

第一章

绪 论

第一节 初中代数的特点

教育部 2000 年颁布的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲 试用修订版》(以下简称《教学大纲 修订版》),对初中数学教学目的做了如下规定:

“初中数学的教学目的是:使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能,进一步培养运算能力,发展思维能力和空间观念,使他们能够运用所学知识解决简单的实际问题,并逐步形成数学创新意识,培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义的观点。”

《教学大纲 修订版》对初中数学教学目的中包含的各项目标做了进一步明确的说明:

基础知识是指:初中数学中的概念、法则、性质、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。

基本技能是指:能够按照一定的程序与步骤进行运算、作图或画图、进行简单的推理。

思维能力主要是指:会观察、实验、比较、猜想、分析、综合、

抽象和概括；会用归纳、演绎和类比进行推理；会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点，会运用数学概念、原理、思想和方法辨明数学关系，形成良好的思维品质，提高思维水平。

运算能力是指：会根据法则、公式等正确地进行运算，并理解运算的管理；能够根据问题条件寻求与设计合理、简捷的运算途径。

空间观念主要是指：能够由形状简单的实物想象出几何图形，由几何图形想象出实物的形状；能够由较复杂的平面图形分解出简单的、基本的图形；能够在基本的图形中找出基本元素及其关系；能够根据条件作出或画出图形。

能够解决实际问题是指：能够解决带有实际意义的和相关学科中的数学问题，以及解决生产和日常生活中的实际问题；能够使用数学语言表达问题、展开交流，形成用数学的意识。

初中数学中要培养的创新意识主要是指：对自然界和社会中的现象具有好奇心，不断追求新知、独立思考，会从数学的角度发现和提出问题，并用数学方法加以探索、研究和解决。

数学教学中，发展思维能力是培养能力的核心。

良好的个性品质主要是指：正确的学习目的，学习数学的兴趣、信心和毅力，实事求是、探索创新和实践的科学态度。

初中数学中要培养学生的辩证唯物主义观点主要是指：数学来源于实践又反过来作用于实践的观点；数学内容中普遍存在的对立统一、运动变化、相互联系、相互转化等观点。

《教学大纲（修订版）》对初中代数的教学内容和教学要求做了如下简述：

初中代数是使学生在小学数学的基础上，把数的范围从非负有理数扩充到有理数、实数；通过用字母表示数，学习代数式、方程和不等式、函数等，学习一些常用的数据处理方法和科学计算器或算表的使用方法；发展对于数量关系的认识

和抽象概括的思维，提高运算能力。

初中代数的教学要求如下。

1. 使学生了解有理数、实数的有关概念，熟练掌握有理数的运算法则，灵活运用运算律简化运算；会用计算器或算表计算平方、立方、平方根与立方根。

2. 使学生了解有关代数式、整式、分式和二次根式的概念，掌握它们的性质和运算法则，能够熟练地进行整式、分式和二次根式的运算以及多项式的因式分解。

3. 使学生了解有关方程、方程组的概念；灵活运用一元一次方程、二元一次方程组和一元二次方程的解法解方程和方程组；掌握分式方程和简单的二元二次方程组的解法，理解一元二次方程的根的判别式；能够分析等量关系列出方程或方程组解应用题。

使学生了解一元一次不等式、一元一次不等式组的概念，会解一元一次不等式和一元一次不等式组，并把它们的解集在数轴上表示出来。

4. 使学生理解平面直角坐标系的概念，了解函数的意义 理解正比例函数、反比例函数、一次函数的概念和性质 理解二次函数和概念，会根据性质画出正比例函数、一次函数的图象，会用描点法画出反比例函数、二次函数的图象。

5. 使学生了解统计的思想，掌握一些常用的数据处理方法，能够用统计的初步知识解决一些简单的实际问题。

6. 使学生掌握消元、降次、配方、换元等常用的数学方法 解决某些数学问题 理解“特殊——一般——特殊”、“未知——已知”、用字母表示数、数形结合和把复杂问题转化成简单问题等基本的思想方法。

7. 使学生通过各种运算和对代数式、方程、不等式的变形以及重要公式的推导，通过用概念、法则、性质进行简单的

推理，发展思维能力。

8. 使学生了解已知与未知、特殊与一般、正与负、等与不等、常量与变量等辩证关系，以及反映在函数概念中的运动变化观点，了解反映在数与式的运算和求方程解的过程中的矛盾转化的观点，同时，利用有关的代数史料和社会主义建设成就，对学生进行思想教育。

从上面由《教学大纲 修订版》摘述的内容可以看出初中代数有两个显著的特点。

一、内容选材立足于基础

代数是研究一般性代数运算的一门学科，其研究的对象随着数学的不断发展，已由数式逐步扩大到向量、矩阵等。作为中学数学一个分科的代数，主要讲授初等代数的内容。它包括有理数、实数及其运算，整式、分式和根式的运算和变形，解方程、方程组和不等式，以及指数、对数运算，排列组合、二项式定理等。

在《教学大纲 修订版》中，“初中代数”的含义既与作为一门数学学科的代数的含义不同，又与传统的初等代数内容的含义不同，它不仅包括了传统的初等代数中有理数、实数及其运算，整式、分式和根式的运算及变形，解方程、方程组和不等式的部分内容，还把函数、统计的初步知识、以及使用计算器等也作为初中代数的内容。

现代科学技术发展十分迅速，对于现代社会中的一个公民来说，没有一定的科学文化基础知识是不可能适应现代生产发展的需要的。随着人们生活水平的不断提高，家庭中电器及其他现代科技用品逐步增多，对于吃、穿、用，也日趋追求科学、合理，这都需要具有一定的科学文化基础知识。《教学大纲（修订版）》中初中代数所选择的内容都是适应日常生活以及

参加工农业生产和其他各行各业工作所必需具备的基础知识,这些知识不仅有广泛的应用,而且应用的频率很高.这些内容又是进一步学习各类数学知识,学习物理、化学等相邻学科所必需具备的、最基础的知识.这些内容是在我国目前情况下,构成国民科学文化基础的重要组成部分.

从具体内容的要求看,也可以反映出这个特点.

《教学大纲(修订版)》要求在初中数要进行两次扩充,即由小学学的非负有理数扩充到有理数,由有理数扩充到实数;但对数扩充的原则并不要求给学生讲述.对于初中重点研究的有理数,也只是侧重于讲述有理数的运算和运用运算律简化运算,而对于有理数的性质,如稠密性、有序性和对加、减、乘、除运算的封闭性等都没有涉及.

在代数式方面,主要要求研究整式、分式、根式的运算和变形,这是进一步研究方程、函数的工具.这些内容都属于代数式的恒等变形的范畴,而对于恒等变形的理论,《教学大纲(修订版)》没有要求讲述,甚至连恒等变形这个概念都没有要求介绍.

在方程、不等式方面,偏重于方程、不等式的解法和列方程、方程组解应用题,而对于解方程和解不等式的算理,由根据同解理论变为根据等式或不等式的性质,实际上只要求明确如何变形可以确定方程或不等式的解就可以了.

在函数方面,对于函数概念是描述性的,四类初等函数的性质是由图象观察、归纳得出的,只要求对函数有最基本的初步的认识.

在统计方面,要掌握的是一些常用的数据处理方法,会利用这些初步的知识去解决一些简单的实际问题.

由此可见,《教学大纲(修订版)》对于初中代数部分在内容的选材上,没有受代数学科和传统的初等代数的局限,而是从

传统初等代数内容和分析、统计中精选出适应现代生产发展与
现代生活紧密联系的，以及进一步学习科学文化所必需的、学
生可以接受的最基本、最常用的知识 作为教学内容。

二、教学要求立足于全面提高素质

在《教学大纲 修订版》初中代数教学要求中 对学好规定的
的基础知识和基本技能十分重视，这些内容是适应现实乃至未
来社会生活和进一步发展所必需的。同时 开发智力、培养能力
都是在学习基础知识和训练基本技能的过程中实现的。

《教学大纲 修订版》明确地把数学思想、数学方法列为
基础知识的重要组成部分，在教学要求中进一步具体指出，要
在初中代数的教学过程中“使学生掌握消元、降次、配方、换
元等常用的数学方法，解决某些数学问题，理解‘特殊——
一般——特殊’，‘未知——已知’、用字母表示数、数形结合和把
复杂问题转化成简单问题等基本的思想方法”。这对于改变以
往在数学教学中只注重教具体的法则、性质、公式、定理 而忽
视其中所反映出的数学思想和方法的现象有重要作用，对于
揭示数学知识的实质，掌握数学知识的精髓有重要意义，有利
于培养学生的数学意识，提高学生的数学素养。

初中代数与小学数学相比有了很大变化，以字母表示数
为标志，使得数学的抽象性有了进一步的展示。初中代数的体
系已经有了科学的形态，逻辑的严谨性得以显露。在初中代数
教学过程中，经常需要通过观察、比较、分析、综合、抽象和概
括形成概念，得出法则、公式，对概念、方法进行分类，通过各
种运算、变形以及公式的推导，用概念、法则、公式、性质进行
推理。学习初中代数对于学生由经验思维模式逐步发展成科
学思维模式有重要作用。

在学习初中代数的过程中，学生能从大量的数学事实中，

了解已知与未知、特殊与一般、正与负、等与不等、常量与变量等辩证关系，以及反映在函数概念中的运动变化观点，了解反映在数与式的运算和求方程解的过程中的矛盾转化的观点，从另一个角度受到辩证唯物主义思想的教育，有利于形成辩证唯物主义观点。

在初中代数教学过程中，可以利用有关我国古代研究代数的史料，我国数学家为世界数学发展作出的重大贡献和社会主义建设成就对学生进行思想教育。

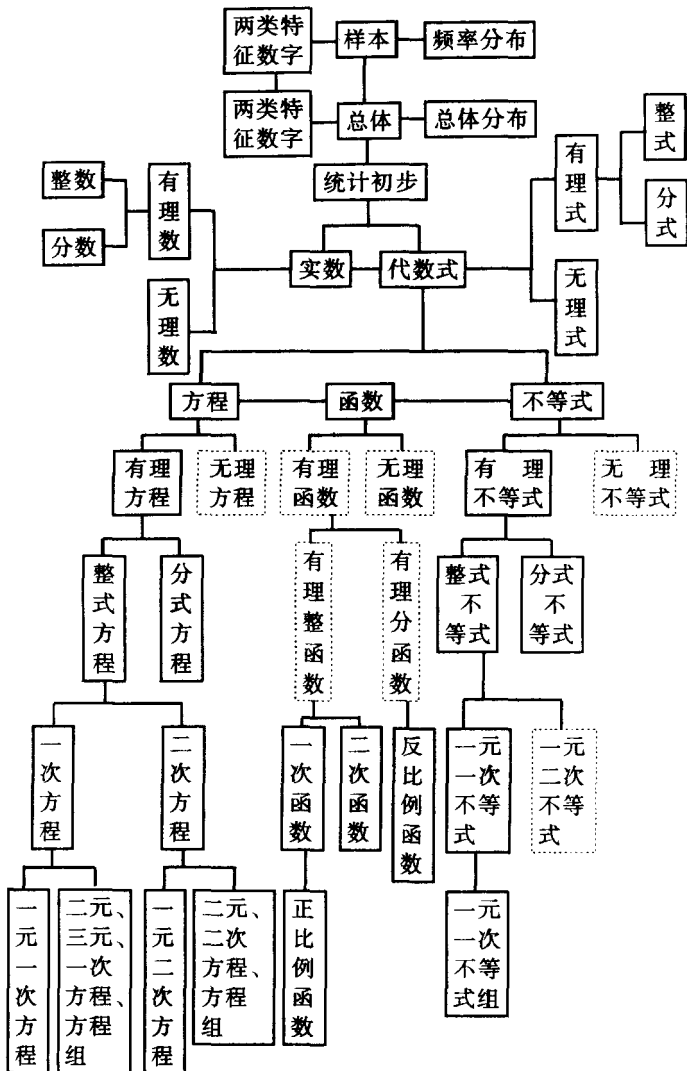
在《教学大纲 修订版》中明确指出要充分利用初中代数的这些文化教育功能和思想教育功能，在教学过程中培养提高学生的思想政治素质和文化科学素质。如此明确、重视利用初中代数的文化教育功能和思想教育功能，对学生进行教育和培养，以提高学生的思想政治素质和文化科学素质，这是前所未有的，是又一突出特点。

第二节 初中代数的知识结构

初中代数所涉及的知识与数学其他知识一样，具有很强的系统性。数学是学习初中其他课程（主要是物理、化学）的工具，因此要注意与学习相邻学科知识相配合，但初中代数又有着自身的特点和规律。初中代数的知识结构，不仅要考虑数学自身的特点，而且应遵循学生学习数学的认知规律。因此，初中代数的知识结构，既要符合数学知识自身的系统性，又要符合初中学生的认知过程和认知水平，还要兼顾与其他相邻学科知识之间的相互协调。它的基本出发点是促进学生的发展。

由《教学大纲 修订版》我们知道初中代数的教学大体可以分为五个方面的内容：数、式、方程和不等式、函数的初步知识、统计初步知识等。它们的知识系统可以用下面的结构图

表示（图中用虚线框表示的内容在初中不要求讲述）：



从结构图可以看出，数是初中代数各部分内容的基础，代数式是研究方程、不等式、函数以及统计初步的重要工具数、代数式、方程、不等式、函数的知识系统有许多相似之处，它们之间的联系也很密切，但统计初步与它们有所不同，具有一定的特殊性。

下面，我们分别对各部分内容的安排作进一步的分析。

一、数

数 特别是有理数 是初中代数的基础。

代数式的运算，方程、不等式的变形，函数的许多问题最后一般都归结到数的运算，例如 合并同类项、合并同类根式，解方程、不等式去分母 求函数值 等等。代数式、方程、不等式以及函数的许多知识要受到数的知识的制约。例如，多项式的因式分解，在不同数的范围，所分解的结果可能不同。同一个一元二次方程，在有理数范围内可能无解，在实数范围内就有解。对于一次函数 $y = 2x - 3$ 在整数范围内，它的图象是分布在一条直线上的整点；在非负实数范围内，它的图象是一条射线 在全体实数范围 它的图象是一条直线。

就数本身来说，初中代数介绍了有理数和实数，由于一元二次方程是在实数范围内研究的，因而在讲一元二次方程之前需要有实数的知识。但是有关实数的理论是初中学生难以接受的。《教学大纲 修订版》在安排这部分内容时 考虑到学生的认识水平，只给出了无理数、实数的概念，其他有关实数的知识就不予以介绍。即使有时在实数范围内研究问题所进行的运算一般通过根式，最后还是归结为有理数的运算。所以在初中 数的重点是研究有理数。

由此可见，在初中代数中，关于数的安排注意到下述两点：

1. 数的安排要有利于学生集中精力学好数的概念和运算，特别是学好有理数的概念和运算

2. 数的安排要先于代数式、方程、不等式、函数。

二、代数式

在初中，代数式的内容很多，如整式、分式、根式等。各种式的概念和运算又受到其他数学知识的制约，因此，把各种代数式的内容集中安排是很困难的，一般应分散安排。

就代数式本身来说，整式的乘除需要应用整式加减的知识，分式的运算一般要转化为整式的运算，根式的有关内容要应用整式、分式的知识才能解决，所以代数式知识的安排，要考虑到代数式知识内部的逻辑性。

方程、不等式的变形是以代数式的变形为工具的，代数式知识的安排要先于相应的方程、不等式知识的安排。

三、方程和不等式

方程内容的安排与代数式内容的安排有相似之处。

在初中，方程的内容较多，并且也受到其他数学知识的制约，把方程的内容集中安排是很困难的，一般也应分散安排。

方程的知识是建立在数与代数式的基础上的，方程知识的安排要考虑到与数、代数式相关知识的协调。

由于《教学大纲 修订版》没有把含有绝对值符号的不等式和一元二次不等式列入初中代数的教学内容，在初中只学习一元一次不等式和一元一次不等式组两部分内容。一元一次不等式组的内容不多，并且与一元一次不等式的知识联系密切，讲完一元一次不等式后，接着讲一元一次不等式组是很自然的。由于一元一次不等式的许多知识与一元一次方程的知识相类似，为了便于学生掌握不等式的知识，一般安排在一

元一次方程的后面.

四、函数

函数及其图象的知识体系与代数式、方程、不等式的联系比较密切,由于在初中有关的函数知识不多,因此,关于函数的知识既可以集中安排在代数式、方程、不等式之后,也可以分散安排在相应的代数式、方程、不等式之后.

五、统计初步

学习统计初步的知识,需要应用一定的数与代数式的知识,但是它与代数式、方程、不等式、函数的知识联系不多.所研究的问题及其方法与前面各部分有所不同,把统计的知识集中安排在初中代数的最后是可行的.

《教学大纲(修订版)》把初中代数中的数、代数式、方程、不等式、函数、统计初步按照以下顺序分为13个部分:(一)有理数;(二)整式的加减;(三)一元一次方程;(四)二元一次方程组;(五)一元一次不等式和一元一次不等式组;(六)整式的乘除;(七)因式分解;(八)分式;(九)数的开方;(十)二次根式;(十一)一元二次方程;(十二)函数及其图象;(十三)统计初步.并且明确说明:“教学内容项目和具体要求的顺序,在编写教材和教学时可以变动.”

《教学大纲(修订版)》所给出的初中代数内容的顺序实质上提供了一种初中代数知识的安排结构.这个安排结构体现了如下思路:首先集中学习有理数的有关概念和运算,然后学习整式的加减,在这个基础上,安排学习一元一次方程、二元一次方程组、一元一次不等式和一元一次不等式组;接着学习整式的乘除、因式分解、分式,再在这个基础上安排可化为一元一次方程的分式方程;在数的开方这部分内容里,把数扩

充到实数，接着研究二次根式的有关问题，为研究一元二次方程和简单的二元二次方程组奠定数与式的基础；函数及其图象与统计初步独立成章，安排在最后。

有理数的知识在初中阶段至关重要，把有理数的概念和运算集中在一起，花费一定的时间，集中精力学好是十分必要的。

这种结构符合数、代数式、方程和不等式、函数、统计初步各部分知识内在的逻辑关系。

这种结构是在数扩充的基础上，把代数式、方程和不等式分成三个部分：由小学学的非负有理数扩充到有理数之后，安排了整式的加减、一元一次方程、一元一次不等式和一元一次不等式组；接着在有理数的基础上安排了整式的乘除、因式分解、分式、可化为一元一次方程的分式方程；把有理数扩充到实数以后，安排了二次根式、一元二次方程、简单的二元二次方程组，穿插进行安排。这样安排前面所学的知识，可以及时在学习后面的知识时得到应用，得到巩固，同时也符合学生由浅入深、由易到难的认识过程。

由于把负整数指数幂的概念及其运算移到分式部分，把简单公式的变形安排在可化为一元一次方程的分式方程部分，有利于学生在学习物理知识，化学知识的过程中应用数学知识。

从上面的分析可以知道，这种在数扩充的基础上，把数、代数式、方程和不等式穿插安排，函数及其图象、统计初步各自独立成章，安排在最后的框架结构，符合初中代数知识自身的系统性，兼顾与其他学科知识之间的相互协调，符合学生的认知规律，有利于学生形成一个正确的认识结构。这种安排结构是合理的。

第二章

实 数

第一节 教材分析

一、内容结构

1. 内容与联系

初中阶段学习的实数内容主要包括有理数的概念，有理数的运算法则和运算律；无理数、实数、平方根、算术平方根、立方根的概念；用计算器或数学用表计算平方、立方、平方根、立方根；近似数的相关知识。

这些内容学习时分为两个阶段，第一阶段是在小学非负有理数知识的基础上，引进负数，使学生对数的了解扩充到有理数范围，进而再学习有理数的运算。第二阶段是借助开方运算，引入无理数，将有理数扩充到实数范围，使学生对数的认识进一步深入。

有理数的概念的内容结构可以用下面的框图表示：

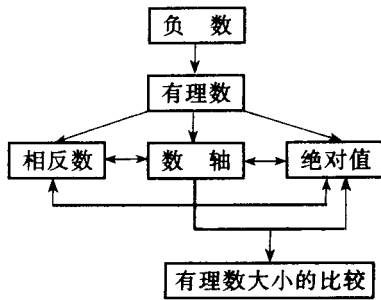


图 2-1

从图 2-1 中可以看出，在建立了有理数的概念以后，数轴为认识相反数、绝对值、有理数大小的比较，起着重要的作用。

有理数的运算的内容结构可以用下面的框图表示：

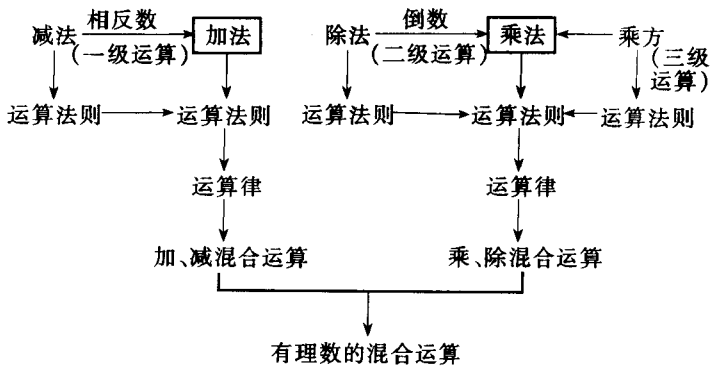


图 2-2

由图 2-2 可以看出，对于有理数的运算是依据运算法则、运算律、混合运算这样的次序进行研究的，运算之间的关

系是，减法运算通过相反数转化为加法运算；除法运算通过倒数转化为乘法运算；由于在学习有理数阶段只学习正整数次幂，因此可以把乘方理解为特殊的乘法。

实数的概念是在乘方运算的基础上，引入了开方运算而展开的，这部分知识由两部分组成，一部分是开方的运算及平方根、算术平方根、立方根的概念；另一部分是无理数、实数的概念。它们的内容结构可以用下面的框图表示：

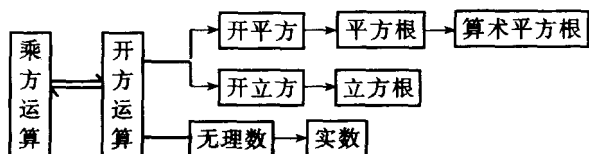


图 2-3

2. 地位与作用

初中代数由数、式、方程、不等式、函数、统计初步等几部分内容组成，无论研究哪一部分内容，最终都要归结为数的运算问题。数的知识是学习这些知识的基础。

初中代数中的这些内容联系密切，学习时需要交错进行，逐渐展开。学习了有理数，可以进一步学习整式、分式、一次方程、一次方程组、一次不等式。学习了实数，又可以进一步学习根式、二次方程、函数等内容。初中代数内容结构上的这一特征，一方面对数的学习可以做到及时巩固，及时应用，另一方面进一步突出了数的知识在初中代数中的基础作用和工具作用。

在小学学过正整数、正分数（包括正的有限小数和正的无限循环小数）、零，这些数构成非负有理数。学生在中小学对数的学习可以用下图表示：

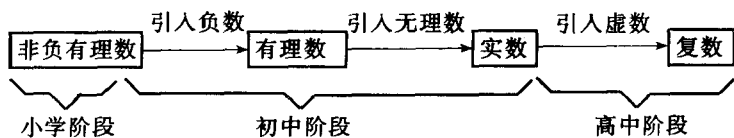


图 2-4

可以看出，初中对数的学习，在对数的认识过程中，起着承上启下的作用。

由于小学所学习的数学知识以数的知识为主体，有理数的知识又是进一步学习整式、分式、一次方程的基础，在编排上有理数的知识必然放在初中代数的靠前位置，因此，有理数的知识起着衔接中小学数学知识的作用。

在学习有理数的知识时，需要用到转化的思想方法、数形结合的思想方法、分类讨论的思想方法，这对学生理解这些基本的数学思想方法有着启蒙与奠基的作用。

负数是来源于实践中具有相反意义的量，引入负数后建立了有理数的概念系统及运算体系，可以更好地解决实践中具有相反意义的量的相关问题；正数与负数、加法与减法、乘法与除法等内容，体现了对立统一、相互联系、相互转化等辩证唯物主义的观点，通过初中实数部分知识的学习，对培养学生良好的品质、辩证唯物主义观点也有着重要作用。

初中实数部分的知识，在初中数学学习中有着重要的地位和多方面的作用。

3. 重点与难点

初中阶段学习的实数知识的教学重点是有理数的运算，平方根、算术平方根、立方根的概念和性质。

学习有理数的有关概念、运算法则、运算律等知识，直接的目的就是为了学习有理数的运算，通过学习有理数的运算

又可以进一步加深理解有理数的有关概念、运算法则、运算律,有理数的运算是初中数学、高中数学以及其他一些学科的重要基础.显然,有理数运算是本部分内容教学重点之一.

平方根(含算术平方根)、立方根的概念和性质,是学习二次根式、一元二次方程等知识的重要基础.平方根、立方根是最简单的方根,无论是建立概念的方法,以及它们的性质都具有代表性,是进一步学习偶次方根、奇次方根的基础.这些内容也是本部分教学的重点.

对于有理数的加法法则和乘法法则的合理性,学生理解起来比较困难;无理数概念的建立,需要具有一定的抽象思维能力和初步的极限概念.这两部分内容是本部分教学的难点.

二、教学要求

1. 知识技能教学的具体要求

(1) 了解有理数、无理数、实数的意义,会把给出的具体的数按要求进行归类.

(2) 了解数轴、相反数、绝对值的概念,会用数轴上的点表示整数和分数,了解实数与数轴上的点一一对应.

(3) 了解平方根、算术平方根、立方根的概念,会用根号表示数的平方根、算术平方根与立方根.

(4) 掌握有理数大小比较的法则,会用不等号连接两个或两个以上不同的有理数.

(5) 理解有理数的加、减、乘、除、乘方的意义,熟练掌握有理数的运算法则、运算律、运算顺序以及有理数的混合运算(不超过6个数),会用计算器求一个数的平方与立方(尚无条件的学校可使用算表).

(6) 了解倒数概念,会求有理数的倒数.

(7) 了解开方与乘方互为逆运算,会用平方运算求某些非