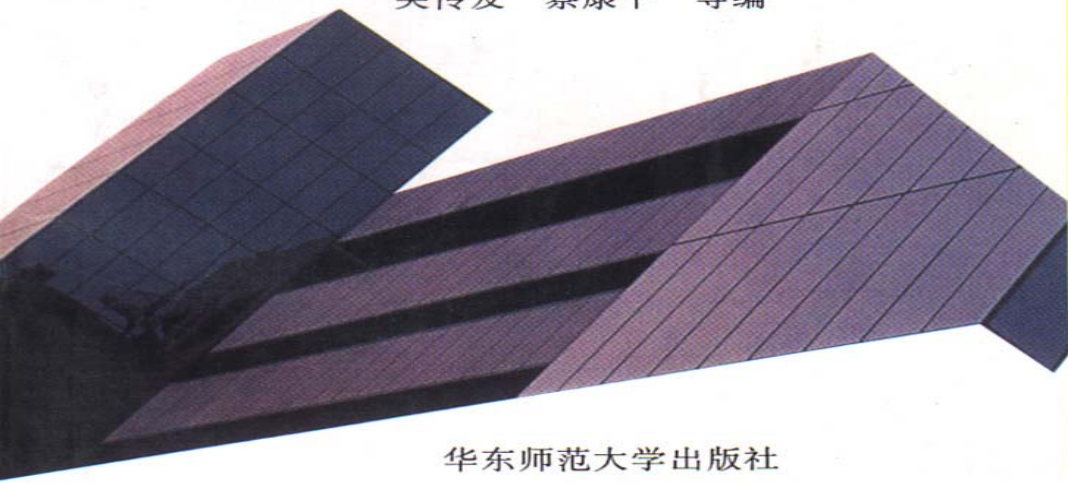


# 初中 数学

## 解题途径

吴传发 蔡康平 等编



华东师范大学出版社

责任编辑 程丽明

封面设计 黄惠敏

初中数学解题途径

吴传发 蔡康平 等编

华东师范大学出版社出版发行

(上海中山北路 3663 号 邮政编码 200062)

新华书店上海发行所经销

华东师范大学印刷厂印刷

开本  $787 \times 1092$  1/32 印张 11.75 字数 260 千字

1997 年 9 月第 1 版 1998 年 3 月第 2 次印刷

印数 11, 001-33, 000

ISBN7-5617-1701-6 · /G · 767

定价 10.00 元

## 前言

有的学生解数学题很有兴趣，越解越有劲；有的学生解数学题觉得苦恼，见题却步。前者是由于找到了解题的窍门，养成了善于思维的习惯；后者则还没有找到解题的方法，甚至还没有开窍。《初中数学解题途径》就是由浅入深地提出初中数学中各种层次的问题，探讨解决这些问题的途径，将有效地帮助你尽快地找到解题的方法，养成良好的思维习惯，从而享受到解题的乐趣。

本书的编写是以现行的教学大纲和教材为主要依据，兼顾中考的要求，体现由应试教育向素质教育转轨的精神。书中共有十六章，最后还编写了“初中数学综合练习”及“习题答案与提示”，都是初中数学的基本内容。在每一章里，我们介绍了这章所涉及的基本问题，指出重点、难点和关键所在，指出解决这些问题的思路和具体解决方法，使你既容易入门，又可作深入探究；既能加强基础，又能发展智力和

能力. 我们企盼你在学习本书内容时, 先自己动手解决书中所提出的问题(包括例题), 然后再看解答, 最后再比较自己的解法与书中的解法有什么不同? 判别一下哪一种方法较好? 我们希望你能开动脑筋, 想出比书中更好的方法.

本书适合初中各年级学生使用, 可作为课外阅读或选修教材, 也可供教师和家长辅导参考.

本书第一、三、四、五、十三、十六章由王剑青执笔, 第二、八、十、十五由蔡康平执笔, 第六、七、九章由吴传发执笔, 第十一章由夏益辉执笔, 第十二章及“初中数学综合练习”由宋耀生执笔, 第十四章由徐惠芳执笔.

限于水平, 书中难免会有缺点和错误, 我们恳切希望读者提出宝贵意见.

编者

1996年6月

## 目录

第一章 整式	7
第二章 因式分解	29
第三章 分式	54
第四章 根式	79
第五章 方程	103
第六章 列方程解应用题	125
第七章 判别式与韦达定理	147
第八章 函数及其图象	174
第九章 不等式	218
第十章 统计初步	238
第十一章 解直角三角形	265
第十二章 三角形	299
第十三章 四边形	325
第十四章 相似形	351
第十五章 圆	380
第十六章 面积	431
初中数学综合练习	459

习题答案与提示 ..... 476

# 第一章 整式

数学中常用字母表示数. 例如, 用“ $a+b$ ”表示现实世界的一种数量关系-两数的和, 这里  $a$ 、 $b$  可以表示某个人语文、数学的成绩, 也可以表示我国一年中工业、农业的产值等, 小到个人, 大至国家, 无所不包, 因此并不抽象.

用运算符号把数或字母连接起来的式子叫代数式. 只含有加、减、乘、除、乘方运算的代数式叫做有理式. 整式是没有除法运算或者虽有除法运算而除式中不含字母的有理式.

整式的分类如下:

$$\text{整式} \begin{cases} \text{单项式} & (\text{如: } 5, 3ab^2) \\ \text{多项式} & (\text{如: } a+b, a^2-2ab+b^2). \end{cases}$$

用数值代替代数式里字母, 计算后所得的结果, 叫做代数式的值.

## 一 列代数式

例 1  $a$  是有理数, 用代数式表示:

(1)  $a$  的相反数; (2)  $a$  的绝对值.

解: (1)  $a$  的相反数是  $-a$ .

(2)  $a$  的绝对值可以表示为  $|a|$ ,

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

说明: (1) 因为  $a$  是有理数, 它可能是正数、零和负数, 若  $a$  是正数, 则它的相反数  $-a$  是负数; 若  $a$  是负数, 则它的相反数  $-$  是正数; 若  $a$  是零, 则它的相反数  $-$  仍是零, 所以要注意:  $-$  不一定是负数.

(2) 若  $a$  是正数, 则  $|a|$  是  $a$  本身; 若  $a$  是负数, 则  $|a|$  是  $a$  的相反数  $-a$ , 此时  $-a$  是正数; 若  $a$  是零, 则  $|a|$  仍是零.

例 2 用代数式表示:

- (1)  $a$ 、 $b$  两数和的立方;
- (2)  $a$  的两倍减  $b$  的  $3/4$  的差;
- (3)  $a$  减  $b$  的差与  $b$  加  $b$  的积;
- (4)  $a$ 、 $b$  两数的立方和.

解: (1)  $(a+b)^3$ .      (2)  $2a - 3/4b$ .

(3)  $(a-b)(a+b)$ .      (4)  $a^3 + b^3$ .

例 3 用代数式表示:

- (1) 三个连续奇数的平方和;

(2)五个连续偶数的积.

解: (1) 设  $n$  是整数, 则  $2n$  一定是偶数, 三个连续奇数可以表示成:  $2n-1$ 、 $2n+1$ 、 $2n+3$ , 则

$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2$  为三个连续奇数的平方和.

(2)  $2n$  为偶数( $n$  为整数), 则

$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)(2n+8)$  表示五个连续偶数的积.

说明: 本例的两小题也可有其它不同表示, 如:

$$(1) (2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2;$$

$$(2) (2n-4)(2n-2)2n(2n+2)(2n+4).$$

例 4 铁丝长  $a$  米, 第一次用去它的一半少一米, 第二次用去它的剩下部分的  $\frac{1}{3}$  还多 2 米, 问还剩下多少米?

解: 第一次用掉  $(a/2-1)$  米铁丝, 第二次用掉

$$\left[ \frac{a - \left( \frac{a}{2} - 1 \right)}{3} + 2 \right] \text{ 米铁丝, 则铁丝还剩下}$$

$$a - \left\{ \left( \frac{a}{2} - 1 \right) + \left[ \frac{a - \left( \frac{a}{2} - 1 \right)}{3} + 2 \right] \right\} \text{ 米.}$$

例 5 如图 1-1 所示, (1) 中正方形内有四个大小相等的三角形; (2) 中长方形内有两个扇形, 用代数

式表示阴影部分的面积.

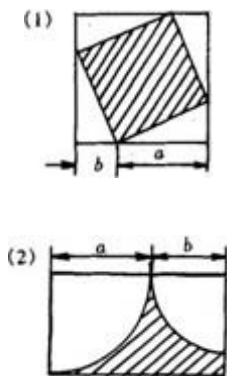


图 1-1

解: (1)由图 1-1(1)可知, 阴影部分的面积  $S$  是边长为  $(a+b)$  的正方形面积减去四个直角边都是  $a$  和  $b$  的直角三角形的面积而得到的, 所以

$$S_{\text{阴影}} = (a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = (a+b)^2 - 2ab.$$

(2)由图 1-1(2)可知, 阴影部分的面积是长方形的面积减去两个扇形面积的差, 长方形的长是  $(a+b)$ 、宽是  $a$ , 两个扇形分别是  $1/4$  个半径为  $a$  和  $b$  的圆, 所以

$$S_{\text{阴影}} = (a+b)a - \left( \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} \right).$$

## 二 合并同类项

同类项是指多项式中所含的字母相同、相同字母的指数也相同的项，例如， $a^3b^2$  与  $2a^3b^2$  是同类项， $1/4xy^2$  与  $2xy^2$  也是同类项。

例 6  $m$ 、 $n$  是什么数时，单项式  $5a^m x^3 y$  与  $1/2a^2 x^n y$  是同类项？

解：根据同类项的意义可知，当  $m=2$  且  $n=3$  时，单项式  $5a^m x^3 y$  与  $1/2a^2 x^n y$  是同类项。

那么同类项能否合并呢？

显然是可以的，例如， $5a^2 x^3 y + 1/2a^2 x^3 y = 11/2a^2 x^3 y$ ，这里是把  $a^2 x^3 y$  作为某种同类单位进行数量相加、减。

一般说来，合并同类项的方法是：将系数相加、减，且保持字母和它们的指数不变。

如： $ax+bx+cx=(a+b+c)x$ 。

例 7 合并下列各式中的同类项：

$$(1) 3x^2+5x-1/3x^2-9/2x+0.5-1/2x ;$$

$$(2) -2/3ab^3+3a^3b-1/2a^3b-ab^3-1/2a^3b-3/2a^3b ;$$

$$(3) -(p+q)^2-(p+q)^2-(p+q)^2 ;$$

$$(4) -1/5(x-1)^2+1/2(x-1)^2-3/10(x-1)^2+1/4(x-1)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 原式} &= \left(3 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(5 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)x + 0.5 \\ &= \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \left(-\frac{2}{3} - 1\right)ab^3 + \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)a^3b$$

$$(3) \text{ 原式} = [(-1) + (-1) + (-1)](p+q)^2 = -3(p+q)^2.$$

$$(4) \text{ 原式} = \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4}\right)(x-1)^2 = \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

### 三 含绝对值符号的整式化简

例 8 化简:

$$(1) |1 - \sqrt{3}|;$$

$$(2) |1-a| + |2a+1| (a < -2);$$

$$(3) ||x-1| + 1|;$$

$$(4) |a-3| + |a+1|.$$

$$\text{解: (1) } \because 1 - \sqrt{3} < 0,$$

$$\therefore |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1.$$

$$(2) \because a < -2,$$

$$\therefore |1-a| = 1-a, |2a+1| = -(2a+1),$$

$$\text{原式} = 1-a - (2a+1) = 1-a-2a-1 = -3a.$$

$$(3) \because |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x > 1), \\ x-1 & (x = 1), \\ 1-x & (x < 1), \end{cases}$$

$$\therefore \text{原式} = |x-1| + 1 = \begin{cases} x & (x > 1), \\ 1 & (x = 1), \\ 2-x & (x < 1). \end{cases}$$

(4)由  $a-3=0$ , 得  $a=3$ ; 由  $a+1=0$ , 得  $a=-1$ 。这样, 如图 1-2 所示, 实数轴可分为三个区间:

当  $a < -1$  时, 原式  $= 3-a - (a+1) = -2a+2$ ;

当  $-1 < a < 3$  时, 原式  $= 3 - a + (a + 1) = 4$  ;

当  $a > 3$  时, 原式  $= a - 3 + (a + 1) = 2a - 2$ .



图 1-2

说明: 因为  $|a-3|$  中的  $(a-3)$  与  $|a+1|$  中的  $(a+1)$  正负不明, 所以先找出分别使它们为零的  $a=3$  与  $a=-1$ ,  $-1$  与  $3$  把数轴分为三个区间, 再按从小到大的顺序, 在每个区间内将原式化简. 以上的方法叫“零点分段讨论法”.

例 9 设  $|x+1| + (y-2)^2 = 0$ , 求代数式  $4xy^2 - 5x^2y - \frac{1}{2}xy - \frac{9}{2}xy^2 + \frac{3}{4}xy + 1$  的值.

解:  $|x+1| + (y-2)^2 = 0$ ,  
 $|x+1| = 0$ , 且  $(y-2)^2 = 0$ ,  
 $x = -1$ , 且  $y = 2$ .

原代数式  $= -1/2xy^2 - 5x^2y + 1/4xy + 1$ ,

当  $x = -1$ , 且  $y = 2$  时,

原式的值  $= -1/2 \times (-1) \times 2^2 - 5 \times (-1)^2 \times 2 + 1/4 \times (-1) \times 2 + 1 = 2 - 10 - 1/2 + 1 = -15/2$

#### 四 整式的加减法

整式相加、减的结果仍是整式. 整式相加、减就是同类项合并的运算, 此外, 如果有括号还要去括号. 一般说来, 整式加、减时, 先将它们按某一字母的降幂(或升幂)顺序排列, 再去括号, 后进行同类项合并.

例 10 计算:

$$(1) \left( \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2y - \frac{3}{2}y^3 - 4xy^2 - x^2y \right) - (2y^3 + 4xy^2 - 3x^3);$$

$$(2) 3a^n + 5a^{n+1} - 7a^n + 2a^{n+1};$$

$$(3) 3(a+b)^2 - \left[ \frac{1}{2}(a+b)^2 + 4(a+b) \right] - (a+b);$$

$$(4) 5ab^2 - \{2a^2b - [3ab^2 - (4ab^2 - 2a^2b)]\}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 原式} &= \left( \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2y - 4xy^2 - \frac{3}{2}y^3 \right) - (-3x^3 + 4xy^2 + 2y^3) \\ &= \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2y - 4xy^2 - \frac{3}{2}y^3 + 3x^3 \\ &\quad - 4xy^2 - 2y^3 \\ &= \frac{9}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2y - 8xy^2 - \frac{7}{2}y^3. \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} = (5+2)a^{n+1} + (3-7)a^n = 7a^{n+1} - 4a^n.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= 3(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2 - 4(a+b) - (a+b) \\ &= \frac{5}{2}(a+b)^2 - 5(a+b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{原式} &= 5ab^2 - \{2a^2b - [3ab^2 - 4ab^2 + 2a^2b]\} \\ &= 5ab^2 - \{2a^2b + ab^2 - 2a^2b\} \\ &= 5ab^2 - ab^2 \end{aligned}$$

$$= 4ab^2.$$

说明:  $a^n$  和  $a^{n+1}(a+b)^2$  和  $(a+b)$  都不是同类项, 不

能合并. 有多重括号时, 可由内到外边去括号边合并同类项.

例 11 (1)化简  $2a - \{7b + [4a - 7b - (2a - 4b - c)] + 3a\}$ , 并求当  $a = -3/7$ ,  $b = 0.4$ ,  $c = -1$  时此式的值.

(2)已知整式

$$\left\{ ab - \left[ 3a^2b - \left( 4ab^2 + \frac{1}{2}ab^2 \right) \right] - 4a^2b \right\} + 3a^2b,$$

求当  $a = 1/3$ ,  $b = -1$  时此式的值.

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 原式} &= 2a - \{7b + [4a - 7b - 2a + 4b + c] + 3a\} \\ &= 2a - \{7b + 2a - 3b + c + 3a\} \\ &= 2a - 5a - 4b - c = -3a - 4b - c. \end{aligned}$$

当  $a = -2/7$ ,  $b = 0.4$ ,  $c = -1$  时, 原式的值是

$$\begin{aligned} &-3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) - 4 \times \frac{2}{5} - (-1) = \frac{6}{7} - \frac{8}{5} + 1 \\ &= \frac{6}{7} - \frac{3}{5} = \frac{9}{35}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 原式} &= \left\{ ab - \left[ 3a^2b - \frac{9}{2}ab^2 \right] - 4a^2b \right\} + 3a^2b \\ &= \left\{ ab - 3a^2b + \frac{9}{2}ab^2 - 4a^2b \right\} + 3a^2b \\ &= ab - 4a^2b + \frac{9}{2}ab^2. \end{aligned}$$

当  $a = 1/3$ ,  $b = -1$  时,

$$\begin{aligned} \text{原式的值} &= \frac{1}{3} \times (-1) - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (-1) \\ &\quad + \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} \times (-1)^2 = \frac{29}{18}. \end{aligned}$$

说明: 在求多项式的值时, 一般先化简后求值

## 五 整式的乘除法

整式的乘除法涉及以下一些运算性质和公式.

幂的运算性质(其中  $m$ 、 $n$  是自然数):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m,$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n).$$

常用的乘法公式:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

单项式与单项式的乘法: 根据乘法交换律与结合律法则, 将系数相乘及同底数的幂相乘.

单项式与多项式的乘法: 根据乘法的分配律, 把问题转化为单项式乘以单项式.

多项式与多项式的乘法: 根据乘法分配律和单项式乘法法则进行.

单项式除以单项式: 将系数及同底数幂分别相除.

多项式除以单项式: 根据单项式除以单项式的法则, 把多项式各项分则除以单项式.

多项式除以多项式: 一般地用竖式进行演算.

例 12 计算:

$$(1) 7ab^2 \times (-4a^2b^3);$$

$$(2) -5x^2(x-4y).$$

解: (1) 原式  $= 7 \times (-4)a^{1+2}b^{2+3} = -28a^3b^5.$

(2) 原式  $= -5x^2 \cdot x + 5x^2 \cdot 4y = -5x^3 + 20x^2y$

例 13 计算:

$$(1) (-2a^2b)^3 \times 3bc \div 12a^5b^4;$$

$$(2) -x(4-2x)(2x+3);$$

$$(3) \left( 20x^2y - 5xy^2 - \frac{1}{2}y^3 \right) \div 5y;$$

$$(4) (2x^n y - y^{n-1})(2x^n y + y^{n-1}) (n > 1).$$

解: (1) 原式  $= -8(a^2)^3 b^3 \times 3bc \div 12a^5 b^4$   
 $= -(8 \times 3 \div 12)a^{6-5} b^{3+1-4} c = -2ab^0 c = -2ac.$

(2) 原式  $= 2x(x-2)(2x+3)$   
 $= 2x(2x^2 - x - 6) = 4x^3 - 2x^2 - 12x.$

(3) 原式  $= 20x^2y \div 5y - 5xy^2 \div 5y - 1/2y^3 \div 5y.$   
 $= 4x^2 - xy - y^2/10.$

(4) 原式  $= (2x^n y)^2 - (y^{n-1})^2 = 4x^{2n} y^2 - y^{2n-2}.$

说明: 此题应用了乘法公式  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  (平方差公式).

例 14 计算:  $(a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \div (a^3 + b^3).$