{q}$，另一个不小于 $\frac{2p}{q}$. 因此将 $\frac{q}{p}$ 写成两个单位分数的和时，我们最多只须进行 $n-1$ 次试验，这里的 n 是 $\frac{2p}{q}$ 的整数部分. 例如对于真分数 $\frac{3}{7}$,由 $\frac{2\times 7}{3}=4\frac{2}{3}$ 知 $n=4$，因此我们最多只须进行 3 次试验即可获得结果：在方程

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$$

中分别令 $A=2,3,4$,解出 B 即可. 如果解出的 B 是正整数，那么我们就找到了一个解. 事实上，解出的 B 分别为 $-1,\frac{21}{2},\frac{28}{5}$,都不是正整数. 这说明 $\frac{3}{7}$ 不可能写成两个单位分数的和；

(2) 注意到 $13=6+7,6\times 7=42$. 一般地，要使

$$\frac{13}{x}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{A+B}{AB},$$

只须 $13=A+B$, $x=AB$ 即可. 例如把 13 分拆为 $13=2+11$,由 $2\times 11=22$,得

$$\frac{13}{22}=\frac{1}{2}+\frac{1}{11}.$$

考虑 13 的其他可能的分拆方法，我们还可以得到以下一组解答：

$$\frac{13}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10},$$

$$\frac{13}{36}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9},$$

$$\frac{13}{40}=\frac{1}{5}+\frac{1}{8},$$

$$\frac{13}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}.$$

这些是不是所有的解答呢？

$$\frac{13}{44}=\frac{1}{4}+\frac{1}{22}$$

亲爱的读者，你还能写出其他的答案吗？

（3）如果随便写一个真分数来试验，你的运气可能没有这么好，因为不是所有的真分数都可以写成两个单位分数的和（如上述的$\frac{3}{7}$），能用两种方法写成两个单位分数的和的真分数就更少了.

实际上，我们只要找到满足等式

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{C}+\frac{1}{D} \qquad Ⓑ$$

的四个互不相等的正整数 A，B，C，D，也就找到满足条件的真分数.让我们再来做一次试验：如果令 $A=2$，$B=3$，$C=4$，代入Ⓑ式解得$\frac{1}{D}=\frac{7}{12}$.这不是一个单位分数——这一次我们的运气不怎么好，试验失败！

“山穷水复疑无路，柳暗花明又一村”.如果你每次失败后就不假思索地“原路返回”，那么你永远也体会不到这两句诗的意境.因此，面对失败千万不要轻易放弃！

我们得到了什么——

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}; \qquad Ⓒ$$

我们希望得到什么——形如Ⓑ式的等式.