中学数学奥林匹克

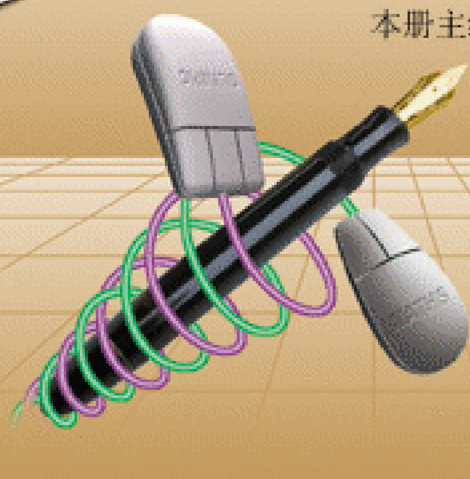
同步教程

OLYMPIC

主　　编／陈传理

本册主编／熊　斌

顾鸿达



奥林匹克出版社

中学数学奥林匹克同步教程

初中三年级

主　　编　陈传理
本册主编　熊　斌　顾鸿达
编　　者　熊　斌　顾鸿达　李大元
　　　　　冯志刚　许　敏　范端喜

奥林匹克出版社

第一章　一元二次方程

引　　言

下面的问题是 1995 年罗马尼亚冬季数学竞赛九年级的一个考题.

例 1. 设 m 为实数,方程 $x^2+(m-4)x+m^2-3m+3=0$ 有两个实数根 x_1、x_2.

(1) 若 $x_1^2+x_2^2=6$,求 m 的值.

(2) 若 x_1、x_2 都不为 1,证明:

$$1<\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}+8\leqslant\frac{121}{9}$$

这是一道综合性较强的赛题,要求对一元二次方程根的概念、判别式、韦达定理等重要内容能够熟练地驾驭. 请读者试做一下.

初中代数主要围绕解一元二次方程等问题展开,方程理论是初中代数的主旋律. 这一章将对与一元二次方程有关的常见问题与基本方法和技巧予以讨论.

1.1　含字母系数的一元二次方程

概述　形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程称为一元二次方程,使等式成立的实数称为此方程的实数根.

解决含字母系数的一元二次方程的问题,经常需要对该方程的根进行分析、处理.

例 1. 已知方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根 α、β 也是方程 $x^6-px^2+q=0$ 的根,求 p、q 的值.

解题关键:利用一元二次方程根的概念,用 α、β 表示 p 和 q,再结合 α、β 之间的关系(这里用到韦达定理),从而可解出 p、q.

解：由条件，可知 $\alpha^2-3\alpha+1=0$，即 $\alpha^2=3\alpha-1$，并且 $\alpha^6-p\alpha^2+q=0$. 于是

$$\begin{aligned}\alpha^6&=\alpha^4(3\alpha-1)=3\alpha^5-\alpha^4\\&=3\alpha^3(3\alpha-1)-\alpha^4=8\alpha^4-3\alpha^3\\&=8(3\alpha-1)^2-3\alpha(3\alpha-1)\\&=63\alpha^2-45\alpha+8\\&=63(3\alpha-1)-45\alpha+8\\&=144\alpha-55.\end{aligned}$$

所以，$144\alpha-55-(3\alpha-1)p+q=0.$ ①

同理，$144\beta-55-(3\beta-1)p+q=0.$ ②

①、② 两式相加，并利用 $\alpha+\beta=3$，有

$$2q-7p=-322.$$

①、② 两式相减，有

$$3(\alpha-\beta)p=144(\alpha-\beta).$$

注意到，$\alpha\neq\beta$，故 $3p=144$，$p=48$，进而，$q=7$.

说明：运用根的概念解题这一方法是处理一元二次方程时容易忽视的技巧，这里巧妙利用根的概念，对 α^6 与 β^6 予以降次，将高次问题予以简化，题中 p、q 的求值问题迎刃而解.

例 2. 已知方程 $x^2-kx-7=0$ 和 $x^2-6x-(k+1)=0$ 有公共实根. 求 k 的所有可能值.

解题关键：从两个方程的公共实根出发，先确定该公共实根的值，再求各系数是处理这类问题的常见思路.

解：设 α 是这两个方程的公共实根，则

$$\alpha^2-k\alpha-7=0$$

$$\alpha^2-6\alpha-(k+1)=0$$

上述两式相减，得 $(k-6)\alpha=k-6$.

于是，$k-6=0$ 或 $\alpha=1$；而由 $\alpha=1$，代入方程，可知 $k=-6$. 所以，$k=6$ 或 -6.

例 3. 设 p 为实常数,方程 $x^2-3px-p=0$ 有两个不同的实数根 x_1、x_2.

(1) 证明:$3px_1+x_2^2-p>0$.

(2) 求 $A=\dfrac{p^2}{3px_1+x_2^2+3p}+\dfrac{3px_2+x_1^2+3p}{p^2}$ 的最小可能值,并求 A 取最小值时 p 的值.

解题关键:将所要证明(或求值)的式子用 p 来表示.

解:由条件,$\Delta=(3p)^2+4p=9p^2+4p>0$,**故** $p>0$ **或** $p<-\dfrac{4}{9}$.

(1) **利用条件** x_2 **为方程的根,可知** $x_2^2=3px_2+p$,**于是,结合** $x_1+x_2=3p$,**有**

$$\begin{aligned}&3px_1+x_2^2-p\\=&3px_1+3px_2+p-p\\=&3p(x_1+x_2)=9p^2>0.\end{aligned}$$

(2) **与(1)作类似处理,可得**

$$\begin{aligned}A&=\frac{p^2}{3p(x_1+x_2)+4p}+\frac{3p(x_1+x_2)+4p}{p^2}\\&=\frac{p^2}{9p^2+4p}+\frac{9p^2+4p}{p^2}\\&\geqslant 2\sqrt{\frac{p^2}{9p^2+4p}\cdot\frac{9p^2+4p}{p^2}}\\&=2.\end{aligned}$$

等号成立的条件是:$\dfrac{p^2}{9p^2+4p}=\dfrac{9p^2+4p}{p^2}$,**这时,**$p=-\dfrac{1}{2}$ **或** $p=-\dfrac{2}{5}$,**结合** $\Delta>0$,**可知** $p=-\dfrac{2}{5}$ **应舍去.**

综上可知,A **的最小值为** 2,**并且** A **取最小值时,**$p=-\dfrac{1}{2}$.

说明:此题中,用到了一个基本不等式:若 x、y **为正实数,则**

$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$. 这一点由$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$展开、移项可得.

例 4. 已知方程$ax^2+bx+c=0$的两个根恰为a、b,这里a、b、c均为整数($a\neq 0$). 求$a+b+c$的值.

解题关键: 应对a、b、c都是整数这一条件予以足够的重视.

解: 利用韦达定理,可知

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{b}{a}, \\ ab=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

于是$a^2+ab=-b$,即$a^2+\dfrac{c}{a}=-b$,从而

$$a^3+c=-ab=-\frac{c}{a},$$

所以,$a^4=-c(a+1)$,这表明$a+1\mid a^4$,但$a+1$与a互质,这要求$a+1=1$或-1,$a=0$(舍去)或$a=-2$. 进而$c=16$,$b=4$,所以,$a+b+c=18$.

说明: 方程问题与整数理论结合是数学竞赛的热点之一. 解题中应充分运用整数理论对整数根的特征、性质予以分析,才能解决与之相关的方程问题.

例 5. 设正整数p、q、r使得方程$px^2-qx+r=0$在$0<x<1$的范围内有两个不相等的实根,求p的最小值.

解题关键: 利用条件,对根的性质予以分析,导出与p、q、r有关的不等式.

解: 设α、β是所给方程的两个根,并设$0<\alpha<\beta<1$. 则由基本不等式,可知

$$\alpha(1-\alpha)\leqslant\frac{1}{4},\beta(1-\beta)\leqslant\frac{1}{4}.$$

注意到,上述不等式不能同时取等号,故

$$0<\alpha(1-\alpha)\beta(1-\beta)<\frac{1}{16}.$$

由韦达定理，$\alpha\beta=\frac{r}{p}$，$\alpha+\beta=\frac{q}{p}$，于是

$$0<\frac{r}{p}\left(1-\frac{q}{p}+\frac{r}{p}\right)<\frac{1}{16},$$

即 $\quad 0<16r(p-q+r)<p^2.$

这要求 $p-q+r>0$，故 $p-q+r\geqslant 1$（这里用到的 p、q、r 都为整数），$r\geqslant 1$. 所以 $p^2>16$，从而 $p\geqslant 5$.

另一方面，注意到方程 $5x^2-5x+1=0$ 的两个根不相等，且都在 0 和 1 之间. 所以，p 的最小值为 5.

说明：这里巧妙利用基本不等式，揭示了方程在 0 和 1 之间有两个不相等的实根的本质特性，从而简洁地导出了正整数 $p^2>16$.

另外，构造一个使 $p=5$ 且满足条件的方程是必要的. 在处理最值问题时，证明与举例是一对孪生兄弟，缺一不可.

习题 1.1

A. 热身练习

1. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根之和为 s_1，两根的平方和为 s_2，两根的立方和为 s_3. 求 $as_3+bs_2+cs_1$ 的值.

2. 已知 α、β 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根，而 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根，求代数式 $\frac{1}{2}p^2-q$ 的值.

3. b 为何值时，方程 $x^2-bx-2=0$ 与方程 $x^2-2x-b(b-1)=0$ 有公共实根.

4. 关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+2a+1=0$ 有一个大于 0 而小于 1 的根，求 a 的取值范围.

5. 已知 a、b 为整数，并且 x^2-x-1 是 $ax^{17}+bx^{16}+1$ 的因式，求 a 的值.

6. 是否存在一个整数 a，使得多项式 x^2+x+a 能整除 $x^{10}+x^2+50$.

B. 跳台阶

7. 给定实数 a、b、x、y 满足：$a+b=23$，$ax+by=79$，$ax^2+by^2=217$，$ax^3+by^3=691$. 求代数式 ax^4+by^4 的值.

8. 实数 a、b、x、y 满足：对任意自然数 n，均有 $ax^n+by^n=1+2^{n+1}$. 求 a^x+b^y 的值.

9. 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，在 x 取 -1、0、1 时，所得的函数值均为整数. 证明：对任意整数 x，函数值 $f(x)$ 均为整数.

10. 求解引言中出现的例 1.

1.2　根的判别式与韦达定理

概述　一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数解的条件是 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，设 x_1、x_2 为此方程的两个根，则根与系数之间存在如下关系

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

这就是著名的韦达定理.

若 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实根，则 $a^2(x_1-x_2)^2\geqslant 0$，利用韦达定理，可知 $a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$. 这就是根的判别式的由来.

例 1. 已知实数 a、b、c 满足

$$\begin{cases} a^2-a-bc+1=0, \\ 2a^2-2bc-b-c+2=0. \end{cases}$$

证明：$a\geqslant 1$.

解题关键：构造以 b、c 为根的一元二次方程，再利用 $\Delta \geqslant 0$.

证明：由条件，可知

$$\begin{cases} b+c=2a, \\ bc=a^2-a+1. \end{cases}$$

于是，b、c 是一元二次方程

$$x^2-2ax+a^2-a+1=0$$

的两个实根，从而根的判别式

$$\Delta=(-2a)^2-4(a^2-a+1)\geqslant 0,$$

可知 $4a-4\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$.

说明：利用根的判别式不小于零是初中阶段处理不等式问题的常用技巧，这时，首先应将问题化为一个与一元二次方程相关的问题.

例 2. 已知整系数一元二次方程

$$x^2+ax+b=0$$

的两个实根的平方和小于 4. 求满足条件的数对 (a,b) 的对数.

解：设方程的两个实根为 α、β，则由韦达定理，有

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-a, \\ \alpha\beta=b. \end{cases}$$

从而，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2b<4$.

另一方面，由于方程有实数解，其判别式 $\Delta=a^2-4b\geqslant 0$.

结合上面的两个不等式，有

$$2b\leqslant a^2-2b<4,$$

$$-2b\leqslant a^2-2b<4,$$

故 $-2<b<2$，又 b 为整数，所以 $b=-1,0$ 或 1.

当 $b=-1$ 时，$\Delta\geqslant 0$ 恒成立，这时由 $a^2-2b<4$，可得 $a^2<2$，进而 $a=0,\pm 1$；

当 $b=0$ 时，与上类似，可知 $a^2<4$，得 $a=0,\pm 1$.

当 $b=1$ 时，应有 $4\leqslant a^2<6$，得 $a=\pm 2$.

综上所述，满足条件的数对(a,b)共有8对.

说明：此题求解过程中，一个容易忽视的条件是$\Delta \geqslant 0$，综合两个条件不等式，先确定b的取值范围，是解决问题的关键步骤.

例3. 求所有的正整数对(p,q)，使方程

$$x^2 - pqx + (p+q) = 0$$

有整数解.

解：设α是方程的整数解，β是此方程的另一个解. 由韦达定理，有

$$\begin{cases} \alpha + \beta = pq & ① \\ \alpha\beta = p + q & ② \end{cases}$$

由于α、p、q都为整数，利用①可知β也是整数，又因p、q为正整数，由①、②可知$\alpha + \beta > 0$，$\alpha\beta > 0$，从而α、β都是正整数.

不妨设$\alpha \geqslant \beta$，将①与②相减，得

$$\alpha + \beta - \alpha\beta = pq - p - q,$$

即 $$pq - p - q + \alpha\beta - \alpha - \beta = 0. \qquad ③$$

将③式两边都加上2，得

$$(p-1)(q-1) + (\alpha-1)(\beta-1) = 2.$$

利用p、q、α、β都是正整数，可知有如下三种情况：

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}(p-1)(q-1)=0\\(\alpha-1)(\beta-1)=2;\end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})\begin{cases}(p-1)(q-1)=1\\(\alpha-1)(\beta-1)=1;\end{cases}$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}(p-1)(q-1)=2\\(\alpha-1)(\beta-1)=0.\end{cases}$$

情形(Ⅰ)：利用$(\alpha-1)(\beta-1)=2$及$\alpha \geqslant \beta$，可知$\alpha - 1 = 2$，$\beta - 1 = 1$，从而①、②变为

$$\begin{cases} pq = 5, \\ p + q = 6. \end{cases}$$

于是p、q是方程$t^2 - 6t + 5 = 0$的两个根. 得$(p,q) = (1,5)$或$(5,1)$；

情形(Ⅱ):由$(p-1)(q-1)=1$,得$(p,q)=(2,2)$;

情形(Ⅲ):由$(p-1)(q-1)=2$,得$(p,q)=(2,3)$或$(3,2)$.

综上,满足条件的正整数对(p,q)有$(1,5)$、$(5,1)$、$(2,2)$、$(2,3)$与$(3,2)$共5对.

说明:这里采用递进的方针,对题给条件充分挖掘,先证明方程的两根α、β都是整数,再证明α、β都是正整数,这样,在得到解决本题的关键式子③式后,问题就迎刃而解了.

例4. 设$f(x)$是一个二次三项式,可用代数式$x^2f\left(\frac{1}{x}+1\right)$或$(x-1)^2f\left(\frac{1}{x-1}\right)$来替换$f(x)$. 问:能否用这两种运算经有限次操作后,由二次三项式x^2+4x+3得到$x^2+10x+9$?

解题关键:应抓住每次变换过程中,某个目标函数的不变性.

解:不能经有限次操作将x^2+4x+3变为$x^2+10x+9$.

事实上,设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,则$f(x)$的根的判别式$\Delta_1=b^2-4ac$.

若$f(x)$变为$x^2f\left(\frac{1}{x}+1\right)$,记

$$\begin{aligned}g(x)&=x^2f\left(\frac{1}{x}+1\right)=x^2\left[a\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+b\left(\frac{1}{x}+1\right)+c\right]\\&=a(1+x)^2+b(x+x^2)+cx^2\\&=(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a,\end{aligned}$$

则$g(x)$的根的判别式

$$\begin{aligned}\Delta_2&=(2a+b)^2-4a(a+b+c)\\&=4a^2+4ab+b^2-4a^2-4ab-4ac\\&=b^2-4ac.\end{aligned}$$

若$f(x)$变为$(x-1)^2f\left(\frac{1}{x-1}\right)$,记

$$h(x)=(x-1)^2\left[a\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+b\left(\frac{1}{x-1}\right)+c\right]$$

$$= a + b(x-1) + c(x-1)^2$$
$$= cx^2 + (b-2c)x + a - b + c,$$

则 $h(x)$ 的根的判别式

$$\Delta_3 = (b-2c)^2 - 4c(a-b+c)$$
$$= b^2 - 4bc + 4c^2 - 4ca + 4cb - 4c^2$$
$$= b^2 - 4ac.$$

上述讨论表明,每次操作后所得二次三项式的判别式在数值上与原二次三项式的判别式相同.而 x^2+4x+3 的判别式的值为 4,$x^2+10x+9$ 的判别式的值为 64.所以,不能将 x^2+4x+3 变为 $x^2+10x+9$.

说明:利用操作过程中的不变量是处理操作问题的常见方法.本题尽管每次操作后的结果是不确定的,但作为反映二次三项式特征的判别式在数值上不变,正是利用了这一不变量,问题才得以解决.

例 5. 已知 $p<q<r$,并且若 a 为 p、q、r 中某一个数,则另两个数中至少有一个数是方程

$$x^2-(2-a)x+a^2-2a-7=0 \qquad ④$$

的根.证明:$-\frac{8}{3}<p<-1$.

解题关键:抓住方程 ④ 的左边关于字母 a 与 x 是对称的.

证明:我们将 ④ 变形为

$$x^2+ax+a^2-2(a+x)-7=0.$$

可知 ④ 的左边关于字母 a 与 x 对称.

当 a 取 p 时,由条件,q 与 r 中有一个数为 ④ 的根,有两种情形.

情形一:q 为 ④ 的根.这时,当 a 取 r 时,p、q 中有一个数为 ④ 的根,若 p 为 ④ 的根,则利用 a 与 x 的对称性,可知 $a=p$ 时,r 为 ④ 的根;若 q 为 $a=r$ 时,方程 ④ 的根,则利用 a 与 x 的对称性可

知 $a=q$ 时,r 也是 ④ 的根(注意,$a=q$ 时,p 为 ④ 的根),这表明,当 $a=p$ 时,q 与 r 都是方程 ④ 的根.

情形二:r 为 ④ 的根,对 $a=q$ 时. 方程 ④ 的根重复上面的讨论,可得出与情形一同样的结论.

所以,题中的条件可改为:当 a 取 p、q、r 中某一个数时,另两个数同为方程 ④ 的根.

考虑方程

$$x^2-(2-p)x+p^2-2p-7=0$$

此方程有两个不相等的实根(q 和 r),于是

$$\Delta=(2-p)^2-4(p^2-2p-7)>0$$

故 $-\dfrac{8}{3}<p<4$.

另一方面,由韦达定理,可知 $2-p=q+r$,即 $p+q+r=2$,于是 $3p<2$,$p<\dfrac{2}{3}$. 并且,二次函数 $f(x)=x^2-(2-p)x+p^2-2p-7$ 的开口朝上,且两个根都大于 p,故 $f(p)>0$,即

$$p^2-(2-p)p+p^2-2p-7>0$$

解得 $p<-1$ 或 $p>\dfrac{7}{3}$,结合 $p<\dfrac{2}{3}$,可知 $p<-1$.

综上可知,$-\dfrac{8}{3}<p<-1$.

说明:此题是一道含字母系数的一元二次方程问题,而且当把字母系数与未知数的地位互换时,所得方程与原方程完全一样. 正是基于这一特性,一个较弱的条件得以加强,从而使问题的本质浮出水面.

习题 1. 2

A. 热身练习

1. 已知正整数 a、b、c 满足 $a<b<c$,且

$$\begin{cases}36-6(a+b+c)+(ab+bc+ca)=0,\\81-9(a+b+c)+(ab+bc+ca)=0,\end{cases}$$

求 a、b、c **的值.**

2. **已知一个三角形的某两条边的边长恰为方程** $x^2+px+1=0$ **的两个根,另一条边的长度为** 2,**求实数** p **的取值范围.**

3. **已知** a、b **是方程** $x^2-4x+r=0$ **的两个根**,c、d **是方程** $x^2-5x+s=0$ **的两个根,记**

$$t=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c},$$

请用 t **表示和式** $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}$.

4. **设函数** $y=\frac{ax+b}{x^2+1}$ **的最大值为** 4,**最小值为** -1,**求** a、b **的值.**

5. **设** $x^3+3x^2+4x-11=0$ **的根是** a、b、c,**方程** $x^3+rx^2+sx+t=0$ **的根为** $a+b$、$b+c$、$c+a$. **求** t **的值.**

6. **设** p、q **为质数,且方程** $x^2-px+q=0$ **有两个正整数根** α、β. **求** $p^q+q^p+\alpha^\beta+\beta^\alpha$ **的值.**

B. **跳台阶**

7. **求所有的实数** m,**使得方程**

$$[x^2-2mx-4(m^2+1)][x^2-4x-2m(m^2+1)]=0$$

恰有三个不同的实数解.

8. **求所有的有理数** p,**使得以抛物线** $f(x)=-x^2+4px-p+1$ **的顶点、抛物线与** x **轴的两个交点为顶点的三角形的面积为整数.**

9. **教师在黑板上写了一个二次三项式** $x^2+10x+20$,**每次允许将一次项系数或常数项加上** 1 **或减去** 1. **最后得到二次三项式**

$x^2+20x+10$. **证明：必有某次变换后，所得的二次三项式具有整数根.**

10. **函数** $f(x)=ax^2+bx+c$ **具有性质：方程** $f(x)=x$ **无实数解. 证明：方程** $f(f(x))=x$ **也没有实数解.**

1.3 可化为一元二次方程的方程(组)

概述 我们总是将方程的求解问题利用代数式变形转化为一次方程或一元二次方程来处理，这是化归思想在方程理论中的基本运用. 实现这一转化的方法是多种多样的，换元法是其中最常用的方法. 具体到各个问题时，应根据方程的特点灵活处理.

例 1. **已知函数** $f(x)=\sqrt{1-x}(x\leqslant 1)$，**求方程** $f(f(x))=x$ **的实数解.**

解：问题的实质是求方程

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x}}=x$$

的解，两边平方，可知

$$\sqrt{1-x}=1-x^2.$$

再平方，将有

$$x^4-2x^2+x=0. \qquad ①$$

即 $x(x^3-2x+1)=0$，**注意到** $x=1$ **是方程** $x^3-2x+1=0$ **的根，故** ① **可变形为**

$$x(x-1)(x^2+x-1)=0,$$

方程的根为 $x_1=0, x_2=1, x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，**经检验** $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ **是增根，舍去.**

综上，$f(f(x))=x$ **的根为** $x_1=0, x_2=1$ **和** $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

说明：一般代数三次方程尽管有求根公式，但中学阶段不会出现需用到求根公式才能处理的三次方程，给出的三次方程，往往容易看出其中的一个根，再由因式定理转化为求解一个一元二次方程.

例 2. **求方程**

$$\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{3x-3}=\sqrt[3]{x-8}+\sqrt[3]{4x-2} \quad ②$$

的实数解.

解题关键：利用 ② 式两边立方根下式子之和为恒等式.

解：令 $\sqrt[3]{2x-7}=a$，$\sqrt[3]{3x-3}=b$，$\sqrt[3]{x-8}=c$，$\sqrt[3]{4x-2}=d$，**则**

$$\begin{cases} a+b=c+d, & ③ \\ a^3+b^3=c^3+d^3. & ④ \end{cases}$$

若 $a+b=0$，**则** $\sqrt[3]{2x-7}=\sqrt[3]{3-3x}$，**于是**，$2x-7=3-3x$，**得** $x=2$. **显然**，$x=2$ **是 ② 的解.**

若 $a+b\neq 0$（**这时** $c+d\neq 0$），**由 ④ ÷ ③ 得**

$$a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2,$$

即 $(a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd$，**利用 ③，可知** $ab=cd$，**即**

$$\sqrt[3]{(2x-7)(3x-3)}=\sqrt[3]{(x-8)(4x-2)},$$

两边立方，得

$$6x^2-27x+21=4x^2-34x+16,$$

即 $2x^2+7x+5=0$，**解得** $x=-1,-\dfrac{5}{2}$.

所以，方程 ② 的解为 $x=-1,-\dfrac{5}{2}$ **或** 2.

说明：方程 ② 两边直接立方，也可以得解，请读者一试.

例 3. **解方程** $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$.

解：对原方程进行如下变形

$$(x^2-1+2)^2+4x(x^2-1)=0,$$

$$(x^2-1)^2+4(x^2-1)+4+4x(x^2-1)=0,$$

$$(x^2-1)^2+4x(x^2-1)+4x^2=0,$$

即 $$(x^2+2x-1)^2=0,$$

所以,原方程的解为 $x=-1\pm\sqrt{2}$.

说明:拆项、补项的方法是因式分解的常见方法,解方程中,将字母移项后,进行因式分解是一种常见的处理手法.

例 4. 解方程

$$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0. \qquad ⑤$$

解题关键:抓住系数对称这一特点.

解:注意到 $x=0$ 不是 ⑤ 的根,在 ⑤ 式两边除以 x^2,得

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0,$$

$$2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

令 $y=x+\frac{1}{x}$,就有

$$2y^2+3y-20=0.$$

解得 $y=\frac{5}{2}$ 或 -4,即 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 或 -4,变为两个一元二次方程,分别求解,可得 $x=\frac{1}{2}$,2 或 $-2\pm\sqrt{2}$.

说明:处理系数对称的高次方程时,经常运用此题的解法. 例 3 展开移项后,也可转为本题的类型,请用此解法试一试.

例 5. 已知 $a\geqslant 1$,求满足方程

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$$

的所有实数 x.

解:首先 $x\geqslant 0$,方程两边平方、移项得

$$\sqrt{a+x}=a-x^2.$$

于是 $x\leqslant\sqrt{a}$,两边再平方得