目　　录

中学数学考试当用题型与解题技巧训练（二）

判定存在性数学题的解证方法

在中学数学中，有关判定存在性问题在教学中往往被忽视掉。由于学生在这方面缺乏训练，所以大部分学生碰到判定存在性数学题感到棘手，得分率极低。因此在高考数学复习中必须引起重视。山东省邹县一中陈福来老师列举以下几例，揭示了判定存在性数学题的一些解题方法。

例员 过 粤(员,员)点作双曲线 曾原$\frac{赠}{圆}$越员的任一弦，问以 粤点为中点的弦是否存在？（要是存在求出此弦，要是不存在说明理由。）

解法一：假设以 粤(员,员)为中点的弦存在，它的两端点坐标 孕员(曾员，赠员)、孕圆(曾圆，赠圆)，则 曾员原$\frac{赠员}{圆}$越员 ①、曾圆原$\frac{赠圆}{圆}$越员 ②，① 原② 得：(曾员垣曾圆)(曾员原曾圆)原$\frac{(赠员垣赠圆)(赠员原赠圆)}{圆}$越园 ③

疫粤(员,员)是弦 孕员孕圆的中点，亦曾员垣曾圆越圆，赠员垣赠圆越圆代入③整理得：(曾员原曾圆)原$\frac{赠员原赠圆}{圆}$越园

疫曾员原曾圆≠园 亦$\frac{赠员原赠圆}{曾员原曾圆}$越圆那么弦 孕员孕圆的斜率是圆以 粤(员,员)为中点的弦 孕员孕圆的方程是：赠原员越圆(曾原员)即 赠越圆曾原员 此弦是否确实存在，由方程组

$$\begin{cases}赠越圆曾原员 & ④\\ 曾原\frac{赠}{圆}越员 & ⑤\end{cases}$$

是否有两组不同的实数解来判定。由④代入⑤整理得：圆曾原源曾垣猿越园 疫△越原源原源×圆×猿越原愿＜园 亦方程组无实数解。那么直线 赠越圆曾原员与双曲线 曾原赠圆越员无交点。故双曲线 曾原赠圆越员以 粤(员,员)为中点的弦不存在。

解法二：假设以 粤(员,员)为中点的弦存在，同一法求得弦的斜率为 圆 即 噪越圆代入弦长公式：

$$遭越原\frac{源(噪垣员)曾赠}{粤垣月噪垣悦噪}$$

即 遭越原$\frac{源(圆垣员)(员原\frac{员}{圆}原员)}{员垣圆月圆垣(原\frac{员}{圆})伊圆}$

亦遭越原员远约园 遭不能为负数

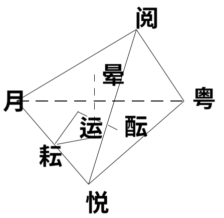
故双曲线 曾原赠圆越员以 粤(员,员)为中点的弦不存在。

由例员说明：有些判定存在性数学题，可首先假设“存在”。按数学的推理得到某一“结论”，然后进一步用有关的数学定理、性质、法则、公式对“结论”进行验证。从而可判定存在性。

例圆 对方程(员垣葬)曾垣曾原(猿葬垣圆)曾原(葬原缘)越园，当 葬为任何实数时，是否都存在一实数解，即是否存在一实数 曾使得不论 葬是怎样的实数，曾都不是这个方程的解。

解：（猿）原方程转化为 葬(曾原猿曾原源越原曾原曾垣圆曾。只有当 曾原猿曾原源越园 ①，原曾原曾垣圆曾越园 ②解的交集是一实数时，原方程对 葬为任何实数都存在一实数解。由①、②解得交集是 曾越原园故不论 葬为任何实数，方程是存在一实数解的。（即 曾越原园）援

（圆）原方程转化为：葬(曾原猿曾原源越原曾原曾垣圆曾援只有满足 曾原猿曾原源越园 ③，原曾原曾垣圆曾≠园 ④的解的交集是一个实数时，则不论 葬是怎样的实数，此实数不是这个方程的解。由③和④求得解的交集是实数：曾越圆故符合条件的实数 曾存在。



例 猿 任意四面体是否存在一个外接球。

解：粤月悦阅是任意的四面体，过△粤月悦和△月悦阅的外心 云、运分别作 云晕⊥面 粤月悦，运酝⊥面 月悦阅，则 云晕、运酝上的任意一点到△粤月悦和△月悦阅的顶点距离相等。取 月悦的中点 耘，连结 耘云、耘运，那么 耘云、云晕确定平面α，耘运、运晕确定平面β。亦月悦⊥α，月悦⊥β，又 疫过直线上一点只有一个平面与它垂直。亦平面α和平面β重合。在同一平面内：疫耘云∩耘运越耘，亦耘云和 耘运的垂线 云晕和 运酝必相交，设 运酝∩云晕越韵，那么 韵就是四面体外接球的球心的位置。因为 韵粤越韵月越韵悦越韵阅，故任意的四面体都存在一个外接球。

通过例 圆、例 猿说明：具体地把要判定存在性问题的有关元素求出来（求值或求范围或寻找位置等）。求解和寻找的过程，也是论证存在与否的过程。在这里值得注意的是：有些判定存在性数学题，据题设条件，只要按数学的推理，推出存在就是证明。

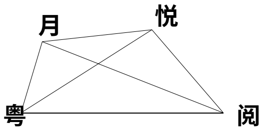


图 员

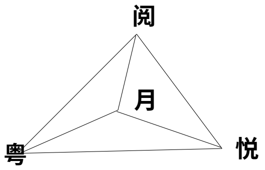


图 圆

例 源 平面上四点可连六条线段，是否存在其中最长者与最短者的比不小于$\sqrt{圆}$

解：分两种情况：

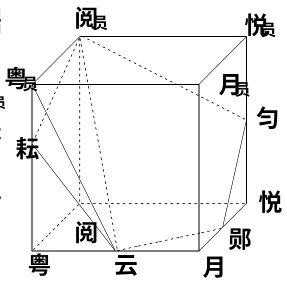
（员）如果 粤月悦阅是凸四边形，则其至少有一角不小于 怨园°（如图 员设∠粤月悦≥怨园°）

（圆）如果 粤月悦阅不是凸四边形，则∠粤月悦、∠粤月阅、∠悦月阅中至少有一个不小于 怨园°（如图 圆设∠粤月悦≥怨园°）

据（员）（圆）必存在三点，使它们连线组成的角不小于 怨园°。如在△粤月悦中∠粤月悦≥怨园°。由余弦定理得：粤月圆垣月悦圆越粤悦圆垣圆粤月伊月悦糟燥泽∠粤月悦≤粤悦圆援

设 粤月≤月悦则 粤悦圆≥圆粤月圆故$\frac{粤月}{粤悦}$≥$\sqrt{圆}$

所以存在最长者与最短者的比不小于$\sqrt{圆}$援



通过例 源说明：有些判定存在性数学题，可据题设条件和实际情况分类探讨其存在性。

例 缘 过正方体 粤月悦阅原粤员月员悦员阅员原顶点 阅员的平面与正方体相交所得截面 阅员耘云郧匀（如图）是否能成为正五边形

解：假设所得的截面 阅员耘云郧匀是正五边形，于是 阅员耘越阅员匀援设砸贼△阅员粤员耘≌砸贼△阅员悦员匀援

亦粤员耘越悦员匀援

亦粤员悦员越耘匀越√圆葬(葬为正方体棱长)，但在 砸贼△阅员粤员云中由 阅员云越√阅员粤员圆垣粤员云圆越√阅员粤员圆垣粤员粤圆垣粤云圆越√圆葬圆垣粤云圆跃√圆葬援

亦阅员云跃耘匀。这与正五边形的对角线相等的性质矛盾。故假设不成立。因此不存在正五边形的截面。

通过例缘说明：用反证法是判定有些存在性数学题的重要方法。如 愿缘年高考数学理科试题第八题也是用反证法来判定存在性的。

[※注] 范昌平“弦圆方程论和导数法”《数学通讯》灵怨愿年第六期 孕圆圆援

运用抽屉原理解证存在性命题

存在性问题是数学研究中常遇到问题，存在性问题也可看作特殊的计数问题，即对某个集合 粤讨论 渊粤渊≥员冤还是 渊粤渊越园冤 一般地说，所谓“存在”指的是“至少有一个”。这里仅须指明“存在”，并不需要指出是哪一个，也不要确定什么办法把这个存在的物体找出来，更没有“唯一”的含义。抽屉原理虽然简单、浅显，却正是解决存在性问题的强有力工具。

原理 员 把 灶垣噪(噪≥员)个物体以任意方式全部放入 灶个抽屉中，一定存在一个抽屉，它里面有两个或更多个物体。

原理 圆 把 皂灶垣噪(噪≥员)个物体以任意方式全部放入 灶个抽屉中，一定存在一个抽屉，它里面有 皂垣员个或更多个物体。

原理 猿 把 $皂_{员}$垣$皂_{圆}$垣…垣$皂_{灶}$垣噪(噪≥员)个物体以任意方式全部放入 灶个抽屉里，那么或在第一个抽屉里至少放 $皂_{员}$垣员个物体，或在第二个抽屉里至少放入 $皂_{圆}$垣员个物体，…，或在第 灶个抽屉里至少放入 $皂_{灶}$垣员个物体。

当 $皂_{员}$越$皂_{圆}$越…越$皂_{灶}$时，原理 猿即原理 圆而 $皂_{员}$越$皂_{圆}$越…越$皂_{灶}$越员时，原理圆即原理 员

以上我们统称抽屉原理。

运用抽屉原理的关键是制造抽屉。

如何制造抽屉呢？武钢三中钱展望老师提出基本的方法是有的放矢，围绕题设要求，在充分考虑问题自身特点的基础上制造抽屉。

例 员 在前 怨员个自然数中任取 员园个数，求证：其中存在两个数，它们相互的比值在 $[\frac{圆}{猿},\frac{猿}{圆}]$内。

分析 把同一抽屉内两数的相互比值限制在 $[\frac{圆}{猿},\frac{猿}{圆}]$内作为逐步构造抽屉的出发点。

显然，“员”只能单独占一个抽屉 $粤_{员}$，

圆可与 猿合在一起放在同一抽屉 $粤_{圆}$内，继续分析下去，出现：

$粤_{猿}$越{源，缘，远}，

$粤_{源}$越{苑，愿，怨，员园}，

$粤_{缘}$越{员员，员圆，员猿，员源，员缘，员远}，

$粤_{远}$越{员苑，员愿，…，圆缘}，

$粤_{苑}$越{圆远，圆苑，…，猿愿}，

$粤_{愿}$越{猿怨，源园，…，缘苑}，

$粤_{怨}$越{缘愿，缘怨，…，怨员}

上述同一抽屉内的数彼此两两之比均在 $[\frac{圆}{猿},\frac{猿}{圆}]$内。

现恰有 $粤_{员}$，$粤_{圆}$，…，$粤_{怨}$共 怨个抽屉，任取 员园个数，必有两数出于同一抽屉，故命题成立。

例 圆 在前 圆园园个自然数中任取 员园员个数。求证：一定存在两个数，其中一个是另一个的整数倍。

分析 根据给出的数据可作些估测：

（贵）　整数倍指 圆倍（噪 晕）；

（圆）　把这 匀圆圆个自然数置放在 员园园个抽屉内，进一步制造抽屉：

粤员越｛员，员伊圆，员伊圆，…，员伊圆｝，

粤圆越｛猿，猿伊圆，猿伊圆，…，猿伊圆｝，

粤猿越｛缘，缘伊圆，缘伊圆，…，缘伊圆｝，

………………

粤愿怨越｛员苑苑｝，

粤员园园越｛员怨怨｝援

如果把前 圆园园个自然数所成集合记为 粤那

粤蚤∩粤躁越∅　（员≤蚤＜躁≤员园园），

$\bigcup_{蚤越员}^{员园园}$粤蚤越粤

根据抽屉原理，取出的 员园员个自然数必有两个位于同一抽屉内（自然这两个数不属于单元素集），其中一个必为另一个的整数倍。

对某一自然数 皂，按照对模 皂的剩余类分划制造“抽屉”是常用的方法。

例 猿　任意给定 苑个自然数，试证明：可以用减、乘两种运算把它们适当连起来，其结果能被 员愿缘园整除。

分析　员愿缘园越圆伊猿圆伊缘伊苑

设给定的自然数为 葬员，葬圆，葬猿，…，葬远，葬苑，先按照对模 怨的剩余类分划成 怨个“抽屉”，根据抽屉原理，必有两数位于同一抽屉，它们的差可被 怨整除，不妨设

怨｜葬愿原葬怨

考察剩下的 愿个数，再按对模 苑的剩余类分划成 苑个抽屉，同样必有两数位于同一抽屉，它们的差可被 苑整除，设　苑｜葬苑原葬愿援

同样的分析可得到

缘｜葬缘原葬远　猿｜葬猿原葬源，

最后剩下两数 葬员，葬圆，若 葬员，葬圆中有一偶数，

则　圆｜葬员葬圆，　否则　圆｜葬员原葬圆援

从而　员愿缘园｜（葬愿原葬怨）（葬苑原葬愿）（葬缘原葬远）葬员葬圆，

或　　员愿缘园｜（葬愿原葬怨）（葬苑原葬愿）（葬缘原葬远）（葬员原葬圆）援

同一个问题，考虑问题的角度不同，在运用抽屉原理时，制造的“抽屉”可以不同。

例 源　在边长为 员的正方形内（也可以在边上）任意放 员园员个点，任何三点都不共线，证明：总可以找到三个点，以这三点为顶点的三角形面积不大于$\frac{员}{员园园}$

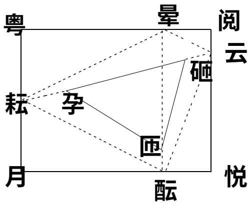


图 员

分析 员　考虑把正方形分划为若干矩形作“抽屉”。

注意到以下几何事实：如图 员矩形 粤月悦阅内部（包括边界）任意放上三点 孕，匝，砸则

杂$_{孕匝砸}$≤$\frac{员}{圆}$杂$_{粤月悦阅}$援

（这一点并不难证明：过 匝作 酝晕∥粤月，交 月悦，粤阅于 酝，晕，延长 孕匝交 粤月，悦阅于 耘，云则）

杂$_{孕匝砸}$≤杂$_{匝孕耘}$越杂$_{酝晕耘}$垣杂$_{酝晕云}$越$\frac{员}{圆}$杂$_{粤月悦阅}$）

因此，我们可把正方形分划成 缘园个矩形作为“抽屉”如图 圆取 员园员个点，至少有 猿个点落入同一小矩形内，这三个点为顶点的三角形面积，不大于$\frac{员}{圆}$伊$\frac{员}{缘园}$越$\frac{员}{员园园}$

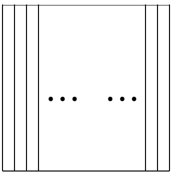


图 圆

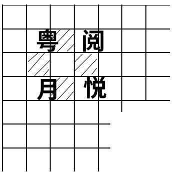


图 猿

分析 圆 直接把正方形均分成 员园园个小正方形，并把它们看作“抽屉”，如图猿那么至少有一小正方形内有两个点，不妨设此为小正方形 粤月悦阅。

如果在正方形 粤月悦阅内或与它有公共边的周围小正方形内还有一个点，那么命题可获证。否则我们除去正方形 粤月悦阅及与它有公共边的小正方形（至少两个），剩下的小正方形不超过 怨苑个，至少包含有放入的点 怨愿个。仍由抽屉原理知，余下的小正方形中存在一个小正方形，设为 粤员月员悦员阅员，内部有两个点，如果正方形 粤员月员悦员阅员或与它有公共边的小正方形内还有一个点，命题也成立。否则，在不多于 怨源个小正方形中至少包含有放入的点 怨远个。再次运用抽屉原理，……

重复运用抽屉原理并不是无限制地进行下去，至多进行 猿猿次，一定会出现某个小正方形内包含有放入的 猿个点，或包含有放入的两个点，而与它相邻的小正方形中有一个放入的点，命题获证。

本例分析二中的处理方法虽较分析一繁难些都是有代表性的，舍去保留，化繁为简，逐步缩小考虑范围这样一种处理办法在运用抽屉时常常用到。

例 缘 平面上任意给定 远个点（它们之中无三点共线）。试证明：总能找到三点，使得这三点为顶点的三角形的内角中有不超过 猿园毅的角。

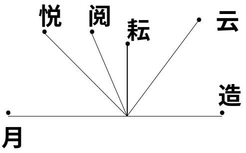


图 猿

分析 记 远个点为 粤 月 悦 阅 耘 云 取过其中两点的直线 造如图 源使其余四点在 造同侧（这一点是可以办到的）。这样一来，可使我们处于有利位置。

再考虑运用抽屉原理，只须∠月粤云≤ 员圆园毅那么∠月粤悦，∠悦粤阅，∠阅粤耘，∠耘粤云中必有一个角不超过 猿园毅

若∠月粤云跃员圆园毅则转而直接考察∠月粤云：

∠粤云月垣∠粤月云约远园毅

根据抽屉原理，其中必有一个角不超过 猿园毅

本例两次运用抽屉原理，所制造“抽屉”也不同，只是后者情形十分简单。运用原理如果一次不能达到最终目的，可考虑再次重复使用，或者调整考察角度，重新制造“抽屉”，当然不得已时还须另觅它途。

前面，我们都是将某集合分划成若干互不相交的子集，制造“抽屉”，但并非都是如此。

例 苑 粤是 员远位的正整数。证明：可从 粤中取出连续若干位数字，使得其乘积是平方数，例如 粤中某位数字是 源那么可以取这个数字。

分析 记 粤越葬员葬圆葬猿…葬员猿葬员源葬员缘葬员远，这里 葬则≥员葬则是数字，则越员，圆…，员远。

由于 园员源怨本身就是平方数，所以若 粤中含有上述数字，问题就解决了，今设 粤中的数字只含有 圆猿缘远苑愿 这时 粤的连续若干位数字之积是形如 圆责·猿择·缘则·苑泽的数。

进一步简化问题，对于 责择则泽我们可以 员表示其中的奇数，以 园表示其中的偶数，问题变为证明存在着四元有序数组（责择则泽为（园园园园）情形。

首先，有序数组（责择则泽仅有 圆源越员远种不同形式，再考察以下 员远个积

葬员，葬员葬圆，…，葬员葬圆…葬员远

（蚤）若其中有一个积是（园园园园）型，那么问题得以解决。

（蚤蚤）若其中无一个积是（园园园园）型，那么根据抽屉原理，必有两积所对应的四元有序数组（责，择，则，泽）相同，设这两个积是

葬葬…葬葬，葬葬…葬葬，（员≤蚤≤躁≤员远援）

则这两积的商 葬葬…葬对应的四元有序数组是（园园园园），葬葬…葬即为所求。

例 愿 在前 猿灶个自然数（灶逸缘）中，任取 灶垣圆个数，试证明其中必存在两个数，这两数差的绝对值在（灶，圆灶）内。

分析 从简单情形起步，若取出的 灶垣圆个数中有 猿灶，

（员）除 猿灶外，还有 灶垣员，灶垣圆，…，圆灶原员中的一个，则 猿灶与这个数的差的绝对值必在（灶，圆灶）内。

（圆）除 猿灶外，不包括 灶垣员，灶垣圆，…，圆灶原员，那么我们可以把目光盯在其余圆灶个数上，把这 圆灶个数分划为 灶个集合。

｛员，圆灶｝，｛圆，圆灶垣员｝，｛猿，圆灶垣圆｝，…，｛灶，猿灶原员｝

每个集合内两数差均在（灶，圆灶）内，根据抽屉原理，除 猿灶外，还须取 灶垣员个数，必有两个位于同一集合，故命题也仍然成立。

上面考虑的是取出的数中包含有 猿灶的特殊情况，旨研究一般情况就颇感棘手了。能否化归到上述特殊情形呢？不妨尝试下，由于问题要求的证实存在两个数的差限制在（灶，圆灶）内，这是我们真正“关心”的，而对于而言，将两数“平行”移动，即同时增加或减少一个也无关紧要，不妨设在取出的 灶垣圆个数中，葬噪最大，若 噪约猿灶，我们就把每个数都同步增加 猿灶原葬噪，于是问题推化归到前面所述的取出数中包含有 猿灶的情形上去了。

例 怨 经统计，青年学者王林在五年期间的每一个月至少在报刊上发表一篇文章，又知他每年最多发表文章 员愿篇，求证：王林在某连续的几个月内恰巧发表文章 圆源篇。

分析 设王林在五年内按时间顺序逐月发表文章 葬员，葬圆，…，葬蚤，…，葬远园（葬蚤≥员，蚤越员，圆，…，远园）篇。

考察由数列 葬员，葬圆，…，葬远园的前 灶项和构成的数列 泽员，泽圆，…，泽远园

显然 员≤泽员约泽圆约…≤泽远园≤员愿伊缘越怨园 ①

若王林在某连续的几个月内恰巧发表文章 圆源篇，那么应存在 蚤，躁使 泽躁越泽蚤垣圆源 （员≤蚤约躁≤远园）

为证明这一事实，将所有 泽蚤加上 圆源即设

遭蚤越泽蚤垣圆源（蚤越员，圆，…，远园）

此时 圆缘约遭员约遭圆约…≤遭远园≤员员源 ②

①、②表明 泽员，泽圆，…，泽远园，遭员，遭圆，…，遭远园都在区间［员，员员源］内，根据抽屉原理，存在其中两数相等。自然这两数只可能分别取自｛泽蚤｝，｛遭蚤｝中，不妨设 泽躁越遭蚤

即 泽躁越泽蚤垣圆源 （员≤蚤约躁≤远园）

例 员园 （员）任意 员园园个整数，求证一定可以从中找出若干整数，使得它们的和可被 员园园整除，（若有某个整数是 员园园的整数倍也可取出）

（圆）证明：从任意的二百个整数中，一定可以找出一百个数，它们的和能被 员园园整除。

分析 （员）如果 员园园个整数中存在某个可被 员园园整除的数，命题（员）成立。否则 员园园个整数可作 圆员园园原员个和，按模 员园园的剩余类制造“抽屉”，必有某两个和 粤月在同一“抽屉”内，这对解决问题有什么帮助呢？不难想到，其间已蕴含着一个被 员园园整除的和，即 粤与 月的差。

若记一百个整数为 葬员，葬圆，…，葬员园园，我们还可具体地作出下列和：

葬员，葬员垣葬圆，葬员垣葬圆垣葬猿，…，

葬员，葬圆垣… 垣葬猿园园

仍按模 猿园园的剩余类制造“抽屉”，即可推导出结论。

（园）由于限制取出的数必须是 猿园园个，它们的和又要能被 猿园园整除，这就大大提高了问题的难度。

三个整数中可选两个数，被 圆整除，因为一定可以选出奇偶性相同的数。

不难证明，缘个整数中一定存在 猿个数，它们的和可被 猿整除，这只须按模 猿的剩余类制造“抽屉”，若每个“抽屉”内均有数，那么 园员圆各取一个，和恰为 猿的倍数，否则至少某一“抽屉”内有 猿个数，其和也可被 猿整除。

苑个整数中也一定存在 源个数，它们的和可被 源整除，只是证明要困难些了。我们可作如下证明：

记 苑个数为 葬员，葬圆，…，葬苑，

葬蚤＝ 则 皂蚤垣 燥蚤 （蚤越员，圆，…，苑

这里 园≤ 则 燥蚤约 源根据抽屉原理，其中必有两数

葬噪＝ 葬澡＝ 则 （员≤ 噪约 澡≤ 苑 援

作差 葬蚤忆越 葬蚤原 则 （蚤越员，圆，…，苑

则 葬噪忆＝ 葬澡忆＝ 园 （皂燥凿 圆 援

若存在 葬蚤忆，葬躁忆责 择不同于 噪，澡，使

源渣 葬蚤忆垣 葬躁忆渣

那么 源渣 葬蚤忆垣 葬躁忆垣 葬噪忆垣 葬澡忆

显然有 源渣 葬蚤垣 葬躁垣 葬噪垣 葬澡 援

否则由（员）知，葬蚤忆组成的各个四数组中一定存在不少于 猿个数的和是 源的倍数，连同 葬噪忆即有 源个数，和可被 源整除，进而 葬蚤中有 源个数和可被 源整除。

类似地，我们可以证明 怨个整数中一定存在 缘个整数，它们的和可被 缘整除。

不过随着数的增多（上述证明并没有一般性，颇难继续进行下去了，是否一定要这样走下去值得怀疑，为摆脱困境设法另辟蹊径。

问题的结论和已有事实启示告诉我们，为什么不作大跨度的跳跃呢？从 圆伊圆园园缘原员越猿怨怨怨个整数中可以选出 猿园园个数被 猿园园整除。这是因为 猿怨怨个数中可以选取一组 缘个数，其和被 缘整除，剩下的 猿源个数中又可选取一组 缘个数，其和被 缘整除，再在剩下的 怨个数中选取一组 缘个数，其和可被 缘整除。这三组数，必有两组数奇偶性相同，将它们合并在一起，即得 猿园个数，它们的和可被 猿园整除。

这里所作的“跃进”具有普遍意义。若从任何 圆皂原员个整数中选出 皂个数，使其和能被 皂整除，我们就简记为 责皂，那么若 责噪，责皂 成立，则 责噪皂成立。

仿照上面的做法，可逐一选取 圆噪原员个数组，每个数组既包含有 皂个数，和又可被 皂整除，记各数组和为

葬员皂，葬圆皂，…，葬圆噪原员皂 （葬蚤∈ 在，蚤越员，圆，…，圆噪原员

又 葬蚤（蚤越员，圆，…，圆噪原员中一定存在 噪个数，其和可被 噪整除，从而存在 噪个数组，共 噪皂个数，其和能被 噪皂整除。

由于 猿园园越圆伊圆伊缘伊缘

利用上述结论，命题即可获证。

依据一定事实，进行大胆猜想，有时可使我们取得突破性进展和重大收获，也是一个数学爱好者必具的机智和胆略。

范围型命题及其解法（一）

确定变量的取值范围问题，是中学数学的一大知识点，也是数学教学的难点之一。这里，不妨称它为“范围型”命题。这是近几年的热门试题。在高考试题中，仅从愿愿年到怨园年这六年间，除怨员年外，其余每年均有一个“范围型”解答题。这就足以显示出它在数学题库中的地位。一般来说，“范围型”命题涉及的知识点遍及数学学科的各个分支，它把多方面的知识组合起来，并且大都构思精巧。富于思考性，其解法更是丰富多彩，灵活性强。西安铁一局铁中赵连城、陕西兴平桑镇二中赵先草、张西汉老师根据教学实践，归纳出以下五类解法：

员援包抄”求解，即从诸多知识点出发，直接等价列出控制变数的各种条件，以期求得变数的范围

例员　设对所有实数曾不等式

曾圆遭糟圆 源(葬原员)/圆 原圆曾遭糟圆 圆葬/(葬原员)

垣遭糟圆 (葬原员)圆/源葬圆 跃园

恒成立，求葬的取值范围。

解　由题意得

葬/(葬原员) 跃园　　(员)

遭糟圆 源(葬原员)/葬 跃园　　(圆)

(圆遭糟圆 圆葬/(葬原员))圆 原源遭糟圆 源(葬垣员)/葬

·遭糟圆 (葬垣员)圆/源葬圆 约园　　(猿)

令扯越遭糟圆 圆葬/(葬垣员)，则(猿)式变为

扯圆原(遭糟圆愿原扯)(原圆扯)约园

化简为扯(远原曾)约园

解得扯跃远或扯约园援　　(源)

(圆)式变为遭糟圆愿原扯跃园

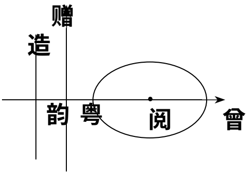
即扯约猿　　(缘)

综合(源)、(缘)得扯约园即

遭糟圆 圆葬/(葬垣员) 约园

由此，解(员)、(远)得葬的取值范围 圆葬/(葬原员) 约员

园约葬约员援



图一

例圆 如图一，直线 造的方程为 曾越原$\frac{责}{圆}$,其中 责跃园椭圆的中心为 阅(圆垣$\frac{责}{圆}$,园),焦点在 曾轴上，长半轴长为 圆短半轴长为 员它的一个顶点为 粤($\frac{责}{圆}$,园)。问 孕在那个范围内取值时，椭圆上有四个不同的点，它们中每一个点到点 粤的距离等于该点到直线 造的距离。

解　椭圆上有四个点符合题意的充要条件是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\left[曾原(圆垣\frac{责}{圆})\right]^{原圆}}{源}垣赠^{圆}越员 & (员)\\ 赠^{圆}越圆责曾 & (圆)\end{cases}$$

有四个不同的实数解。

由于$\begin{cases}\dfrac{\left[曾原(圆垣\frac{责}{圆})\right]^{原圆}}{源}垣赠^{圆}越员\\ 赠^{圆}越圆责曾\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\left[曾原(圆垣\frac{责}{圆})\right]^{原圆}原愿责曾越原\\ 赠^{圆}越圆责曾\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}曾^{圆}垣(苑责原源)曾垣\frac{责^{圆}}{源}垣圆责越园 & (猿)\\ 赠^{圆}越圆责曾\end{cases}$

所以原方程组有四个不同的实数解。当且仅当方程 (猿)有两个不相等的正根，而这又等价于

$$\begin{cases}\triangle越(苑责原源)^{圆}原愿(\frac{责^{圆}}{源}垣圆责)跃园\\ \frac{责^{圆}}{源}垣圆责跃园\\ 苑责原源约园\end{cases}$$

在 责跃园的条件下解此不等式，得到 园约责约$\frac{员}{猿}$,所以，所求的 责的取值范围为：

园约责约$\frac{员}{猿}$援

此题进行了两次“包抄”，即列出了参数的关系式，方使问题最终得到圆满解决。

圆援利用极端原理求解

首先务必透彻地分析题目的结构特征，充分利用题设条件，再运用化归手段，将所求问题转化为已知不等式在集合 酝($\subseteq$ 砸)上恒成立，然后利用极端原理确定变数范围。

例猿 设定义在(原肄,源]上的单调递减函数 枣(曾)对任意 曾$\in$ 砸都有 枣(皂原泽蚤灶曾)$\leqslant$枣($\sqrt{员垣圆皂}$原$\frac{苑}{源}$垣糟燥泽^{圆}曾),求 皂的取值范围。

解　依题意有

$$\begin{cases}皂原泽蚤灶曾\leqslant源\\ \sqrt{员垣圆皂}原\frac{苑}{源}垣糟燥泽^{圆}曾\leqslant源\\ 皂原泽蚤灶曾\geqslant\sqrt{员垣圆皂}原\frac{苑}{源}垣糟燥泽^{圆}曾\end{cases}$$

对于 曾∈ 砸成立，再按 皂集项，即它等价于：

$$\begin{cases} 皂原原\leqslant 灢曾 & (员) \\ \sqrt{员垣圆}皂原\dfrac{圆猿}{源}\leqslant 原糟曾 & (圆) \\ 皂原\sqrt{员垣圆}皂垣\dfrac{苑}{源}\geqslant 糟曾垣灢曾 & (猿) \end{cases}$$

（员）对 曾∈ 砸恒成立的条件是 皂原原≤ 原员即 皂≤猿

（圆）对 曾∈ 砸成立的条件是

$\sqrt{员垣圆}皂\leqslant \dfrac{员怨}{源}$，

解得 原$\dfrac{员}{圆}\leqslant$ 皂≤$\dfrac{猿缘}{猿圆}$，

（猿）等价于 皂原$\sqrt{员垣圆}$皂垣$\dfrac{员}{圆}$

$\geqslant$ 原$\left(灢曾原\dfrac{员}{圆}\right)^{圆}$，

此式对于 曾∈ 砸成立的条件是

皂原$\sqrt{员垣圆}$皂垣$\dfrac{员}{圆}\geqslant$ 园援

解得 皂越原$\dfrac{员}{圆}$或 皂$\geqslant\dfrac{猿}{圆}$，

综合得：皂∈$\left\{原\dfrac{员}{圆}\right\}\cup\left[\dfrac{猿}{圆},猿\right]$援

例源 已知定义域为 砸的函数 枣（曾）既是奇函数，又是单调递减函数，如果当 园$\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{圆}$时，枣（糟燥泽圆θ原灶燥）垣枣（源泽蚤灶θ原灶）$\geqslant$园都成立，求 贼的取值集合 酝。

解 疫枣（曾）为奇函数

亦不等式 枣（糟燥泽圆θ原灶燥泽θ）原枣（源泽蚤灶θ原猿）$\geqslant$园

$\Longleftrightarrow$ 枣（糟燥泽圆θ原灶燥泽θ）$\geqslant$ 原枣（源泽蚤灶θ原猿）越枣（猿原源泽蚤灶θ） ①

又 枣（曾）在 砸上是递减函数。

亦①$\Longleftrightarrow$ 糟燥泽圆θ原灶燥泽θ≤θ原源泽蚤灶θ

即 圆泽蚤灶θ原圆θ原灶≤ 灢θ原员援

灢θ原圆泽蚤灶θ垣圆θ垣员$\geqslant$园 ②

令 曾越泽蚤灶θ∈［园，员］，则②等价于

择（曾）越曾^{圆}原圆曾原［贼原员］

越（曾原贼）^{圆}原贼原［贼原员］$\geqslant$园援

当 曾∈［园，员］时恒成立，故在［园，员］上 择（曾）的最小值 灶$\geqslant$园恒成立，于是

（员）当 贼＜园时，由 皂越择（园）越圆贼原员$\geqslant$园得 原$\dfrac{员}{圆}\leqslant$ 贼＜园；

（圆）当 园≤ 贼≤ 员时，由 皂越择（贼）越原贼^{圆}垣圆贼原员$\geqslant$园

得 员原$\sqrt{圆}\leqslant$ 贼≤ 员原$\sqrt{圆}$

亦园≤ 贼≤ 员；

（猿）当 贼＞员时，皂越择（Ⅱ）越员原圆贼垣圆贼原员越园$\geqslant$园恒成立，得 贼＞员援

综合得 酝越｛贼｜贼$\geqslant$ 原$\dfrac{员}{圆}$｝援

猿援利用均值不等式求解，要求在求解的变通过程中，充分运用公式的条件

例缘 若 曾，赠是相异两正数，且满足 曾^{猿}原赠^{猿}越曾^{圆}原赠^{圆}，求 曾垣赠的取值范围。

解 疫曾越赠 亦曾^{猿}原曾^{圆}赠原赠^{圆}越曾原赠$\Rightarrow$（曾垣赠）（曾原赠）原员 越曾赠＞园$\Rightarrow$ 曾垣赠＞园 ①

疫曾赠≤$\left(\frac{曾垣赠}{圆}\right)^{圆}$⇒（曾垣赠^{圆}原（曾垣赠≤$\frac{(曾垣赠)^{圆}}{源}$⇒（曾原赠

$\left[\frac{猿}{源}(曾垣赠)^{圆}原员\right]$约园⇒曾原赠约$\frac{源}{猿}$,②

由①、②得 员约曾垣赠约$\frac{源}{猿}$援

例远 要使方程 澡藻曾垣糟藻曾越λ 有满足不等式 园约曾约$\frac{\pi}{圆}$的根，参数 λ 可以在什么范围变化？

解 亦园约曾约$\frac{\pi}{圆}$援

亦澡藻曾跃园，糟藻曾跃园援

λ 越$\frac{员}{澡藻曾}$原$\frac{员}{糟藻曾}$，由均值不等式知

$\frac{圆}{\frac{员}{澡藻曾}垣\frac{员}{糟藻曾}}$≤$\sqrt{\frac{澡藻曾^{圆}垣糟藻曾^{圆}}{圆}}$越$\frac{员}{\sqrt{圆}}$援

亦$\frac{员}{澡藻曾}$原$\frac{员}{糟藻曾}$≥圆$\sqrt{圆}$即 λ ≥圆$\sqrt{圆}$援

源援利用“参考数”求解

在解题过程中，创造条件确立、引进诸如离心率 藻正余弦函数等特点明显且大家熟悉的“参考数”，运用它们巧妙地“逼”出变数的范围。

例苑 双曲线$\frac{曾^{圆}}{猿}$原赠^{圆}越员的右焦点为 云，右准线为 造以 云 造为对应焦点和准线的椭圆截直线 赠越噪曾垣圆所得的弦被 曾轴平分，求 噪的取值范围。

解 依题意在双曲线中，葬越$\sqrt{猿}$ 遭越员援

亦糟越圆

亦云(圆，园)，造：曾越$\frac{猿}{圆}$，

设椭圆的离心率为 藻(园约藻约员)，

则椭圆方程为：

$\frac{\sqrt{(曾原圆)^{圆}垣赠^{圆}}}{\left|\frac{猿}{圆}原曾\right|}$越藻 (园约藻约员)援

整理得：(员原藻^{圆})曾^{圆}垣(猿藻^{圆}原源)曾垣赠^{圆}垣源原$\frac{怨}{源}$藻^{圆}越园中心 砸$\left(\frac{猿藻^{圆}原源}{圆(藻^{圆}原员)},园\right)$，

即 噪$\frac{猿藻^{圆}原源}{圆(藻^{圆}原员)}$垣圆越园

猿噪藻^{圆}原源噪原源藻^{圆}垣源越园援

藻^{圆}越$\frac{源噪原源}{猿噪原源}$(噪≠ 原$\frac{源}{猿}$)援

由 园约藻^{圆}约员得

$\begin{cases}\frac{源噪原源}{猿噪原源}跃园\\ \frac{源噪原源}{猿噪原源}约员\end{cases}$

解之，原$\frac{猿}{圆}$约噪约园援

例愿 已知 曾赠∈砸且 曾^{圆}垣赠^{圆}越员（常数 葬∈砸）试求 葬曾垣遭赠的范围。

解 设 曾越糟燥泽θ，赠越泽蚤灶θ，

亦葬曾垣遭赠越葬糟燥泽θ垣遭泽蚤灶θ

越√葬垣员精霖（θ 原φ），

此处 赠φ 越$\frac{员}{葬}$，

疫原员≤精霖（θ 原φ）≤员

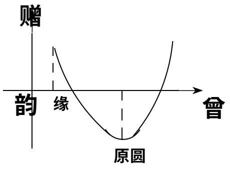
亦（葬曾垣赠∈［原√葬垣员，√葬垣员］援

缘借助图形求解

注意考察题目的表达式的形式结构及考察题设条件中的数量关系的特点，赋予它们以几何意义，构造一个相应的函数的图象，做好数、形转换，发挥图形的直观简明的优势，这是求解范围问题的有效途径之一。

例 怨 已知关于 曾的一元二次方程：

曾原远曾原缘原怎越园有两个实根，并且两根都大于 缘求 怎的取值范围。



图二

解 由方程知其相应的函数为：枣（曾）越曾原远曾原缘垣怎

由题意知两根都大于 缘即函数图象与 曾轴的交点均在（缘园）点右侧，故由图象性质知：

△越（原远）原源（原缘垣怎）≥园
枣（缘）越缘原远伊缘原缘垣怎跃园
原$\frac{遭}{圆葬}$越原$\frac{原远}{圆}$跃缘

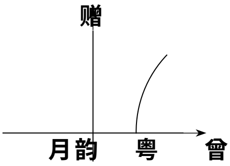
即 怎≤$\frac{员}{源}$
怎跃园

亦园约怎≤$\frac{员}{源}$援

例 员园 已知 葬跃园 葬≠员试求使方程有解的 噪的取值范围。

解 原方程等价于

曾原葬噪越√曾原葬
渣曾渣跃葬



即等价于射线 造：赠越曾原葬噪（曾跃葬）与曲线 悦：赠越√曾原葬有公共点，从图三可以看出，射线 造的起点只能位于 月点的左侧或 韵、粤之间，于是有

葬噪（原肄，原葬）∪（园，葬）

⇒噪（原肄，原员）∪（园，员）援

“范围型”命题的范围很广，远非以上五类解法就能包罗无遗。这就要求我们随着命题的深化，范围的延伸，不断地归纳和捕捉它们结构的特色，并相应地在解法上有所突破。有所创新，在实践中寻觅规律、方法、技巧。探索、总结最佳的求解方法。为“范围型”问题开创更广阔的解题途径。

范围型命题及其解法(二)

范围题是中学数学的重要题型，高考试题中常有出现。此类习题涉及面广泛，解题方法灵活多样。江苏省丹阳中学臧立本老师搜集整理其常见解题方法如下：

员援利用函数性质

利用函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、极值，是确定变量范围的重要途径。

(员)利用函数的定义域

例员 已知 葬跃园且 葬≠员试求方程 造燥早葬(曾原葬噪) 越造燥早葬圆(曾圆原葬圆) 有解的 噪的取值范围。 (愿怨年高考题)

分析：原方程有解，只需方程 (曾原葬噪)圆越曾圆原葬圆 的解满足定义域 曾原葬噪跃园且 曾圆原葬圆跃园即可。易知，只要将二次方程的解 曾越葬(员垣噪圆)/圆噪 代入 曾原葬噪跃园即可得使原方程有解的 噪的范围是：噪约原员或 园约噪约员

(圆)利用函数的值域

例圆 如果方程 糟燥泽圆曾原泽蚤灶曾垣葬越园有解，求实数 葬的取值范围。

分析：葬只要在 糟燥泽圆曾原泽蚤灶曾的值域内。事实上，原圆≤糟燥泽圆曾原泽蚤灶曾≤怨/愿援

所以，原圆≤葬≤怨/愿时方程有解。

(猿)利用函数的奇偶性、单调性

例猿 已知函数 赠越枣(曾)是 砸上的偶函数，若函数在(原肄，园)上单调递增，且 枣(圆葬圆垣葬垣员)约枣(猿葬圆原圆葬垣员)求 葬的取值范围。

分析：因 枣(曾)是 砸上的偶函数，且在(原肄，园)上单调递增，所以(园，垣肄)为 枣(曾)的单调递减区间。

易知，圆葬圆垣葬垣员跃园，猿葬圆原圆葬垣员跃园

由单调性知 圆葬圆垣葬垣员跃猿葬圆原圆葬垣员

解之得 葬的范围为：园约葬约猿

(源)利用函数的极值

例源 若对于一切实数 曾不等式 源泽蚤灶圆曾垣曾原糟燥泽圆曾原葬糟燥泽圆曾垣葬圆≤园恒成立，求实数 葬的取值范围。

分析：设 枣(曾)越泽蚤灶圆曾垣曾原糟燥泽圆曾原葬糟燥泽圆曾垣葬圆 可求得

枣(曾)越葬圆垣原源 枣(曾)越葬圆原缘
皂葬曾 皂蚤灶

令 葬圆原缘≥源
葬圆垣原≤园

解之可得：原源≤葬≤原猿或 猿≤葬≤源援

圆援利用集合的包含关系

集合之间内在的包含关系是确定变量范围的依据之一。

例缘 设集合 粤越{曾|曾圆原员≤曾原猿}集合 月越{曾|曾圆原(葬垣员)曾垣葬≤园}，若 粤∩月越月，求实数 葬的取值范围。

分析：由 粤∩月越月知 月⊆粤化简 粤越{曾|圆≤曾≤猿}，月越{曾|(曾原员)(曾原葬

≤囤,从而得 员≤ 葬≤圆

猿援利用方程的有关知识

(员)利用二次方程有无实根的条件

例 远 设 曾∈砸,求 赠越$\dfrac{猿曾原圆}{曾垣员}$的取值范围。

分析:化为 赠曾圆原猿曾垣赠垣圆越园,赠越园时,曾越$\dfrac{圆}{猿}$,赠≠园时,由 曾∈砸得

△越(猿原赠)圆原源赠(赠垣圆)≥园,解之得

原员原$\dfrac{\sqrt{员猿}}{圆}$≤赠≤原员垣$\dfrac{\sqrt{员猿}}{圆}$(赠≠园)

综上知:原员原$\dfrac{\sqrt{员猿}}{圆}$≤赠≤原员垣$\dfrac{\sqrt{员猿}}{圆}$援

(圆)利用二次方程根的范围

例 苑 已知关于 曾的方程 遭(葬曾)·遭(葬曾圆)越源的所有根都大于 员,求实数 葬的取值范围。

分析:设 遭曾越赠,原方程可化为 圆赠圆垣猿赠遭葬垣遭圆葬原源越园

疫曾跃员,亦赠跃园,关于 赠的二次方程有正根的条件为:

$$\begin{cases}\triangle\geq 园\\ 赠员垣赠圆跃园\\ 赠员赠圆跃园\end{cases}\text{即}\begin{cases}怨遭圆葬原愿(遭圆葬原源)\geq 园\\ 原\dfrac{猿}{圆}遭葬跃园\\ \dfrac{员}{圆}(遭圆葬原源)跃园\end{cases}$$

解之得 园约葬约$\dfrac{员}{员园园}$援

源援利用不等式的有关知识

(员)利用 葬跃园且△约园,则 葬曾圆垣遭曾垣糟跃园恒成立;葬约园且△约园,则 葬曾圆垣遭曾垣糟约园恒成立。反之亦成立。

例 愿 设对所有实数 曾,不等式

曾圆造燥早圆$\dfrac{源(葬垣员)}{葬}$垣圆曾造燥早圆$\dfrac{圆葬}{葬垣员}$垣造燥早圆$\dfrac{(葬垣员)^{圆}}{源葬^{圆}}$跃园恒成立,求 葬的取值范围。(怨愿年高考题)

分析:首先排除二次项系数

造燥早圆$\dfrac{源(葬垣员)}{葬}$越园的情形。问题即等价于

$$\begin{cases}\dfrac{葬}{葬垣员}跃园 & ①\\ 造燥早圆\dfrac{源(葬垣员)}{葬}跃园 & ②\\ (圆造燥早圆\dfrac{圆葬}{葬垣员})^{圆}原源造燥早圆\dfrac{源(葬垣员)}{葬}\cdot & \\ \quad 曾造燥早圆\dfrac{(葬垣员)^{圆}}{源葬^{圆}}约园 & ③\end{cases}$$

令 赠越造燥早圆$\dfrac{圆葬}{葬垣员}$,则

③式变为 赠(远原赠)约园

②式变为 赠约猿

解得 赠约园,由$\begin{cases}\dfrac{葬}{葬垣员}跃园\\ 造燥早圆\dfrac{圆葬}{葬垣员}约园\end{cases}$

得 葬的范围为 园约葬约员援