

上海市教科研规划项目  
——培养智优学生运用数学方法研究成果

# 初中数学竞赛辅导与练习

——初中数学方法 120 讲

主编 乔一鹏

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书依据上海市二期课改新教材教学进度编撰。教材介绍了初中八、九两个年级学生参加数学竞赛需要了解、掌握的基本数学思想方法的应用内容。根据最近发展区理论,以学生“跳一跳能摘到”为原则,让学生能做到乐学、勤学、会学,在时间安排上每一学期 20 个讲座,每周二讲(至初三第一学期结束共计 120 讲)。每二讲教师辅导 40 分钟,学生练习 20 分钟,也可以作为初中八、九年级学生自学、提高、选用拓展探究型校本教材。

自主创新  
与时俱进  
争先创优  
提升素质

陈肖南

2006.6

注：陈肖南同志现任南汇区教育局党委书记

# 初中数学竞赛辅导与练习

——初中数学方法 120 讲

## 编 委 会

主任:唐建龙

委员:唐良亮 胡才龙 赵惠红 乔一鹏

主编:乔一鹏

编委:曹德余 邬虹萍 石景伟 王庆英 刘琳 王慧  
邵纯刚 严勇 吴德 吴慧芬 顾马燕 印卫林  
汪扬 倪立国 吴国兴 潘春美 陈秀红 许国华  
李立军 齐玉环 何集刚 纪良骥 周亚华 罗向军  
王建兵 朱光明 周水琴 蒋怡 庄玉芳 沈惠华  
朱光明 郁菊明 乔辉杰 王剑峰 乔一鹏

《在初中拓展型课程中培养智优学生  
运用数学方法的实践研究》

核心学校校长、老师名单

南汇一中 唐建龙 唐良亮 胡才龙 乔一鹏 吴 德 邵纯刚  
刘 琳 王 慧 顾马燕 邱佩华 吴慧芳 严跃琴  
陈 丽 石景伟  
南汇二中 严颂华 张立群 陈秀红 潘 春 黄 丹 潘 敏  
闵建军 孙为菁  
南汇三中 张卫星 李红娟 朱光明  
南汇实验学校 李建黎 许国华 徐 鸣  
南汇八一中学 付国庆 胡卫东 汪 扬 沈惠华 樊丽华 汪 明  
李 鑫  
南汇澧溪中学 诸振帮 王秀华 姚久龙  
南汇吴迅中学 许君玮 刘 船  
南汇光明学校 刘玉华 施海华 倪立国 秦志军 徐 英 王天铭  
沈李金 徐惠娣  
南汇黄路中学 王顺昌 吴国兴 穆宇迪 靳 昕 倪关根  
南汇老港中学 严福明 潘春美 宋先利 朱东庆 王 哲  
南汇万祥中学 张富贵 邬梅芳 严 勇 曹德余  
南汇石笋中学 杜 毅 唐玉明 陈治明 周跃杰 邬虹萍 胡 艳  
熊 燕  
南汇下沙中学 王亚龙 周燕华  
南汇泥城中学 朱连生 瞿正标 朱 军  
南汇横沔中学 顾殿渊 朱文英  
复旦附中康桥学校 乐秀峻 王雪红 王庆英 王 敏 王咏梅  
王剑峰 盛华英

尚德实验学校 姜晓勇 张 财 邱卫林 经 敏 张彩明 李秀杰  
南汇三墩学校 金育宏 吴 善  
金山区罗星中学 蔡振辉 金 敏 周亚华 胡大军 李长生  
金山区蒙山中学 周纪平 夏玉芳 罗向军 张旭英  
金山区山阳中学 周国均 乔辉杰 袁 卫  
金山区金盟中学 薛德林 汪琴红 张 力 沈其英 周洪林  
浦东新区浦东中学(初中部) 何集刚 纪良骥 张 辉 刘柏龄  
葛春玲  
浦东新区华林中学 何集刚 瞿 斌 王德庆  
浦东新区五三中学 付天良 施 刚 徐勇彪 陆晓君 邱海兵  
浦东新区由由中学 段圣宏  
闵行区第二中学 余安敏 朱 红 李立军 杨珍娥 雷连胜  
闵行区文绮中学 郑荣玉 齐玉环 吴欢华 朱秀娟 金卫平  
陆秉斌 李菊芬 王 嫣 卢贤权  
闵行区文来中学 周启明 蒋 怡 时 俊  
闵行区莘松中学 郭正江 郑 萍 李莉敏  
奉贤区奉城二中 王玉梅 郁菊明 卫 锋 范晓东  
崇明县城桥东门中学 王永飞 王建兵  
崇明县登赢中学 施 娟  
崇明县青少年科技指导中心 刘建平  
金山县青少年科技指导中心 周文秀  
南汇县青少年科技指导中心 周水琴  
《上海中学生》报理科世界编辑 庄玉芳

# 序 一

一鹏要我作序,我很高兴.我想把和他的一段交往写出来,其中多与数学教学相关,这或许能为他数学教学和研究的历程勾画出一个轮廓,为这本书提供一个写作的背景。

我认识一鹏是在 1963 年,他在南汇县中初二(3)班求学,我曾兼任了该班一段时间的数学课。一鹏留给我的印象是个子不高,人很精神,上课全神贯注,两只炯炯有神的大眼睛总爱看着老师。以后我教了其他班级,没有再和他接触。直到 20 世纪 80 年代,一鹏和我又是在南汇县中见面,这次看到他时,人高了很多,在县中数学教研组,他成了我的同事。他告诉我,从学校高中毕业后,1968 年到乡下劳动,1971 年到师院数学系培训,被分配在农村中学教书。

一鹏对教学十分关注,他教的班级不仅数学成绩普遍较好,而且有好几位学生在上海市数学竞赛中得奖。他不时还在报刊上发表文章,其中《略论知识点覆盖、运用与能力的培养》获上海市数学教育论文评选二等奖(1988 年)。这些文章源于数学教学实践,又能在数学教学实践中应用,很合学生的“胃口”。一鹏善于对学生因材施教,有一次友人托我对其女儿辅导数学学习,我因为正在教高三抽不出时间,就托一鹏代劳,经他 3 次指点,友人之女竟然在高中入学考试中取得了意想不到的好成绩。

以后 10 年,一鹏离开学校,担任南汇招待所副所长兼南园宾馆的副总经理,这段经历不仅没有使他丢开数学,反倒给了他新的启发。在工作中他发现好多事用到了他在数学中学会的思想方法,在解决企业经济核算、人事安排、经营管理等各项事务中,无不隐含着数学思想方法的应用。在业余时间,他仍坚持写一些数学教学的经验和学习数学

的心得。这 10 年，一鹏成为一位成功的企业人士，除了其他条件，不能说数学没有起作用。

20 世纪末一鹏回到了学校，此时我已在教师进修学校工作多年，有更多的机会和他交流数学教学的心得。一鹏在南汇一中（原听潮中学）除履行副校长的职责外，还坚持带班上课，我也曾邀他在南汇数学会举办的数学业余学校兼课，他所写的《以数学为载体让学生会思想》被中央教育科学研究所全国教育理论研究成果评审委员会评为一等奖（2004 年）。他所带教的几批学生在数学竞赛中也屡屡获奖。2005 学年所带教的南汇一中初中数学思想方法探究班有 66 人次获得各类竞赛的奖项，其中龚顺同学在有 16 000 多名学生参加的上海市数学应用知识竞赛中获初中组一等奖（全市第五名），这一成绩是南汇区（县）历次参加上海市中学生数学竞赛的最好成绩。

一鹏编写的《初中数学方法 80 讲》、《初中数学方法 120 讲》是他多年来数学教学和研究的结晶，其内容源于数学教学和数学竞赛，也受到上海市课程教学改革的启发，涉及初一到初三 4 个年级的现行课本，突出了多种数学思想方法的应用。在写作形式上，有的是师生自编的教材，有的是师生发表的有关文章，涉及浦东、南汇、闵行、金山崇明、奉贤 6 个区 100 多位教师学生在上海市教科研规划项目《在拓展型课程中培养智优学生运用数学方法实践研究》的课例研究文章成果。该书在培养学生数学精神、帮助学生学习数学思想方法、提高学生数学学习能力等方面做了有益和有效的探索和实践。作为同行，愿该书在南汇第一中学、项目核心学校实践使用中能促进实现“德能兼备、和谐发展”，成为学校校本教材的范例；愿该书经过实践研究检验后，让更多教师增加知识储备，让更多学生受益。

韦爱民

注：韦爱民同志为中学数学高级教师，退休前曾任南汇县教育局、南汇县教师进修学校教研室主任，南汇教师进修学校党总支书记兼校长

## 序 二

### 开启思维与启迪智慧的基石

35 年以前,我从初中进入了高中阶段的学习。高中毕业后,我到农村生产大队担任了 3 年的团支部书记。1977 年的寒冬,我从热火朝天的开挖大治河工地来到了惠南镇的考场,参加了“文革”后恢复高考的第一次考试。两个多月后,我接到了本科院校的入学录取通知书,非常幸运地成为恢复高考的第一届大学生。大学毕业后,我被分配到北京中央机关工作了几年,之后又调到现在的学校担任教学与行政管理工作至今。

像我这样年龄段的人,中小学的学习阶段都是在“史无前例”的特殊年代里完成的,而且当时初中与高中学制都是 2 年。不难想像,我们所学的文化基础知识是比较肤浅的,基础是不扎实的。但令我感到比较例外而且比较欣慰的是,我的高中数学课程的学习得益较大,从中学到的思维的能力和思考的方法,为我思维的开启与智慧的启迪打下了比较扎实的基础。

担任我班整个 2 年高中阶段数学课程的教师是乔一鹏老师,他还担任了我班高中阶段的班主任。

乔老师给我们印象深刻的是,他非常注重“授之以鱼,不如授之以渔”的教学方法,即注重学生的数学方法的掌握,数学思想的形成。在教学中他敏锐地捕捉课堂重点和学生们的兴趣点,培养我们的质疑、求实和创造性思考的意志品质,训练提高判断的合理性、推理的严密性与过程的逻辑性等能力;乔老师教学的一个最显著和最主要的特点,就是强调数学知识与生产实践的紧密结合。记得我们在学习几何的时候,乔老师就让我们到农村生产一线去发现问题,提出解决问题的办法。例如生产队储存化肥的氨水池相关尺度是否科学,生产队的仓库屋顶

结构是否合理,拖拉机耕地时的线路如何设计和省油等等。通过这些学以致用的活动,不断明确我们学习目的,提高我们的学习兴趣,激发我们的数学思维。

回想起高中毕业后几年的工作中,尽管某个数学公式或某道题目的解法记不得了,但学到的那一种思维能力和思考方法随时帮助我比较有效地工作与生活。由于在高中数学学习中的一些得益,我顺利通过了高考,而且大学阶段高等数学这一科目的考试成绩一直是高分或满分。

我感悟到,学习数学主要是领会数学思维方法和数学思想,培养自己独立思考的能力与创造能力,并能灵活地应用于实践之中,取得实效和成果。我的这些感悟主要启蒙于乔老师的教诲。高中毕业后的 30 多年的学习和工作中,也是这样努力去做的。

注:金永兴同志为上海海事大学副校长,教授,博士生导师

## 序 三

### 数学,使我更多了一份自信

乔一鹏老师的《初中数学方法 80 讲》已第三次印刷,《初中数学方法 120 讲》也将付梓,并邀我这个当年的学生作序,我觉得很高兴。在此首先祝贺乔老师多年的心血有了丰硕的成果。

认识乔老师整整 25 年了。1981 年我进入南汇黄路中学读初一,数学老师即是乔老师。记得他高高的个子,头发微卷,鼻子坚挺,嗓音洪亮,活力充沛。上起课来很有激情,使我这个原来更爱语文的人也对数学产生了浓厚的兴趣。入学不久他就成立了数学兴趣小组,我也是组员之一。有一个同学叫顾炜的数学特别好,我常向他请教。

在数学兴趣小组中,我知道了韦达定理的应用,学会了统筹方法的初步应用。原来解开一道数学难题是一件那么充满愉快的事,能在生活中用点统筹法,更能起到节省时间,“一心二用”的效果。

1983 年 12 月 25 日,圣诞节,我和顾炜等几个同学参加了南汇县 15 校语数联赛,双双获得二等奖。1984 年初中毕业时,他是市三好学生,我是县三好学生,双双考进上海交大附中。这些成绩的取得,首先凝聚了乔老师最多的心血。

工作了,成家了,时间在流逝,乔老师的音容笑貌却一直在我脑海浮现,他所教的数学方法,也让我有意识地应用在工作中,我曾任设备管理、销售经理、人力资源经理等反差很大的职务,因为有初中阶段扎实的数学功底,我总觉得自己更多一份自信。

蜡炬成灰泪始干。想当年,血气方刚、年轻英俊的乔老师,曾慷慨激昂地指挥全班同学高唱《霍元甲》之《万里长城永不倒》,曾在双杠上腾挪翻飞,教育我们“身体是革命的本钱”。今天,我们也到了他当时的年纪,他却两鬓斑白,为教育事业,为数学方法应用奉献了青春热血。

所幸我看到的乔老师,还是那么笑语爽朗,活力充沛。

这次又欣闻乔老师辅导的学生龚顺在有 16 000 多名学生参加的上海市数学应用知识竞赛中获初中组一等奖(全市第 5 名),创南汇历史纪录,我更加高兴。花也好树也好,能够茁壮成长,根深叶茂,全靠园丁的辛勤浇灌。如今桃李满天下,当年的花朵树苗,都会由衷感谢园丁的无私奉献。

愿《初中数学方法 80 讲》、《初中数学方法 120 讲》两书的出版,能使更多的学生爱数学,爱应用,爱创新,爱突破,早日成为国家的有用之材。

注:奚新春同志现任上海冠生园集团党政办公室主任、人事部经理

## 目 录

第 1 讲	分类讨论方法的应用 .....	1
第 2 讲	化归方法的应用(1) .....	4
第 3 讲	化归方法的应用(2) .....	7
第 4 讲	化归方法的应用(3) .....	10
第 5 讲	化归方法的应用(4) .....	13
第 6 讲	方程与非方程思想应用(1) .....	16
第 7 讲	方程与非方程思想应用(2) .....	20
第 8 讲	最优化方法的应用 .....	24
第 9 讲	数形结合方法的应用(1) .....	29
第 10 讲	数形结合方法的应用(2) .....	34
第 11 讲	数形结合方法的应用(3) .....	39
第 12 讲	数形结合方法的应用(4) .....	49
第 13 讲	变式与归类方法的应用(1) .....	54
第 14 讲	最优化思想的应用 .....	59
第 15 讲	最大值最小值的求法 .....	63
第 16 讲	巧解几何计算题 .....	66
第 17 讲	观察、分析、综合与归纳 .....	72
第 18 讲	代数变换方法的应用 .....	76
第 19 讲	化归思想的应用 .....	81
第 20 讲	数字型应用题的巧解 .....	86
第 21 讲	浅析因式分解方法 .....	91
第 22 讲	拆拼图形的应用 .....	95
第 23 讲	平移翻折旋转方法应用 .....	98

第 24 讲	字母表示数方法的应用 .....	101
第 25 讲	末位数问题研究法 .....	105
第 26 讲	对应方法的应用(1) .....	108
第 27 讲	对应方法的应用(2) .....	113
第 28 讲	构造全等三角形方法的应用 .....	117
第 29 讲	辅助线的妙用(1) .....	122
第 30 讲	变式与归类方法的应用(2) .....	126
第 31 讲	图形运动的应用 .....	132
第 32 讲	分母有理化与分子有理化方法的应用 .....	136
第 33 讲	分子有理化应用举例 .....	139
第 34 讲	互为有理化因式及其性质运用 .....	141
第 35 讲	分母有理化 .....	144
第 36 讲	根式化简中的技巧 .....	147
第 37 讲	根式运算与分数指数 .....	150
第 38 讲	猜想,让数学更具魅力 .....	152
第 39 讲	巧用换元法解题 .....	157
第 40 讲	参数法应用举例 .....	161
第 41 讲	作图与解题 .....	164
第 42 讲	平几论证的思维方法与格式书写 .....	166
第 43 讲	三角形、梯形中位线的辅助线添加法初探 .....	169
第 44 讲	函数思想应用 .....	172
第 45 讲	换元法的妙用 .....	176
第 46 讲	换元与转化 .....	179
第 47 讲	二元一次不定方程解法的探索 .....	181
第 48 讲	多元不定方程的初等解法 .....	189
第 49 讲	化归思想的应用 .....	192
第 50 讲	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ 型多项式的 因式分解 .....	195
第 51 讲	夹逼法及其运用 .....	198
第 52 讲	完全平方数的作用 .....	201

第 53 讲	用平方数性质解数学题 .....	204
第 54 讲	如何抓住不定数量中的定值 .....	206
第 55 讲	重视“1”在解题中的转化作用 .....	208
第 56 讲	注意隐含条件,重视性质转化 .....	210
第 57 讲	重视 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 中 $A \neq 0$ 的分析 .....	214
第 58 讲	浅议因式分解法 .....	216
第 59 讲	谈换元法在解方程中的两种运用 .....	219
第 60 讲	用换元分解法解特殊方程 .....	221
第 61 讲	整理组合在数学解题中的作用 .....	223
第 62 讲	配方法及其应用(1) .....	226
第 63 讲	配方法及其应用(2) .....	229
第 64 讲	一元二次方程根的判别式定理及运用 .....	232
第 65 讲	韦达定理及其运用 .....	235
第 66 讲	求代数式值的解题方法 .....	239
第 67 讲	浅析分解因式的若干作用 .....	243
第 68 讲	从一道题看二次函数解析式的求法 .....	246
第 69 讲	勾股数与勾股定理 .....	249
第 70 讲	勾股定理的应用(1) .....	254
第 71 讲	勾股定理的应用(2) .....	257
第 72 讲	用坐标法解几何题 .....	262
第 73 讲	辅助线的妙用 .....	264
第 74 讲	中点、中线、中位线(1) .....	266
第 75 讲	中点、中线、中位线(2) .....	271
第 76 讲	几何解题的代换法 .....	275
第 77 讲	用代数法解几何题(1) .....	278
第 78 讲	用代数法解几何题(2) .....	281
第 79 讲	待定系数法应用浅析(1) .....	284
第 80 讲	待定系数法应用浅析(2) .....	288
第 81 讲	方程与非方程思想应用举例 .....	293
第 82 讲	最优化思想初探 .....	297

第 83 讲	在一直线上的成比例线段的证明法 .....	302
第 84 讲	一道检验思维方法与综合能力的压轴题 .....	305
第 85 讲	从 $15^\circ$ 角的特殊性说起 .....	309
第 86 讲	成比例线段与对应关系 .....	312
第 87 讲	重视特殊条件的分析、转化 .....	315
第 88 讲	边角转化的纽带 .....	319
第 89 讲	运用三角方法解几何题 .....	321
第 90 讲	圆内接四边形和四点共圆(1) .....	324
第 91 讲	圆内接四边形和四点共圆(2) .....	328
第 92 讲	重心、内心、外心和垂心 .....	333
第 93 讲	端点在一一直线上的成比例线段证明法 .....	339
第 94 讲	“三点共直线”的几何证法(1) .....	342
第 95 讲	“三点共直线”的几何证法(2) .....	347
第 96 讲	乘法原理的应用 .....	352
第 97 讲	模糊方法的应用 .....	356
第 98 讲	对应方法的应用(1) .....	359
第 99 讲	对应方法的应用(2) .....	362
第 100 讲	对应方法的应用(3) .....	368
第 101 讲	对应方法的应用(4) .....	373
第 102 讲	化归思想与建模方法 .....	378
第 103 讲	化归思想的应用举例 .....	383
第 104 讲	数学问题与应对策略 .....	391
第 105 讲	数学方法与奇思妙想 .....	402
第 106 讲	数学思维与诗情画意 .....	413
第 107 讲	破解诗歌中的数学 .....	418
第 108 讲	变式训练与思维创新(1) .....	423
第 109 讲	代数变换方法的应用 .....	431
第 110 讲	几何变换方法的应用(1) .....	441
第 111 讲	几何变换方法的应用(2) .....	449
第 112 讲	几何变换方法的应用(3) .....	456

第 113 讲	旋转变换的应用 .....	463
第 114 讲	猜想—探索—证明方法的应用 .....	469
第 115 讲	数学建模方法的应用(1) .....	477
第 116 讲	数形结合方法的应用 .....	490
第 117 讲	分类讨论方法的应用 .....	499
第 118 讲	变式训练与思维创新(2) .....	504
第 119 讲	数学建模方法的应用(2) .....	510
第 120 讲	数学建模方法的应用(3) .....	520
编后记	.....	524