

目 录

正文 答案

第一章 奇数与偶数	(页) 摇 (页)
第二章 质数与合数	(页) 摇 (页)
第三章 最大公约数与最小公倍数	(页) 摇 (页)
第四章 整除与余数	(页) 摇 (页)
第五章 求十进制数码	(页) 摇 (页)
第六章 数轴与绝对值	(页) 摇 (页)
第七章 有理数的计算	(页) 摇 (页)
第八章 整式运算与化简求值	(页) 摇 (页)
第九章 一元一次方程与应用	(页) 摇 (页)
第十章 二元一次方程组与应用	(页) 摇 (页)
第十一章 一元一次不等式(组)与应用	(页) 摇 (页)
第十二章 简单不定方程与应用	(页) 摇 (页)
第十三章 线段与角	(页) 摇 (页)
第十四章 相交线与平行线	(页) 摇 (页)
第十五章 多边形与简单几何体	(页) 摇 (页)
综合测试	(页) 摇 (页)
综合测试一(一)	(页) 摇 (页)
综合测试一(二)	(页) 摇 (页)
综合测试二(一)	(页) 摇 (页)
综合测试二(二)	(页) 摇 (页)
综合测试三(一)	(页) 摇 (页)



| 综合测试三(二试)..... (猿缘摇(猿圆))

第一章 奇数与偶数

知识要点



全体整数可分为两类：奇数和偶数。能被 2 整除的整数叫偶数，记作 $2k$ (k 为整数)；不能被 2 整除的整数叫奇数，记作 $2k+1$ (k 为整数)。

奇数与偶数具有以下性质及运算规律：

① 奇数 \neq 偶数；

② 奇数 \pm 奇数 \rightarrow 偶数，偶数 \pm 偶数 \rightarrow 偶数，奇数 \pm 偶数 \rightarrow 奇数；

③ 奇数个奇数的和是奇数，偶数个奇数的和是偶数，任意个偶数的和是偶数；若干个整数之和为奇数，其中至少有一个奇数；若干个整数之和为偶数，其中至少有一个是偶数；

④ 奇数 \times 奇数 \rightarrow 奇数，(奇数) $^n \rightarrow$ 奇数 (n 为正整数)，偶数 \times 整数 \rightarrow 偶数，(偶数) $^n \rightarrow$ 偶数 (n 为正整数)；

⑤ 整数 a 与 b 同奇偶性， $a \pm b$ (n 为正整数) 有相同的奇偶性；

⑥ 若 a 为整数，则 $a \pm 2k$ 有相同的奇偶性；

⑦ 两个连续整数的积 $n(n+1)$ 是偶数；

⑧ 偶数的平方是 4 的倍数，奇数的平方是 4 的倍数加 1。

例题选析



例员 摇若 n 是自然数, 则 $[(n-1)^n] \cdot (n-1)$ 的值是奇数还是偶数?

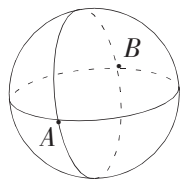
分析 摇从自然数 n 是奇数还是偶数入手, 由奇偶的运算性质加以判断援
解 摇当 n 为奇数时, $(n-1)^n$ 为偶数, $[(n-1)^n]$ 为偶数, $(n-1)$ 是奇数, $[(n-1)^n] \cdot (n-1)$ 是偶数; 当 n 为偶数时, $(n-1)^n$ 为奇数, $[(n-1)^n]$ 为零, $(n-1)$ 是偶数, $(n-1)^n$ 为奇数, $[(n-1)^n] \cdot (n-1)$ 的值是零, 是偶数援综上所述, 不论自然数 n 是奇数还是偶数, $[(n-1)^n] \cdot (n-1)$ 都是偶数援

例圆 摇将 $1, 2, \dots, 100$ 这 100 个自然数重新排列为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$, 那么 $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{99} - a_{100})$ 这个积是奇数还是偶数?

分析 摇因为 $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{99} - a_{100}) = a_1 - a_{100}$ 的和相等, 所以 $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{99} - a_{100})$ 是个偶数, 也就是 $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{99} - a_{100})$ 是个偶数。由于奇数个整数之和为偶数, 则至少有一个加数是偶数, 所以 $(a_1 - a_2), (a_2 - a_3), \dots, (a_{99} - a_{100})$ 中至少有一个为偶数, 从而其积 $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{99} - a_{100})$ 必是个偶数。

解 摇由于 $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{99} - a_{100}) = a_1 - a_{100}$ 为偶数, 又因为奇数个整数之和是偶数, 其中至少有一个加数是偶数, 不妨设 $(a_i - a_{i+1})$ 为偶数, 所以乘积 $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{99} - a_{100})$ 必是个偶数援

例猿 摇小地球仪上赤道大圆与过南北极的某大圆相交于 A, B 两点, 有黑白二蚁从 A 点同时出发, 分别沿着这两大圆爬行, 黑蚁爬赤道大圆一周要 100 秒钟, 白蚁爬过南北极的大圆一周要 150 秒钟, 在 100 分钟内黑白二蚁在 A, B 点相遇几次?



次?为什么?

解 黑蚁爬半圆需 $2n$ 秒钟,白蚁爬半圆需 n 秒钟.黑白二蚁同时从 A 点出发,要在 B 点相遇,必须满足两个条件:①黑、白二蚁爬行时间相同,②在此时间内二蚁爬行奇数个半圆.但黑蚁爬行奇数个半圆要用奇数秒(缘伊奇数);白蚁爬行奇数个半圆要偶数秒(源伊奇数),奇数与偶数不相等,故黑白二蚁永远不能在 B 点相遇.

例 在 $1, 2, \dots, 2000$ 这 2000 个自然数中,能够表示成两个整数的和与这两个整数差的积的数的个数有_____个.

分析 利用两个整数的和与这两个整数的差具有同奇或同偶性去求这个整数.

解 设所求的这个整数为 x ,两个整数为 a, b .
由题意知 $x = (a+b)(a-b)$.
因为 $a+b$ 与 $a-b$ 同奇或同偶,所以 x 只能是奇数或是 4 的倍数.
在 1 至 2000 这 2000 个自然数中有 1000 个奇数, $(\frac{2000}{4}) = 500$ 个是 4 的倍数的数.
故满足条件的数共有 $1000 + 500 = 1500$ 个.

例 下列每个算式中,最少有一个奇数,一个偶数,那么这 4 个整数中至少有几个偶数?

$$\square \pm \square \pm \square, \square \div \square \pm \square, \\ \square \pm \square \pm \square, \square \div \square \pm \square$$

分析 题中要求每个算式中,至少有一个偶数与一个奇数,满足此要求后,每个算式根据两个整数与它们的和、差、积、商的奇偶性,去找最少个数的偶数.

解 用填空分析法,如下:

$$\begin{matrix} \square & \pm & \square & \pm & \square \\ \text{奇} & & \text{奇} & & \text{偶} \end{matrix}, \begin{matrix} \square & \div & \square & \pm & \square \\ \text{奇} & & \text{奇} & & \text{偶} \end{matrix}, \\ \begin{matrix} \square & \pm & \square & \pm & \square \\ \text{奇} & & \text{偶} & & \text{偶} \end{matrix}, \begin{matrix} \square & \div & \square & \pm & \square \\ \text{偶} & & \text{奇} & & \text{偶} \end{matrix}$$

在加减法中,必须有两个奇数一个偶数,在乘、除法中,必须有一个奇数两个偶数,否则不能满足题中要求,这样四个算式中至少得有

远个偶数援

例远 摇 π 的前 n 个位数值为 $a_1 a_2 \dots a_n$ 记为 $(a_1 a_2 \dots a_n)$ 援
求证 : $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_2 a_3 \dots a_{n+1}) \dots (a_{n-1} a_n \dots a_{2n-1})$ 必为偶数援

分析 摇 $(a_1 a_2 \dots a_n), (a_2 a_3 \dots a_{n+1}), \dots, (a_{n-1} a_n \dots a_{2n-1})$ 这 n 个差中, 只要有一个是偶数, 则它们的积必为偶数, 故应从这 n 个差的奇偶性入手证明援

证明 摇 从给出的 π 的前 n 个数值知, 其中有 m 个奇数, $n-m$ 个偶数, 这 $n-m$ 个偶数分别放 $n-m$ 个括号内 (一个括号内放一个偶数), 再把 m 个奇数分别放入前面 m 个括号内 (一个括号内放一个奇数) 与前面放入的偶数做差, 这 m 个差均为奇数, 最后还剩两个奇数放入第 n 个括号内做差, 此差是偶数, 由此可知 $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_2 a_3 \dots a_{n+1}) \dots (a_{n-1} a_n \dots a_{2n-1})$ 必为偶数援

例苑 摇 将正方形 $ABCD$ 的相对顶点 A, C 染红色, B, D 染蓝色, 把此正方形分成 n^2 个小正方形 (n 为大于 1 的自然数), 其余交点染成红蓝二色之一援

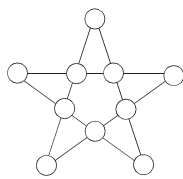
求证 : 有三个顶点同色的小正方形的个数为偶数援

证明 摇 首先看特殊情况, 除点 A, C 外, 其余交点全染成红色, 此时, 三顶点同色的小正方形只有包含 A, C 两点的两个 (偶数) 援
 继之, 把一个红点 (不包括 A, C 两点) 改为蓝点, 含此点的小正方形若原来三点同色的变为三点非同色; 原来非三点同色变为三点同色 援
 总之, 无论如何变化, 使 n^2 小正方形中的三顶点同色的小正方形只能影响 1 个或 3 个小正方形, 故知改变一点的颜色, 不会改变三顶点同色的小正方形个数的奇偶性援

综上, 有三个顶点同色的小正方形的个数为偶数援

例愿 摇 将图中的圆任意涂上红色或蓝色, 问: 有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数? 请说明理由援

分析 摇 假设能够使同一条直线上的红圈数都是奇数, 再用数的奇偶性加以分析、判定援



解 不可能使得同一条直线上的红圈数都是奇数

假设能够使同一条直线上的红圈数都是奇数,一共有 缘条直线,将这 缘条直线上的红圈数相加,其和为奇数.另外应注意到每个红圈在两条直线上,所以前面求的和中,每个红圈都被计算了两次,因而应是一个偶数.由于奇数不等于偶数,因此,不可能在同一条直线上的红圈数都是奇数.

例 摇表甲是一个英文字母电子显示盘,每一次操作可以使每一行四个字母同时改变,或使某一列四个字母同时改变.改变的规则是:按照英文字母表的顺序,每个英文字母变成它下一个字母(即 粤→月,月→悦,在→粤).能否经过若干次操作,使表甲变成表乙?如果能,请写出变化过程;如不能,说明理由.

杂	韵	月	砸
栽	在	云	孕
匀	韵	悦	晕
粤	阅	灾	载

摇摇表甲

运	月	阅	杂
匀	耘	载	邠
砸	栽	月	杂
悦	云	再	粤

摇摇表乙

分析 初看表甲与表乙不是很有规律的,似乎不太容易直接得出结论,但经仔细观察、分析还是能找到解题的关键:将字母的变化变成数字的变化,通过数字和的奇偶性,来研究表甲是否可变成表乙.

解 将表中的英文字母分别用它在字母表中的顺序号代替(粤→1,月→2,云→3,在→4,悦→5,晕→6,砸→7,孕→8,灾→9,载→10).这样表甲与表乙就分别变成表丙与表丁如下:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

摇摇表丙

13	3	11	1
9	2	10	15
7	5	2	1
11	3	10	9

摇摇表丁

于是,每一次操作中字母的置换就转化为下面数的置换:

员→圆圆→猿猿→源,... 缘缘→圆圆→猿猿→员援

易知,每次操作都不改变这 员个数的和的奇偶性,经计算得出表丙与表丁所有的数的和分别为 圆猿和 猿源,它们是一奇一偶,故表丙不能变成表丁,即表甲不能变成表乙援

解题技巧



摇摇要正确解决奇数与偶数的相关的问题,首先了解奇数与偶数的概念,理解并掌握奇数和偶数的一般运算性质及规律,通常采取分析整数奇偶性的方法来解决问題援

在一定的规则下进行某种操作或变换,要注意保持不变的量和不变的性质,要善于利用不变的量和不变的性质来作为论证的依据,如例 圆例 猿例 缘等援

在论证某些问题时,感到很棘手时,往往可以用赋值法,将问题中的条件或元素用恰当的数字表示,使抽象问题具体化,如例 怨,利用这些数值的大小、正负、奇偶等性质,使问题得以解决援

习题精练



粤摇摇级

圆如果 灶是正整数,那么表示任意负奇数的代数式是(摇摇)援

粤 圆灶 月 圆灶 悦 圆灶 阅 圆灶

圆数 葬的任意正奇数次幂都等于 葬的相反数,则(摇摇)援

粤 葬 月 葬 悦 葬 阅 葬

悦 葬 阅 不存在这样的 葬

猿设 曾,园,灶为自然数,当 原曾曾约园时,灶是(摇摇)援

选项 A 正奇数

选项 B 正偶数

选项 C 零

选项 D 任意自然数

例 1 如果 n 是三个连续偶数中间的一个数,那么它的平方与另外两个数积的差应是()

选项 A 质数

选项 B 圆

选项 C 源

选项 D 远

例 2 下列判断中错误的是()

选项 A 圆是正偶数

选项 B 如果一个偶数能被奇数整除,则它的商一定是偶数

选项 C 若干个整数的积是偶数,那么这些数中至少有一个是偶数

选项 D 若干个整数的和是偶数,那么这些数中至少有两个是偶数

例 3 设 $a \in \mathbb{R}$,则下述命题中正确的是()

选项 A a 的偶次方的偶次方是负数

选项 B a 的奇次方的偶次方是负数

选项 C a 的奇次方的奇次方是负数

选项 D a 的偶次方的奇次方是负数

例 4 如果 a, b 都是正整数,且 a 是奇数,则 $a^b(a-b)^a \cdot b^a$ 是()

选项 A 只当 b 为奇数时,其值为奇数

选项 B 只当 b 为偶数时,其值为偶数

选项 C 只当 b 为 a 的倍数时,其值为奇数

选项 D 无论 b 为何正整数时,其值均为奇数

例 5 若 n 是奇自然数, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是 n 个互不相等的负整数,则()

选项 A $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_1 a_2 \dots a_n)$ 是正整数

选项 B $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_1 a_2 \dots a_n)$ 是正整数

选项 C $(\frac{1}{a_1} a_2 \dots a_n)(\frac{1}{a_1} a_2 \dots a_n)$ 是正数

选项 D $(\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n})(\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n})$ 是正数

例 6 已知三个整数 a, b, c 的和为奇数,那么 $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ 一定是

_____ 数(填奇或偶)援

员证明:不存在两个连续的奇数,每个数都可以写成两个整数的平方和援

摇摇级

员在 源与 苑之间有多少个偶数具有 源个不同的数字?

员在 员、圆、猿、...、猿这 猿个数中,十位数为奇数的数共有 _____ 个援

员一个数分别与相邻的两个奇数相乘,所得的两个积相差 员,则这个数是 _____ 援

员将 怨个苹果装入两种规格的盒中,每个大盒装 员个,每个小盒装 缘个,而所用的盒子多于 员个,则大盒用 _____ 个;小盒用 _____ 个援

员有一列数 员、圆、猿、猿、猿、猿... ,从第 圆个数起,每个数的猿倍恰好是它相邻两个数的和,则第 圆个数是奇数还是偶数?

员你能找到三个整数 葬、遭、糟使得关系式 $(葬+遭)^2 + (葬+糟)^2 = (遭+糟)^2$ 成立吗?如果能找到,请举一例;如果找不到,请说明理由援

悦摇摇级

员已知 葬、遭都是正整数,且 $葬^2 + 遭^2 = 100$,求 葬、遭的值援

员代数式 $2x^2 + 3x + 1$ 中,则 葬、遭、糟可以分别取 员或 原员,

(员)证明代数式的值都是偶数;

(圆)求该代数式所能取到的最大值援

员在一个圆周上,依次排列 灶个点:粤、粤、...、粤,对于每个点任意染上白色或黑色援证明:在连接相邻两点的 灶条圆弧 $\widehat{粤粤}, \widehat{粤粤}, \dots, \widehat{粤粤}$ 中,端点颜色不同的圆弧的条数必是偶数援

员在 远张纸片的正面分别写上整数 员、圆、猿、...、远,打乱次序后,将纸片翻过来,在它们的反面也随意分别写上 员~远这 远个整数,然后计算

每张纸片正面与反面所写数字之差的绝对值,得出 远个数,请你证明:所得的六个数中至少有两个是相同的援

能力测试



(时间 20分钟 分数 100分)

一、选择题(每小题 5分)

1. 如果 n 是正整数,那么 $\frac{1}{n}[(n-1)^{2n}] \cdot (n-1)^n$ 的值(摇摇)援

- ☐ 一定是 0
- ☐ 一定是奇数
- ☐ 一定是偶数
- ☐ 是整数但不一定是偶数

2. 葬遭糟均为整数,那么下列三个数 $\frac{葬遭糟}{圆}$ 、 $\frac{葬遭糟}{圆}$ 、 $\frac{葬遭糟}{圆}$ 中,整数的个数

- (摇摇)援
- ☐ 1个
- ☐ 2个
- ☐ 3个
- ☐ 至少 1个

3. 设 葬遭为整数,给出下列四个结论,正确的是(摇摇)援

- ☐ 若 葬遭是偶数,则 葬京是偶数
- ☐ 若 葬遭是偶数,则 葬京是奇数
- ☐ 若 葬遭是奇数,则 葬京是偶数
- ☐ 若 葬遭是奇数,则 葬京不能确定

4. 将 1 到 100 这 100 个自然数任意排成一行,然后依次地求出三个相邻数的和,在这些所求的和中,奇数的个数至多有(摇摇)援

- ☐ 100个
- ☐ 99个
- ☐ 98个
- ☐ 97个

5. 若 100 个连续奇数的和是 10000,把这些数按大到小的顺序排起来,第六个数是(摇摇)援

- ☐ 100
- ☐ 101
- ☐ 102
- ☐ 103

6. 满足等式 $1+2+3+\dots+n=100$ 的 曾赠的值是(摇摇)援

- ☐ 曾赠=100,赠=100
- ☐ 曾赠=100,赠=100
- ☐ 曾赠=100,赠=100
- ☐ 曾赠=100,赠=100

7. 100 个自然数的和是 1000,在这些数里,奇数比偶数多,则这些数里至多有偶数(摇摇)个援

- ☐ 100
- ☐ 99
- ☐ 98
- ☐ 97

1. 每次取遍所有的整数时,不能取遍所有的奇数的表达式是()

A. $2n-1$ B. $2n+1$ C. $2n$ D. $2n-2$

2. 从 1 开始的自然数中,把能表示成两个正整数的平方差的数从小到大排成一列,则这列数中的第 100 个数是()

A. 100 B. 199 C. 200 D. 299

3. 下列做法不能实现的有()

- ① 桌上有 10 只杯子,5 只杯口向上,5 只杯口向下,每次任意翻动其中的两只,经若干次后,可将 10 只杯子全变成杯口向下;
- ② 有两堆石子,一堆有 100 粒,另一堆 10 粒,每次允许要么从两堆石子中拿走相同数量的石子(每次拿的数字可以不同),要么从一堆中拿若干粒放入另一堆,则若干次后可将两堆石子同时取光;
- ③ 有 100 个孩子,依次编为 1~100 号,能够将这些孩子分在若干组,使每组中都有一个孩子的号码数等于本组其余孩子的号码数的和;
- ④ 有编号为 1 至 6 的六盏灯全都关着,现在经过 100 次循环往复的拉动开关(从 1 号到 6 号拉动,再从 6 号到 1 号拉动)可将 1 号灯拉亮

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题(每小题 5 分)

1. 若按奇偶分类,则 $2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2$ 是_____数

2. 四个自然数 a, b, c, d , 且 a, b, c 是奇数,且 a, b, c, d 是奇数,且 a, b, c, d 是奇数,则 a, b, c, d 是_____

3. 能不能在下式:

$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10$ 的各方框内分别填上“+”号或“-”使等式成立?

答:_____ (能或不能)

4. 在某一个月中,有三个星期天的日期刚好是偶数,则这个月的 1 号是星期_____

5. 100 能否分解成两个连续奇数的乘积,则这两个奇数是_____

援

员题 若将 员题 表示为若干个(多于 员个)连续奇数的和,考虑到所有的不同的表示方法,将每种表示方法中的最大奇数取出来归为一组,则这组数中最大的数是_____援

三、解答题(员苑题 小题各 员分, 怨题 员分, 员题 员分)

员题 设 员, 员, 员, ..., 员 是 员 圆 猿 ...、 员 的一个任意排列,求证:
(员 原 员)(员 原 圆) ... (员 原 员 圆 猿) 为偶数援

员题 有混放在一起的苹果和桔子若干,随意分成五小堆,试证你一定可以拿到两堆,使得苹果和桔子的总数都是偶数援

员题 某次考试,共 员 圆 道 题,评分标准是:基础分 员 分,答对一题加 缘 分,不答一题加 员 分,答错一题减 员 分援 若 员 名同学参加考试,问:参加测试同学的总分数是奇数还是偶数?并说明理由援

员题 设沿江有 粤、粤、粤、粤、粤、粤 六个码头,相邻两码头间的距离相等援 早晨甲、乙两船从 粤 出发,各自在这些码头间多次往返运货,傍晚,甲停泊在 粤 码头,乙船停泊在 粤 码头,求证:无论如何两船的航程总不相等(假设船在两码头间航行时,中途不改变航向)援

第二章 质数与合数

知识要点



如果一个大于 1 的自然数 n 只有 1 和 n 这两个约数,那么 n 就叫做质数(或素数);如果除了 1 和 n 这两个约数外,还有其他自然数是它的约数,那么 n 就叫做合数(或复合数);自然数 1 既不是质数也不是合数。

质数、合数具有下列重要性质:

例 1 质数、合数有无穷多个,最小的质数是 2,最小的合数是 4,不存在最大的质数、合数。

例 2 在所有的质数中,只有 2 为偶数,其余均为奇数。

例 3 质因数分解定理:任意一个大于 1 的整数 n 都能唯一地分解成 n 个质因数的积(与质因数顺序无关)。

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_k 为不同的质数, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 为自然数。

n 的所有约数之和为

$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k})$

例 4 n 的正约数的个数定理为

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, 其中包括 1 和 n 这两个约数。

第二章 质数与合数

摇摇 续 两数互质是指两数无除 1 以外的公约数。互质的数不一定是质数，如 2 和 3 互质，3 和 4 互质，5 和 6 互质，记作 $(2, 3) = 1$, $(3, 4) = 1$, $(5, 6) = 1$ ，表示 2 和 3 没有 1 以外的公约数，也就说它们的最大公约数是 1。

例题选析



例 1 设正整数中互不相等的三个质数之和的最小值为 m ，则 m 的负倒数是多少？

分析 求正整质数的和最小，则需最小的质数。

解 在质数中最小的三个是 2, 3 和 5，则

$$m = 2 + 3 + 5 = 10, \text{ 原 } \frac{1}{m} = \frac{1}{10}$$

答 m 的负倒数是 $-\frac{1}{10}$ 。

例 2 若 p 是质数， $2p$ 也是质数，则 $2p$ 是质数还是合数？

分析 首先要寻找使 p 与 $2p$ 都是质数的 p 值，然后再代入 $2p$ 加以判定。

解 在质数数列 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... 易知，仅当 $p=2$ 时， p 与 $2p$ 都是质数，则 $2p=4$ 是合数。

例 3 已知正整数 x, y 都是质数，且 xy 与 $x+y$ 也都是质数，试求 $x+y$ 的值。

分析 由 $x+y$ 是质数入手，质数中只有 2 是唯一的偶数，其余质数均为奇数，故 $x+y$ 是奇数， xy 必然是偶数，推出 $x=2$ 或 $y=2$ ，再求对应的 $x+y$ 。

解 设 $x=2$ 且 y 是质数，亦 $x+y$ 为正奇数， xy 必然为偶数，从而 $x+y=2$ 或 $x+y=3$ (当 $x=2$ 时，设 $y=2k+1$ ， k 为整数)。
当 $x=2k+1$ 时， $xy=2k+1$ 是合数，舍去；

当 $2 \mid n$ 时, $2 \mid (n-1)$ 且 $2 \mid (n+1)$ 是合数,舍去;
只有 $2 \nmid n$ 时, $2 \nmid (n-1)$ 且 $2 \nmid (n+1)$ 是合数,舍去;

(2) 当 $3 \mid n$ 时, 设 $n = 3k$ (k 为整数) 援

当 $3 \mid k$ 时, $3 \mid (n-1)$ 且 $3 \mid (n+1)$ 是合数,舍去;

当 $3 \nmid k$ 时, $3 \nmid (n-1)$ 且 $3 \nmid (n+1)$ 是合数,舍去;
亦 $3 \nmid k$ 时, $3 \nmid (n-1)$ 且 $3 \nmid (n+1)$ 是合数,舍去;

综上知, $2 \nmid n$ 且 $3 \nmid n$ 或 $2 \mid n$ 且 $3 \mid n$ 援

亦 $2 \nmid n$ 且 $3 \mid n$ 或 $2 \mid n$ 且 $3 \nmid n$ 援

例 源 若 a, b, c 是 n 的三个不同的质因数, 且 $a \mid b^2 + c^2$ 则 $(a-1) \mid n$ 的值是多少?

解 摇摇 设 $n = a^x b^y c^z$ (x, y, z 为正整数), 且 $a \mid b^2 + c^2$

亦 $a \mid n$, $a \mid b^2 + c^2$ 援

因此, $(a-1) \mid (b^2 + c^2) - (b^2 + c^2) \equiv 0 \pmod{a-1}$ 援

例 缘 源名运动员所穿运动服号码分别是 $1, 2, \dots, 9$ 这 9 个自然数援
问:

(1) 能否让这 9 名运动员站在一排, 使得任意两个相邻运动员的号码之和是质数?

(2) 能否让这 9 名运动员站成一圈, 使得任意两个相邻运动员的号码之和是质数?

若能办到, 请举出一例; 若不能办到, 请说明理由援

分析 摇摇 要使相邻两数的和是质数, 这两数必一奇一偶, 即一排数或一圈数应是奇偶相间的, 由此推下去, 然后利用奇偶性得出结论援

解 摇摇 (1) 首先知道 9 是质数, 它与 2 的和 11 是质数, 不妨将 1~9 中的奇数排成一列: 1, 3, 5, 7, 9, 将偶数 2, 4, 6, 8 依次插入奇数之间, 有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 其中任意一个偶数与左、右相邻二奇数之和均为 9 或 11, 而 9, 11 都是质数, 故 (1) 的要求可以办到援

(2) 不同的两个奇数、两个偶数之和都是大于 2 的偶数, 必为合数, 故 (2) 的要求不能办到援