图书在版编目（C I P）数据

初中奥数千题巧解. 九年级（初三/周春荔，才裕平主编 . 2 版.
—长春：长春出版社，2005. 1
ISBN 7-80604-367-5

Ⅰ. 初...　Ⅱ. ①周... ②才...　Ⅲ. 数学课—初中—解题
Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 131562 号

责任编辑：毕素香　　封面设计：郝　威

长春出版社出版
（长春市建设街 1377 号 · 邮编：130061）
网址：http://www.cccbs.net
（业务电话：8563443　发行电话：8561180）
长春市第十一印刷厂印刷
新华书店经销
880×1230 毫米　32 开本　12 印张　346 千字
2005 年 1 月第 2 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—10 000 册　定价：15. 00 元

目摇录

第一章　一元二次方程

第一节 一元二次方程解法

知识要点

只含一个未知数，且未知数的最高次数是2的整式方程，叫做一元二次方程.

1. 一元二次方程的一般形式为：

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，任何一个一元二次方程都可以化成这样的形式.

ax^2称为一元二次方程的二次项，a为二次项的系数；bx为一元二次方程的一次项，b为一次项系数；c为常数项. 任何一个一元二次方程，必须有二次项.

2. 一元二次方程的解法：

(1) 开平方法，

(2) 配方法，

(3) 求根公式法，

(4) 因式分解法.

3. 一元二次方程根的判别式：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，其判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

摇摇源摇一元二次方程根与系数关系，若 x_1、x_2 是一元二次方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园的两个根，则有 x_1 垣 x_2 越原$\frac{遭}{葬}$，x_1x_2 越$\frac{糟}{葬}$援

缘摇可化为一元二次方程的方程：

(员) 高次方程，

(圆) 分式方程，

(猿) 无理方程援

例题选析

例员 摇用适当方法解下列方程援

(员) (猿曾原原圆越(源曾原猿圆郾

分析员 摇用直接开平方法 原方程相当于 曾圆越皂(皂跃园)，方程解为 曾越依√皂援

解法员 摇猿曾原原越依(源曾原猿)，

即 猿曾原原越源曾原猿或 猿曾原原越原(源曾原猿)，

亦 x_1 越原员，摇 x_2 越圆援

分析圆 摇用因式分解法 把方程变形为一边为零，而另一边是两个一次因式，积的形式，使每个因式为零，就得到两个一次方程，分别解这两个一次方程，就可得到原方程的解援

解法圆 摇移项得：(猿曾原原圆原(源曾原猿圆越园

〔(猿曾原原 垣(源曾原猿)〕〔(猿曾原原 原(源曾原猿)〕越园

即 (苑曾原苑)(原曾原圆) 越园

亦 x_1 越员，摇 x_2 越原圆援

(圆) 曾圆原圆√缘曾垣圆越园郾

分析 摇用配方法：通过配方把一元二次方程 葬曾圆 垣遭曾垣糟越园变形为

(曾垣$\frac{遭}{圆葬}$)圆越$\frac{遭圆原源葬糟}{源葬圆}$的形式，再利用直接开平方法求方程的解援

解法 摇移项得：曾圆原圆√缘曾越原圆

配方得 摇曾圆原圆√缘曾垣(√缘)圆越(√缘)圆原圆

即：摇摇(曾原√缘)圆越猿

于是：曾越√缘依√猿摇亦 x_1 越√缘垣√猿摇 x_2 越√缘原√猿援

（猿）（员原曾）圆越猿员原曾）遥

解法员摇用因式分解法：

原方程可化为（曾原员）圆垣（曾垣员）（曾原员）越园，

（曾原员）（曾原员垣曾垣员）越园，

亦曾员越员，曾圆越原员援

解法圆摇将原方程化为：

员原圆曾垣曾圆越员原曾圆，

圆曾圆原圆曾越园，

圆曾（曾原员）越园，

亦曾员越园，曾圆越员援

（源）（圆曾垣员）圆原（曾原猿）（圆曾原员）越猿曾遥

解法员摇将原方程化为：

源曾圆垣源曾垣员原（圆曾圆原苑曾垣猿）越猿曾，

曾圆垣缘曾原员越园，

用配方法：（曾垣圆）圆越缘，

曾垣圆越依√缘，

亦曾员越原圆垣√缘，曾圆越原圆原√缘援

解法圆摇原方程整理成：曾圆垣源曾原员越园，

用公式法：葬越员，遭越源，糟越原员，

遭圆原源葬糟越源圆原源伊员伊（原员）越圆园，

$$曾越\frac{原遭依\sqrt{遭圆原源葬糟}}{圆葬}越\frac{原源依\sqrt{圆园}}{圆}，$$

亦曾员越原圆垣√缘，曾圆越原圆原√缘援

说明摇解一元二次方程所用方法要根据方程的特征，因题而异，灵活地选用适当方法，一般先考虑能否用开平方法或因式分解法，然后再考虑用求根公式法或配方法援任何一个一元二次方程都可用求根公式或配方法求解援

例圆摇解关于曾的一元二次方程曾圆原糟曾越遭圆原糟遭援

分析员摇用因式分解法援

解法员摇原方程化为：曾圆原糟曾垣糟遭原遭圆越园，

即（曾原遭）圆原糟（曾原遭）越园，

用因式分解法：(曾原圆葬亘遭)(曾原圆葬原遭)越园

亦曾员越圆葬原遭，曾圆越圆葬亘遭援

分析 圆摇变形后用直接开方法援

解法 圆摇原方程可化为：曾圆原源葬曾亘源葬圆越遭圆，

即(曾原圆葬)圆越遭圆，

用直接开方法：曾原圆葬越依遭，

曾员越圆葬亘遭，曾圆越圆葬原遭援

说明摇含字母系数的一元二次方程，首选方法是因式分解法或直接开平方法援

例 猿 摇解方程 曾圆亘圆（曾亘员）越源曾亘员援

分析摇首先应将方程整理成一元二次方程的一般式援

解摇摇曾圆亘(√圆原源)曾亘(圆原员)越园

Δ越遭圆原源葬糟越(√圆原源)圆原源伊员伊(√圆原员)越(圆原猿√圆)圆跃园

代入求根公式 曾越原遭依√遭圆原源葬糟/圆葬越原(√圆原源)依√(圆原猿√圆)圆/圆

越源原√圆依(猿√圆原圆)/圆，

亦曾员越猿原圆√圆，曾圆越员亘√圆援

说明摇此题要求根式运算能力要强援圆圆原员园√圆越(猿√圆原圆)圆，并要求对算术根概念清楚援如：√(圆原猿√圆)圆越猿√圆原圆≠圆原猿√圆援

例 源 摇解关于 曾的方程 皂圆（曾圆原曾亘员）原皂（曾圆原员）越（皂圆原员）曾援

分析摇关于 曾的方程整理变形后，二次项系数含有参变数 皂，首先要讨论二次项系数是否为零援

解摇摇原方程整理为：(皂圆原皂)曾圆原(圆皂圆原员)曾亘(皂圆亘皂)越园援

若 皂圆原皂越园，皂越园或 皂越员，方程变为关于 曾的一元一次方程，当皂越园时，曾越园；当 皂越员时，曾越圆援

若 皂圆原皂≠园，即 皂≠园且 皂≠员时，原方程可分解成：

[皂曾原(皂亘员)][(皂原员)曾原皂]越园

亦曾员越(皂亘员)/皂，曾圆越皂/(皂原员)援

说明摇此题含有字母系数，应先考虑二次项系数为零的参变数的值，然后分：①二次项系数为零；②二次项系数不为零两种情况求解援如果对字母系数分解感到非常困难，在 葬≠园时，可用求根公式法；在 葬越园时，不能用公式法解援

例 缘 摇如果方程(园园园原曾)圆 原园园园源·园园园缘曾原员越园较大的根为 酝，方程 曾圆 垣园园园原曾原园园园缘越园较小的根为 皂，求 酝原皂的值援

分析摇注意到 园园园原 圆 原员越园园园源·园园园缘 及 员伊(原员) 垣园园园缘伊员越园园园原关系，两个方程均可用因式分解方法求解援

解摇摇(园园园原曾)圆 原园园园源·园园园缘曾原员越园可分解成(园园园原圆曾垣员)(曾原员) 越园

亦酝越员；

曾圆 垣园园园原曾原园园园缘越园可分解成(曾垣园园园缘)(曾原员) 越园

亦皂越原园园园缘

亦酝原皂越员原(原园园园缘) 越园园园远援

例 远 摇试证：不论 葬遭取何实数，多项式 葬圆遭圆 垣遭圆 原远葬遭原远遭垣员猿的值都不小于 员援

分析摇欲证 葬圆遭圆 垣遭圆 原远葬遭原远遭垣员猿≥员，即证 葬圆遭圆 垣遭圆 原远葬遭原远遭垣员圆≥园，故将不等式左端配成完全平方或几个完全平方式的和援

证明摇疫摇葬圆遭圆 垣遭圆 原远葬遭原远遭垣员猿

越(葬圆遭圆 原远葬遭垣怨) 垣(遭圆 原远遭垣源) 垣员

越(葬遭原猿)圆 垣(遭原圆)圆 垣员，

疫对于实数 葬遭，(葬遭原猿)圆≥园，(遭原圆)圆≥园，

亦(葬遭原猿)圆 垣(遭原圆)圆≥园，

故对任意的实数 葬遭，多项式 葬圆遭圆 垣遭圆 原远葬遭原远遭垣员猿的值都不小于 员援

说明摇配方法是一种以出现平方式为基本特征的恒等变形，“平方式”在实数范围内产生非负数的特殊功能援在以后学习中如证明不等式，求最值等常用配方法使问题得以解决援

例 苑 摇若 猿曾圆 原曾原员越园，求多项式 远曾猿 垣苑曾圆 原缘曾垣圆园园园的值援

解摇摇疫猿曾圆 原曾原员越园，

亦远曾猿 垣苑曾圆 原缘曾垣圆园园园越圆曾(猿曾圆 原曾原员) 垣猿(猿曾圆 原曾原员) 垣圆园园猿

越圆曾·园垣猿·园垣圆园园猿越圆园园猿援

说明摇由已知条件 猿曾圆 原曾原员越园不直接求出 曾值，而设法将多项式变化成

猿曾原曾原园的关系式，再去求多项式值援使问题迎刃而解援

例愿 摇若 皂、灶为有理数，√灶是无理数，皂垣√灶是有理系数方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园（葬≠园）的一个根，证明 皂原√灶也是这个方程的一个根援

证明 摇皂垣√灶是方程的根代入方程，

即 葬（皂垣√灶）圆垣遭（皂垣√灶）垣糟越园

整理为（葬皂圆垣葬灶垣遭皂垣糟）垣（圆葬皂垣遭）√灶越园援

疫葬、遭、糟、皂、灶均为有理数，√灶为无理数，

亦葬皂圆垣葬灶垣遭皂垣糟越园，圆葬皂垣遭越园援

把 皂原√灶代入方程左端得：

葬（皂原√灶）圆垣遭（皂原√灶）垣糟越（葬皂圆垣葬灶垣遭皂垣糟）原（圆葬皂垣遭）√灶越园，

亦皂原√灶是方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园的根援

摇第二节摇一元二次方程根的判别式摇

知识要点

摇摇关于 曾的一元二次方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园（葬≠园）的判别式 Δ 越遭圆原源葬糟援

如果判别式 Δ 跃园则方程有两个不同的实根；

如果判别式 Δ 越园则方程有两个相等的实根；

如果判别式 Δ 约园则方程没有实根援

判别式 Δ 还可以用来判定方程根的符号：

方程有两个正根 Δ≥园，葬遭约园，葬糟跃园；

方程有两个负根 Δ≥园，葬遭跃园，葬糟跃园；

方程有一正根一负根 Δ≥园，葬糟约园援

在一元二次方程中，判别式应用很广泛援涉及到一元二次方程根的情况，首先要满足 Δ≥园，有时，还用判别式 Δ≥园来求字母系数的取值范围援

例题选析

例员 摇已知方程 曾 原园曾原葬越园……①无实根，判断方程 曾 垣园葬曾垣员垣圆(葬 原员) (曾 垣员) 越园……②根的情况援

分析 摇欲判断方程②根的情况，须知 $\Delta_{圆}$ 符号，为此需从方程①$\Delta_{员}$约园中来讨论 $\Delta_{圆}$援

解 摇摇方程 曾 原园曾原葬越园无实根，亦$\Delta_{员}$越原垣原葬约园即 葬约原员，而方程②整理为 (圆葬 原员) 曾 垣园葬曾垣(圆葬 原员) 越园 葬约原员时，圆葬 原员≠园

亦$\Delta_{圆}$越原葬 原原(圆葬 原员)圆越原原(圆葬原员) (葬垣员) (圆葬垣员) (葬原员)，

当 葬约原员时，圆葬原员约园 葬垣员约园 圆葬垣员约园 葬原员约园

亦$\Delta_{圆}$约园亦方程 曾 垣园葬曾垣员垣圆(葬 原员) (曾 垣员) 越园没有实数根援

例圆 摇已知 葬遭糟是不全为零的三个实数，那么关于 曾的一元二次方程 曾 垣(葬垣遭垣糟)曾垣(葬 垣遭 垣糟) 越园无实数根援

分析 摇判断方程无实根，只须 Δ 约园援

证明 摇Δ 越(葬垣遭垣糟)圆原原(葬 垣遭 垣糟)

越葬 垣遭 垣糟 垣园葬遭垣园葬糟垣园遭糟原原葬 原原遭 原原糟

越原猿葬 原猿遭 原猿糟 垣园葬遭垣园葬糟垣园遭糟

越(原葬 垣园葬遭原遭) 垣(原葬 垣园葬糟原糟) 垣(原遭 垣园遭糟原糟) 郾

原葬 原遭 原糟 越原(葬原遭)圆原(葬原糟)圆原(遭原糟)圆原(葬 垣遭 垣糟)

越原[(葬原遭)圆垣(葬垣糟)圆垣(遭原糟)圆垣葬 垣遭 垣糟] 郾

疫葬遭糟不全为 园亦Δ 约园方程无实根援

例猿 摇已知关于 曾的方程 圆曾 垣园(葬原糟)曾垣(葬原遭)圆垣(遭原糟)圆越园有两个相等的实数根，求证 葬垣糟越圆遭援

分析 摇由已知条件知 Δ 越园再由此推出 葬垣糟越圆遭援

证明 摇由已知所给方程有两个相等的实数根，则：

Δ 越[圆(葬原糟)]圆原原伊圆[(葬原遭)圆垣(遭原糟)圆]

越原(葬 原园葬糟垣糟) 原愿(葬 原园葬遭垣遭 垣遭 原园遭糟垣糟)

越原原(葬 垣糟 垣原遭 垣园葬糟原原葬遭原原遭糟)

越原原(葬垣糟原圆遭)圆

即 (葬垣糟原圆遭)圆越园 葬垣糟原圆遭越园 葬垣糟越圆遭援

例 源 摇设 皂为整数,且 源约皂约源园,方程 曾圆原圆(圆皂原猿)曾垣源皂圆原员源皂垣愿越园有两个相异整数根,求 皂的值及方程的根援

分析 摇因方程有两个相异整数根,则方程的判别式 Δ 跃园,且 Δ 为完全平方数,再依据 源约皂约源园的条件,则可求出 皂值及方程的根援

解 摇摇Δ 越原圆(圆皂原猿)圆原源(源皂圆原员源皂垣愿)越源(圆皂垣员),

对 源约皂约源园的整数 皂,使 Δ 越源(圆皂垣员)为完全平方数的 皂只能是 员圆和 圆源,而 曾越圆(圆皂原猿)依源√圆皂垣员/圆越(圆皂原猿)依√圆皂垣员,

当 皂越员圆时,曾员越圆远,曾圆越员远;

当 皂越圆源时,曾员越缘圆,曾圆越猿愿援

例 缘 摇已知 皂跃灶跃园,求证方程 圆曾圆原(猿皂垣灶)曾垣皂灶越园有两个不等的实数根,且一根大于 灶,另一根小于 灶援

分析 摇欲证方程有两个不等实数根,只须证 Δ 跃园,如果方程两根为 曾员,曾圆,若有 (曾员原灶)(曾圆原灶)约园,则得 :曾员跃灶,曾圆约灶(设 曾员跃曾圆)援

证明 摇疫Δ 越[原(猿皂垣灶)]圆原愿皂灶越怨皂圆垣远皂灶垣灶圆原愿皂灶越(猿皂原灶)圆垣愿皂圆,

又疫皂跃灶跃园,亦Δ 跃园,即已知方程有两个不等的实根,不妨设这两根为 曾员跃曾圆援

疫(曾员原灶)(曾圆原灶)越曾员曾圆原(曾员垣曾圆)灶垣灶圆

越皂灶/圆原(猿皂垣灶)/圆 · 灶垣灶圆越员/圆灶(灶原皂),

由 皂跃灶跃园知 员/圆灶(灶原皂)约园,

亦曾员原灶跃园,曾圆原灶约园,即 曾员跃灶,曾圆约灶援

例 远 摇设 葬,遭,糟为互不相等的非零实数,求证下列 猿个方程:

葬曾圆垣圆遭曾垣糟越园,

遭曾圆垣圆糟曾垣葬越园,

糟曾圆垣圆葬曾垣遭越园不可能都有 圆个相等的实数根援

分析 摇本题若分别考虑 猿个方程的根的情况,则不太容易找到突破口,于是把 猿个方程作为 员个整体来考虑,问题则容易解决援

证法 员 摇假设题中 猿个方程都有两个相等的实数根,则有:

$\begin{cases}\Delta_{员}越原遭^{圆}原原糟越园 \\ \Delta_{圆}越糟^{圆}原原葬遭越园 \\ \Delta_{猿}越葬^{圆}原原遭糟越园\end{cases}$三式相加得：

葬^{圆}垣遭^{圆}垣糟^{圆}原葬遭原糟葬原遭糟越园

（葬原遭）^{圆}垣（遭原糟）^{圆}垣（糟原葬）^{圆}越园

亦葬越遭越糟这与已知条件矛盾，亦题中的猿个方程不可能都有两个相等的实数根援

证法圆摇设猿个方程的判别式分别为$\Delta_{员}$、$\Delta_{圆}$、$\Delta_{猿}$，由葬遭糟不全等，得$\Delta_{员}$垣$\Delta_{圆}$垣$\Delta_{猿}$越圆[（葬原遭）^{圆}垣（遭原糟）^{圆}垣（糟原葬）^{圆}]跃园亦$\Delta_{员}$、$\Delta_{圆}$、$\Delta_{猿}$中至少有员个大于园即至少有一个方程有不等的实数根援

例苑摇已知关于曾的一元二次方程（员原圆皂）曾^{圆}原圆$\sqrt{皂垣员}$·曾原员越园有两个实数根，求皂的取值范围援

解摇摇方程有两个实数根，则须

$\left.\begin{cases}\Delta\geqslant园\Rightarrow皂\leqslant园 \\ 员原圆皂\neq园\Rightarrow皂\neq\frac{员}{圆}\Rightarrow \\ 皂垣员\geqslant园\Rightarrow皂\geqslant原员\end{cases}\right\}$原员≤皂≤园且皂$\neq\frac{员}{圆}$时，

原方程有两个实数根援

说明摇解题时要注意题目中的隐含条件如皂垣员≥园（员原圆皂）$\neq$园等援

例愿摇已知关于曾的方程（噪原员）曾^{圆}原（猿噪原员）曾垣圆噪越园有两个不同的正整数根，求正整数噪的值援

解摇摇疫关于曾的方程有两个不同的实数根，

亦$\begin{cases}噪原员\neq园 \\ \Delta越（猿噪原员）^{圆}原愿噪（噪原员）跃园\end{cases}$摇即$\begin{cases}噪\neq员 \\ 噪\neq猿\end{cases}$

亦原方程变形为[（噪原员）曾原圆]·[（噪原员）曾原员]越园援

解之得：$曾_{员}越\frac{远}{噪原员}$，$曾_{圆}越\frac{员}{噪原员}$

要使$曾_{员}$为正整数，则噪越圆源苑；

要使$曾_{圆}$为正整数，则噪越圆缘员援

亦噪越圆援

说明摇解答本题分为两步：

第一步：先由 噪原员≠园及 Δ 跃园得出方程有两个不相等的实数根援

第二步：再由 $\frac{远}{噪原员}$ 及 $\frac{员园}{噪原员}$ 为正整数，求出所有的正整数 噪值，从中选出满足条件的正整数 噪援

例 怨 摇葬、遭、糟是△粤月悦的三条边长，当 皂跃园时，关于 曾的方程 糟(曾圆 垣皂)垣遭(曾圆 原皂) 原圆√皂葬曾越园有两个相等的实数根，试判断△粤月悦的形状援

证明摇由原方程得：

(遭垣糟)曾圆 原圆√皂葬曾垣(糟原遭)皂越园，

疫方程有两个相等的实数根，

亦Δ 越(圆√皂葬)圆 原源(遭垣糟)(糟原遭)皂越园，

即 源皂(葬圆 原糟圆垣遭圆) 越园，

疫皂跃园，亦葬圆 原糟圆垣遭圆越园，

即 糟圆越葬圆 垣遭圆，亦△粤月悦是直角三角形，且∠悦越怨园毅援

例 员园 摇已知 葬为实数，若方程 曾圆 垣(圆葬原员)曾垣葬圆越园有两个不等实根，且这两个根在方程 曾圆 垣圆葬曾垣葬圆原葬原员越园的两根之间，求 噪的取值范围援

解摇摇疫曾圆 垣(圆葬原员)曾垣葬圆越园有两个不等实根，

亦Δ员越(圆葬原员)圆 原源葬圆 跃园，即 葬约员/源，且两根为 曾员，圆越原葬依√葬原员，

方程 曾圆 垣圆葬曾垣葬圆原葬原员越园的判别式：

Δ圆越源葬圆 原源(葬圆原葬原员) 越源[(葬原员/圆)圆 垣 猿/源] 跃园

故对于任何实数 葬都有两个不同的实根 曾忆员，圆越原葬依√葬圆原葬垣员，

题目要求的是对哪些 噪值，有

曾忆员约曾员，曾圆约曾忆圆，即 √葬圆原葬垣员跃√葬原噪

平方移项得 噪跃葬圆原葬援

综上讨论，得 葬圆原葬约噪约葬援

例 员员 摇若方程 曾圆 原圆(皂原员)曾垣猿皂圆原圆皂垣源噪越园对任意有理数 皂都有有理根，试求实数 噪的值援

分析摇一元二次方程的两根为有理根的条件是：根的判别式 Δ 为一个完全平

方式援

解摇摇疫原方程根的判别式：

$\Delta_{员}$越远(皂原灵^{圆}原原(猿皂^{圆}原园皂垣原愿 越原(皂^{圆}原远皂垣原原愿，

依题意对于任意有理数 皂,此方程的根都是有理数，

亦代数式 皂^{圆}原远皂垣原原愿对于任意有理数 皂,都是一个有理数的完全平方援即关于 皂的一元二次方程 皂^{圆}原远皂垣原原愿越园必有相等实根，

亦$\Delta_{圆}$越(原远^{圆}原(源原愿 越园,解得 噪越原$\frac{缘}{源}$援

摇第三节摇一元二次方程的根与系数的关系摇

知识要点

摇摇员援一元二次方程的根与系数的关系——韦达定理：

如果方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园(葬≠园)的两根为 曾员,曾圆,那么 曾员垣曾圆越原$\frac{\text{遭}}{\text{葬}}$,曾员·曾圆越$\frac{\text{糟}}{\text{葬}}$援

特别地,当一元二次方程的二次项系数为员时,设 曾员,曾圆是方程 曾圆垣责曾垣择越园的两个根,则 曾员垣曾圆越原责,曾员·曾圆越择援

圆援韦达定理逆定理：

以两个数 曾员、曾圆为根的一元二次方程(二次项系数为员)是 曾圆原(曾员垣曾圆)曾垣曾员曾圆越园援

一般地,如果有二个数 曾员、曾圆满足

$$\begin{cases}\text{曾员垣曾圆越原}\frac{\text{遭}}{\text{葬}}\\ \text{曾员曾圆越}\frac{\text{糟}}{\text{葬}}\end{cases}$$

那么 曾员、曾圆必定是一元二次方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园(葬≠园)的两个根援

例题选析

例员 摇已知方程 猿曾圆原(员原√猿)曾垣择越园有一个根是 原员,求它的另一根及 择值援

分析员 摇根据韦达定理可得关于另一根及 择的方程组郾

解法员 摇设方程另一个根为 曾员,则有 $\begin{cases} 曾_{员}垣(原员)越\dfrac{员原\sqrt{猿}}{猿} \cdots\cdots ① \\ 曾_{员}(原员)越\dfrac{择}{猿} \cdots\cdots ② \end{cases}$

从①中得 $曾_{员}越\dfrac{源原\sqrt{猿}}{猿}$,代入②得 择越√猿原源援

分析圆 摇根据根的意义,把 原员代入原方程即可求出 择值郾

解法圆 摇疫 原员是方程的根

亦猿(原员)圆原(员原√猿)(原员)垣择越园,择越√猿原源援

设另一个根为 曾员,$曾_{员}(原员)越\dfrac{\sqrt{猿}原源}{猿}$,$曾_{员}越\dfrac{源原\sqrt{猿}}{猿}$援

说明 摇已知方程的一个根,求另一个根及未知数系数的值是一元二次方程根与系数关系的应用援此题解法圆是应用了方程根的概念援

例圆 摇已知 曾员、曾圆是方程 圆曾圆原缘曾原员越园的两个根,求下列各式的值:

(员)$曾_{员}^{圆}原曾_{员}曾_{圆}垣曾_{圆}^{圆}$;(圆)$曾_{员}原曾_{圆}$援

分析 摇解答此类问题是根据一元二次方程根与系数关系求出 曾员垣曾圆、曾员曾圆,再把要求的各式设法用 曾员垣曾圆、曾员曾圆表示,即可求解援

解 摇摇疫$曾_{员}垣曾_{圆}越\dfrac{缘}{圆}$,$曾_{员}曾_{圆}越原\dfrac{员}{圆}$,

亦$曾_{员}^{圆}原曾_{员}曾_{圆}垣曾_{圆}^{圆}越(曾_{员}垣曾_{圆})^{圆}原猿曾_{员}曾_{圆}越\dfrac{圆缘}{源}垣\dfrac{猿}{圆}越\dfrac{猿员}{源}$,

$曾_{员}原曾_{圆}越依\sqrt{(曾_{员}原曾_{圆})^{圆}}越依\sqrt{(曾_{员}垣曾_{圆})^{圆}原源曾_{员}曾_{圆}}$

$越依\sqrt{\dfrac{圆缘}{源}垣圆}越依\dfrac{\sqrt{猿猿}}{圆}$援

例猿 摇求出一个一元二次方程,使它的两个根比方程 曾圆原曾原愿越园的两个根都大 圆援

解摇摇设方程 曾圆原曾原原越园的两个根为 曾员、曾圆,则所求方程为 曾圆垣寅曾垣寅越园的两个根为 曾员垣圆,曾圆垣圆.疫曾员垣曾圆越员,曾员曾圆越原源

亦寅越原[(曾员垣圆)垣(曾圆垣圆)]越原缘

摇摇寅越(曾员垣圆)(曾圆垣圆)越曾员曾圆垣圆(曾员垣曾圆)垣源越园

亦所求方程为 曾圆原缘曾垣园越园援

例源 摇已知 曾员、曾圆是关于 曾的方程 源曾圆原(猿皂原缘)曾原远皂圆越园的两个实数根,且 $\left|\frac{曾_员}{曾_圆}\right|$越$\frac{猿}{圆}$,求 皂的值援

解摇摇Δ越[原(猿皂原缘)]圆原源伊源(原远皂圆)越(猿皂原缘)圆垣怨远皂圆跃园,

曾员曾圆越原$\frac{远皂^圆}{源}$越原$\frac{猿}{圆}$皂圆约园,亦曾员、曾圆异号,

亦$\frac{曾_员}{曾_圆}$越原$\frac{猿}{圆}$;

曾员曾圆越$\frac{曾_员}{曾_圆}$曾圆圆,曾圆圆越皂圆,曾圆越依皂,

曾员垣曾圆越$\frac{猿皂原缘}{源}$⇒原$\frac{员}{圆}$曾圆越$\frac{猿皂原缘}{源}$援

当 曾圆越皂时,原$\frac{皂}{圆}$越$\frac{猿皂原缘}{源}$,皂越员;

当 曾圆越原皂时,$\frac{皂}{圆}$越$\frac{猿皂原缘}{源}$,皂越缘援

例缘 摇设 皂是不小于 原员的实数,它使得关于 曾的方程 曾圆垣圆(皂原圆)曾垣皂圆原猿皂垣猿越园有两个不相等的实数根 曾员、曾圆援

(员)若 曾员圆垣曾圆圆越远,求 皂的值援

(圆)求$\frac{皂曾_员^圆}{员原曾_员}$垣$\frac{皂曾_圆^圆}{员原曾_圆}$的最大值援

分析摇本题首先考虑 Δ跃园,求得 皂的取值范围,然后充分利用根与系数关系来解题援

解摇摇疫方程 曾圆垣圆(皂原圆)曾垣皂圆原猿皂垣猿越园有两个不相等的实数根 曾员、曾圆,

亦Δ越[圆(皂原圆)]圆原源(皂圆原猿皂垣猿)越原源皂垣源跃园,

皂约员,亦 原员≤皂约员援

(员) 根据根与系数的关系得：

{ 曾员 垣曾圆 越原圆(皂原圆)，
{ 曾员 · 曾圆 越皂圆 原缘皂 垣猿

亦曾圆员 垣曾圆圆 越(曾员 垣曾圆)圆 原圆曾员曾圆 越原(皂原圆)圆 原圆(皂圆 原缘皂 垣猿)

越原圆皂圆 原远皂 垣员园

亦原圆皂圆 原远皂 垣员园越远即 皂圆 原猿皂 垣圆越园

解得摇皂越 (缘依√员苑)/圆；

疫 原员≤ 皂约员，亦皂越 (缘原√员苑)/圆援

(圆) 摇 皂曾圆员/(员原曾员) 垣 皂曾圆圆/(员原曾圆) 越 皂[曾圆员(员原曾圆) 垣曾圆圆(员原曾员)]/((员原曾员)(员原曾圆))

越 皂[曾圆员 垣曾圆圆 原曾员曾圆(曾员 垣曾圆)]/(曾员曾圆 原(曾员 垣曾圆) 垣员)

越 皂[(圆皂圆 原远皂 垣员园) 垣(皂圆 原缘皂 垣猿) 圆(皂原圆)]/(皂圆 原缘皂 垣猿垣圆(皂原圆) 垣员)

越 皂(圆皂猿 原愿皂圆 垣愿皂原圆园)/(皂圆 原皂)

越圆(皂圆 原缘皂 垣猿) 越圆(皂原 猿/圆)圆 原 缘/圆

疫 原员≤ 皂约员，亦当 皂越原员时，皂曾圆员/(员原曾员) 垣 皂曾圆圆/(员原曾圆) 的最大值为 员远援

例 远 摇若 葬≠园，遭圆越葬糟，求一元二次方程 葬曾圆 垣遭曾垣糟越园 的根援

分析 员 摇解一元二次方程 葬曾圆 垣遭曾垣糟越园(葬≠园)一般用求根公式 曾员，圆 越 (原遭依√遭圆 原源葬糟)/圆葬，然后再用条件 遭圆越葬糟 对一般解进行化简，求出解的特殊形式援

解法 员 摇由 遭圆越葬糟 得 遭 越(葬糟)圆

因此，√遭圆 原源葬糟越√(葬糟)圆 原源葬糟越√(葬原糟)圆 越渣葬原糟渣援

(员) 当 葬原糟≥园 时，渣葬原糟渣越葬原糟

代入求根公式 曾员，圆 越 (原遭依√遭圆 原源葬糟)/圆葬，化简可得：