前 言

QIAN YAN

为推进素质教育，减轻初中生的课业负担，注重能力培养，体现新世纪教材、教学改革的要求，实现由应试教育向素质教育的转轨，我们特组织了一批知名初中优秀教师和教研员，以人教社九年义务教育2003年春季统编新版教材为依据，编写了这套《初中同步测控优化设计》系列丛书。在编写过程中，我们力求使抽象内容形象化、复杂内容简明化、呆板知识趣味化、能力训练系统化，努力使其成为教师指导下的学生同步自学辅导书中的精品。

本丛书具有以下特点：

1.依据教学大纲　强化同步性

该丛书根据九年义务教育教学大纲的要求，紧紧围绕最新《课程标准》和2002年版新教材。初一、初二、初三各年级按学期分上、下册编写。本丛书编写过程中，吸纳了全国各地近年来初中教育教学研究的最新成果，渗透了学科间交叉综合的思想。每本书单元、章、节、目、点层次清晰，并且配有期中、期末试题，完全与初中教学进程一致。

2.课内课外结合　突出可读性

本丛书的编写，以符合初中生年龄特点和心理特征为前提，避免了僵硬的知识灌输，尽量使课内外知识形成有机的结合。采取网络化、情节化、操作化等多种活泼的形式，用准确、生动、有趣、流畅的语言加以表述，融知识性和趣味性于一体，以增强其可读性。

3.遵循教学规律　注重实用性

本书在内容编排上遵循了由易到难、由浅入深、循序渐进、通俗易懂的原则，营造了一个讲授、自学、练习一体化的学习平台，既适合于教师指导下的课堂学习使用，又适合于学生的课后自学使用。书中对许多栏目设置了学案形式，或填空式、或图表式、或问答式，新颖独到，方便训练。单元自测题按100分45分钟合理安排，易于操作。

4.突出素质教育　体现创新性

本书的编写在内容选材和试题设计上力求典型新颖，大量增加了研究性课题、开放性问

题和贴近社会生产、生活实际问题的内容，以激活学生的共同参与意识，培养学生的创造性和发散思维。还创设了象[知识拓展][知识小品]和[你也会做]等灵活性栏目，有的适于动手操作，有的适于集体表演，它将对初中生综合素质的提高起到良好的启示作用。

本套丛书的编写，汇集了众多知名教师的辛勤劳动，集中展示了现代教育的科研成果，希望对广大初中学生的学习有所裨益。

由于编者水平有限，加之时间仓促，偏颇之处在所难免，恳望读者提出宝贵意见，以利于再版时修订。

编　者

2002 年 12 月

目录

LU MU

代数部分

几何部分

目录

LU MU

代数部分

第十三章　函数及其图象

§13.1　平面直角坐标系

〖学习目标〗

1. 了解平面直角坐标系的有关概念，并能正确地画出直角坐标系.
2. 理解直角坐标系中点的坐标的意义，能根据坐标找出点，由点求出坐标.
3. 能掌握部分特殊点的坐标特征.

〖知识要点〗

1. 坐标平面　为了用一对实数表示平面内的点，在平面内画两条互相垂直的数轴，组成平面直角坐标系（如图 13—1），水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向，铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向，两轴交点 O 是原点，这个平面叫做坐标平面.

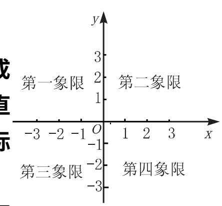

图 13—1

2. 数轴上的点与实数是一一对应的　在平面内建立直角坐标系之后，平面内的点与有序实数对就建立了一一对应关系.
3. 特殊点的坐标特征

(1)坐标轴上的点，不在任何一个象限内，其坐标特征是：x 轴上的点，纵坐标为 0；如：(3,0)、(−5,0)、(a,0). y 轴上的点，横坐标为 0，如：$(0,\frac{1}{2})$、(0,−4)、(0,n). 原点 O 的坐标为(0,0).

(2)各象限内点的坐标的符号特征，如下表

点所在象限	横坐标符号	纵坐标符号	举　例
第一象限	+	+	$(2,4)$，$(\frac{1}{3},\frac{3}{2})$
第二象限	−	+	$(-3,\frac{1}{2})$，$(-6,5)$
第三象限	−	−	$(-3,-3)$，$(-2,-\frac{1}{5})$
第四象限	+	−	$(1,-1)$，$(3,-7\frac{1}{2})$

(3)对称点的坐标特征

关于 x 轴对称的两点，横坐标相同，纵坐标互为相反数；如 $(3,-2)$ 与 $(3,2)$．关于 y 轴对称的两点，横坐标互为相反数，纵坐标相同；如 $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 与 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$．关于原点对称的两点，横、纵坐标均互为相反数；如 $(-7,5)$ 与 $(7,-5)$．

(4)象限角平分线上的点的坐标特征

第一、三象限两坐标轴夹角平分线上的点，其横、纵坐标相等；如 $(\frac{5}{8},\frac{5}{8})$、$(-8\frac{1}{2},-8\frac{1}{2})$．第二、四象限两坐标轴夹角平分线上的点，其横、纵坐标互为相反数；如 $(-2,2)$、$(3,-3)$．

〖学习指导〗

1. 数轴与直角坐标系既有区别又有联系．直角坐标系是由相互垂直的两条数轴组成；数轴上点的坐标是一个实数，直角坐标系中点的坐标是一对有序实数；数轴上的点与实数是一一对应的，坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的，这就建立了“数”与“形”的联系．
2. 怎样确定坐标平面内点的坐标？
   在直角坐标系中求点的坐标，首先过这点分别向 x 轴、y 轴作垂线，然后把 x 轴上垂足的坐标作为点的横坐标，把 y 轴上垂足的坐标作为点的纵坐标，按横坐标在前、纵坐标在后的顺序写在小括号内，并用逗号分开，即可得到点在坐标平面内的坐标．
3. 已知点的坐标，怎样求出直角坐标系中的该已知点？
   首先在 x 轴、y 轴上找出表示横坐标、纵坐标的点，然后分别作垂线，交点即为所求．
4. 各个象限内点的横、纵坐标的符号一定要在理解的基础上牢牢记住，并能根据点的坐标的符号迅速判断出该点在哪个象限．

[例1]已知点 $A(2a-5,6-2a)$ 在第四象限，求 a 的取值范围．

分析：本题主要是考查第四象限内点的坐标的特征．第四象限内点的坐标的特征是横坐标大于 0，纵坐标小于 0．

解：$\because (2a-5,6-2a)$ 在第四象限，$\therefore 2a-5>0$，且 $6-2a<0$．解得 $a>3$．

[例2]已知点 $A(3,y)$ 到原点的距离为 5，求 A 点的坐标．

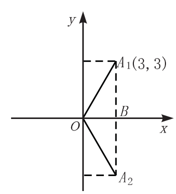

图 13—2

解：$\because A(3,y)$，(如图 13—2 所示)

$\therefore OB=3,AB=|y|$．

又点 A 到原点的距离为 5，$\therefore OA=5$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\sqrt{3^2+y^2}=5$．

$\therefore y=\pm 4$．

即 A 点的坐标为 $(3,4)$ 或 $(3,-4)$．

说明：这里要注意 y 的取值可能有两种情况，不要丢解．书写“$AB=|y|$”时，要注意加绝对值符号．

5. 掌握特殊点的坐标特征，应注意：
   (1)由特殊点的坐标能迅速说出是怎样的特殊点；如 $(-1,0)$ 在 x 轴的负半轴上；点 $(1,-2)$ 与点 $(-1,2)$ 关于原点对称等．
   (2)应用特殊点的坐标解题时，要考虑实际问题．如已知点 $A(x,4)$，$B(-3,y)$，$AB/\!/x$ 轴，求 x、y．
   错解：$\because AB/\!/x$ 轴　$\therefore x$ 为全体实数，$y=4$．

分析:与 x 轴平行的直线上的点,其纵坐标相同;与 y 轴平行的直线上的点,其横坐标相同.做此题时忽略了当 $x=-3$ 时 A、B 两点重合,不构成线段,也无从谈起 $AB /\!/ x$ 轴.因此做此题时,除了由 $AB /\!/ x$ 轴得出纵坐标相等外,还有横坐标不等.正确答案为:$x \neq -3$ 的所有实数,$y=4$.

[例3](1)已知点 P 的坐标为$(5,-3)$,则点 P 关于原点的对称点的坐标是______.

(2)如果点 $M(1-x,1-y)$ 在第二象限,那么点 $N(1-x,y-1)$ 关于原点的对称点 P 在第几象限?

(3)如果 P 点的坐标是(a,b),它关于 y 轴的对称点为 P_1,而 P_1 关于 x 轴的对称点为 P_2,点 P_2 的坐标是$(-2,3)$,求 a、b 的值.

(4)在平面直角坐标系中,点 $M(25-5a,9-3a)$ 关于 x 轴的对称点在第一象限内,且 a 是整数,求点 M 的坐标.

分析:本题四道题从不同角度考查对称点坐标的特征的理解,主要是应用对称点的坐标的特征解答.

解:(1)$\because$ 关于原点对称的两点,横纵坐标均互为相反数.

$\therefore P(5,-3)$ 关于原点对称的点的坐标是$(-5,3)$.

(2)$\because$ 点 $M(1-x,1-y)$ 在第二象限,

$\therefore 1-x<0, 1-y>0$,$\therefore y-1<0$,$\therefore$ 点 $N(1-x,y-1)$ 在第三象限.

又 $\because$ 点 N 与 P 关于原点对称,$\therefore$ 点 P 在第一象限.

(3)$\because P_1$ 关于 x 轴的对称点是 $P_2(-2,3)$,$\therefore$ 点 P_1 的坐标是$(-2,-3)$.

又 $\because$ 点 P 关于 y 轴的对称点是点 P_1,$\therefore$ 点 P 的坐标是$(2,-3)$,即 $a=2$,$b=-3$.

(4)$\because$ 点 M 关于 x 轴的对称点在第一象限,$\therefore$ 点 $M(25-5a,9-3a)$ 在第四象限,

$\therefore \begin{cases} 25-5a>0, \\ 9-3a<0. \end{cases}$ 解得 $3<a<5$,

又 $\because a$ 为整数,$\therefore a=4$,$\therefore$ 点 M 的坐标是$(5,-3)$.

说明:围绕特殊点、对称点的坐标考查学生对平面直角坐标系的理解,是近几年中考常见题型,不管其提供的坐标是一个数还是一个代数式,我们都依据特征一步步弄清每个点的坐标(或所在的象限),应注意特殊点、对称点的坐标特征不要死记硬背,要结合坐标系理解;还要仔细审题,弄清点与点的关系.

[例4]如图 13—3 所示,在▱$ABCD$ 中,点 A 在坐标原点,点 D 在第一象限的角平分线上.又知 $AB=6$,$AD=2\sqrt{2}$.求点 B、C、D 的坐标.

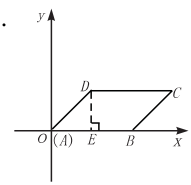

图 13—3

解:在▱$ABCD$ 中,$AB=CD=6$,$AD=BC=2\sqrt{2}$.

$\because$ 点 D 在第一象限的角平分线上,$\therefore \angle DAB=45^\circ$.

过点 D 作 $DE \perp AB$,垂足为 E.

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰直角三角形.$\therefore DE=AE$.

$\because AE^2+DE^2=AD^2$,$\therefore 2DE^2=8$,$\therefore DE=2$(-2 舍去).

即三点的坐标分别为:$B(6,0)$,$C(8,2)$,$D(2,2)$.

〖效果评估〗

1. 选择题

(1)点 $P(-3,-2)$ 到 x 轴、y 轴的距离分别是 …………………………………………………… (　　)

A. $-3,-2$　　B. $3,2$　　C. $-3,2$　　D. $2,3$

(2)点 $P(a,b)$ 在第二象限,则点 $Q(-a,\sqrt{b^2})$ 在 …………………………………………………… (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

(3)若 $A(a,b)$、$B(b,a)$表示同一点,那么这一点一定在 ……………………………………（　　）

A. 第二、四象限角平分线上　　B. 第一、三象限角平分线上

C. 平行于 x 轴的直线上　　D. 平行于 y 轴的直线上

(4)一学生误将点 A 的纵横坐标的次序颠倒,写成 $A(a,b)$;另一学生误将点 B 的坐标写成关于 y 轴的对称点的坐标,写成 $B(-b,-a)$;则 A、B 两点原来的位置关系是 ……………………（　　）

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称　　C. 关于原点对称　　D. A、B 重合

(5)横坐标与纵坐标符号相反的点在……………………………………………………（　　）

A. 第二象限内　　B. 第一、三象限内　　C. 第二、四象限内　　D. 第四象限内

(6)平行于 y 轴的直线上,任意两点的坐标之间的关系是 ……………………………………（　　）

A. 纵坐标相等　　B. 横坐标相等

C. 横坐标与纵坐标都相等　　D. 以上答案都不对

(7)若点 M 到 x 轴的距离是 2,到 y 轴的距离是 3,则 P 点的坐标是 ……………………（　　）

A. (3,2)　　B. (2,3)

C. (−3,2)　　D. (3,2),(−3,2),(−3,−2),(3,−2)

(8)已知点 $A(a+2,4-b)$关于 x 轴的对称点是 $B(2b+3,2a)$,则 ab 的值是 ……………（　　）

A. $-\frac{14}{3}$　　B. $-\frac{2}{9}$　　C. 6　　D. −6

(9)已知 $P(x,y)$,如果 $xy=0$,那么点 P 的位置在 ……………………………………（　　）

A. x 轴上　　B. y 轴上　　C. x 轴或 y 轴上　　D. 坐标原点

(10)若 $A(-a,b)$在第二象限或 x 轴的负半轴上,则 a、b 应为 ……………………………（　　）

A. $a>0,b<0$　　B. $a>0,b\leqslant0$　　C. $a>0,b\geqslant0$　　D. $a<0,b\geqslant0$

2. 填空题

(1)根据图 13—4 填表:

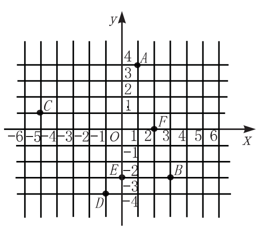

图 13—4

点	坐标	所在象限或坐标轴
A		
B		
C		
D		
E		
F		

(2)若点 $P(m,5)$在第一象限内两条坐标轴夹角的平分线上,则 $m=$______;若点 $Q(8,n)$在第四象限内两条坐标轴夹角的平分线上,则 $n=$______.

(3)若 $P(a,b)$在第二象限内,则 $A(-b^2,-a+b)$在第______象限;

(4)在直角坐标系内,已知 $A(x,5)$,$B(2,y)$,A、B 关于 x 轴对称,则 $x=$______,$y=$______;

(5)以点 $M(0,2)$为圆心,5 为半径的圆与 x 轴交点的坐标为______;

(6)当 m ______时,点 $A(-3,2m-1)$关于原点的对称点在第四象限;

(7)点 $P(-5,4)$到 x 轴的距离是______,到 y 轴的距离是______.

3. 已知点 $P(a,a-b)$在第四象限,求:

(1)$Q(-a,b)$所在象限;

(2)Q 点关于 x 轴、y 轴、原点对称的对称点 Q_1、Q_2、Q_3 的坐标;

4. 已知点 $P(x,y)$的坐标满足等式$(x-2)^2+\sqrt{y+6}=0$.求点 P 关于原点的对称点的坐标.
5. 已知等边三角形的边长为 4,一个顶点在原点,该顶点的对边平行于 y 轴,求它的各顶点的坐标.
6. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(1+p)x+(3p^2+4pq+4q^2+2)=0$ 有实数根,判断点 $P(p,q)$所在的象限.

〖想一想〗

下象棋是同学们喜爱的娱乐形式,同学们可否知道,象棋里充满着数学问题.“马能否跳回原位”就是其中的一个问题.

象棋盘上有一只马,它跳七步能回到原来的位置上吗?

你不妨试试看.

§13.2 函　数

〖学习目标〗

1. 能分清实例中出现的常量与变量,自变量与函数.
2. 能理解自变量的取值范围和函数值的意义,对解析式中只含有一个自变量的简单的整式、分式、二次根式的函数,会确定它们的自变量的取值范围和求它们的函数值.
3. 知道常量与变量的辩证关系和反映在函数概念中的运动变化观点.

〖知识要点〗

1. 变量　某一过程中可以取不同数值的量,叫做变量.
2. 常量　某一过程中保持同一数值的量,叫做常量.
3. 函数　设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y,如果对于 x 的每一个值,y 都有惟一的值与它对应,那么就说 x 是自变量,y 是 x 的函数.
4. 解析法　用数学式子表示函数的方法叫做解析法.
5. 自变量的取值范围　在用解析法表示的函数中,使解析式有意义的自变量取值的全体叫做自变量的取值范围.如果遇到实际问题,还必须使实际问题有意义.
6. 函数值　对于自变量在取值范围内的一个确定的值,例如 $x=a$,函数有惟一确定的对应值,这个对应值,叫做当 $x=a$ 时的函数值,简称函数值.

〖学习指导〗

1. 常量与变量的相对性,就是说在一过程中的常量在另一过程中可能是变量;同样,在一过程中的变量在另一过程中也可能是常量.例如,设路程为 S(千米),速度为 v(千米/时),时间为 t(时),有(1)$v=\frac{S}{6}$;(2)$t=\frac{50}{v}$.(1)中时间为常量,速度、路程为变量,(2)中路程为常量,时间、速度为变量.若有(3)$S=60t$,此式中速

度为常量,路程、时间为变量.

2. 理解函数的意义应注意:

(1)构成函数的条件是:①两个变量;②对自变量 x 在取值范围内的每一个值,y 都有惟一的值与其对应.例如 $y=x^2$ 中满足条件①、②,所以 y 是 x 的函数;$y^2=x$ 中,因为与 $x=2$ 相对应的 y 值有两个:$\pm\sqrt{2}$,不惟一,所以 $y^2=x$ 中 y 不是 x 的函数.

(2)判定两个(或两个以上)函数为同一函数的条件是:①函数的对应规律相同;②自变量的取值范围相同.例如,函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$,满足条件①、②,所以为同一个函数;函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 满足②,不满足①,所以不是同一个函数;函数 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$,由于自变量 x 的取值范围不同,所以也不是同一个函数.

3. 函数的自变量取值范围的求法:

(1)如果函数的解析式是整式,则自变量的取值范围是全体实数.

(2)如果函数的解析式是分式,则自变量的取值范围是使分母不为零的实数.

(3)如果函数的解析式是二次根式,则自变量的取值范围是使被开方数大于或等于零的实数.

(4)含有零指数、负整数指数的函数,自变量的取值范围是使底数不为零的实数.

(5)如果函数的解析式兼有上述两种或两种以上的结构特点,则求自变量的取值范围时,先按(1)~(4)所述方法分别求出它们的取值范围,再求它们的公共部分.也就是通过列不等式组求出.例如,求 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围,由题意得 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x-1\neq 0.\end{cases}$ 解得 $x\geqslant -1$,且 $x\neq 1$,所以 x 的取值范围是 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 1$.

(6)在确定函数中自变量的取值范围时,如果遇到实际问题,还必须使实际问题有意义.例如,函数解析式 $S=4\pi R^2$ 中自变量 R 的取值范围是全体实数,如果式子表示球的表面积 S 与球半径 R 的关系,那么自变量 R 的取值范围就是 $R>0$.

[例1]求下列函数的自变量的取值范围:

(1)$y=\frac{1}{2x-1}$;(2)$y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$;(3)$y=(x^2-3x+2)^0$.

分析:一般与实际意义无关的解析式中自变量的取值范围是:整式的为全体实数,分式的是使分母不为零的实数,根式中偶次根式下要求被开方数为非负数,零指数幂要求底数不为零.

解:(1)$x\neq\frac{1}{2}$;(2)$x\geqslant -2$ 且 $x\neq 2$;(3)$x\neq 1$ 且 $x\neq 2$.

说明:自变量的取值同时满足几个不等式时,往往借助数轴进行分析.

4. 与函数值有关的问题

(1)函数是由一个代数式来给定时,求函数值的实质是求代数式的值.例如,求当 $x=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 时,函数 $y=\sqrt{2}x^2+\frac{3}{x}$ 的值,实质就是求当 $x=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 时代数式 $\sqrt{2}x^2+\frac{3}{x}$ 的值.

(2)已知函数的解析式,若给定函数值,求相应的自变量的实质是解方程;例如,已知函数 $y=x^2-5x+5$ 的函数值是 -1,求 x 的值,实质就是解方程 $x^2-5x+5=-1$;若给定函数值的一个取值范围,求相应的自变量的取值范围,实质是解不等式.例如,当 x 取什么值时,函数 $y=3(1-2x)-5(x-3)$ 的函数值大于 -4?实质就是解不等式 $3(1-2x)-5(x-3)>-4$.

因此，与函数值有关的问题可以转化为求代数式的值、解方程、解不等式等已熟悉的问题.

[例3](1)当 $x=$______时，函数 $y=x^2-1$ 与函数 $y=x+5$ 的值相等；

(2)已知函数 $y_1=2x-3$，$y_2=5-x$，当 x______时，$y_1>y_2$.

解：(1)由题意，得 $x^2-1=x+5$，即 $x^2-x-6=0$，

解得 $x=3$ 或 $x=-2$. ∴当 $x=3$ 或 $x=-2$ 时，两函数的值相等.

(2)由题意，得 $2x-3>5-x$，即 $3x>8$，解得 $x>\frac{8}{3}$，∴当 $x>\frac{8}{3}$ 时，$y_1>y_2$.

[例4]将下列各式改写成以 x 表示 y 的形式.

(1)$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1(x\neq1)$；(2)$x=\frac{2y+1}{3y-1}(x\neq\frac{2}{3})$；(3)$(1-2x)(y+2)=3(x\neq\frac{1}{2})$.

分析：这种变形实质上是把 y 当作未知数，x 为已知数，解关于 y 的方程.

解：(1)$y=\frac{x}{x-1}(x\neq1)$；(2)$y=\frac{x+1}{3x-2}(x\neq\frac{2}{3})$；(3)$y=\frac{1+4x}{1-2x}(x\neq\frac{1}{2})$.

说明：等式变形后，如$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，变形为 $y=\frac{x}{x-1}$，就需 $x\neq1$ 时才有意义. 变形后的函数式后面要附注自变量的取值范围.

〖效果评估〗

1. 选择题

(1)圆周长公式 $C=2\pi R$ 中，下列说法正确的是 …………（　　）

A. π、R 是变量，2 为常量　　B. R 为变量，2、π、C 为常量

C. C 为变量，2、π、R 为常量　　D. C、R 为变量，2、π 为常量

(2)下列各组函数中，两个函数相同的是 …………（　　）

A. $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$　　B. $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

C. $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$　　D. $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=\frac{x^0}{x}$

(3)已知下面的计算程序：

$\boxed{输入\ x}\to\boxed{+5}\to\boxed{\times2}\to\boxed{-4}\to\boxed{输出\ y}$，则 y 与 x 之间的函数关系式是 …………（　　）

A. $y=x+6$　　B. $y=2x+6$　　C. $y=5x-2$　　D. $y=x-10$

(4)$y=\frac{1}{\sqrt{2x}-1}$的自变量 x 的取值范围是 …………（　　）

A. $x>0$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$　　B. $x\geqslant0$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$　　C. $x\geqslant0$　　D. $x\neq\frac{1}{2}$

(5)函数 $y=x+\sqrt{-x}$的自变量的取值范围是 …………（　　）

A. $x\leqslant0$　　B. $x\geqslant0$　　C. $x<0$　　D. $x\neq0$

(6)下列各变量之间的关系，不能构成函数关系的是 …………（　　）

A. 正方形的周长和面积　　B. 等腰三角形的底边与面积

C. 圆的半径与周长　　D. 长方形的宽一定时，长方形的长与面积

(7)已知 x、y 满足等式$(y+5)(x-3)=-6$，用 x 的代数式表示 y，得到 …………（　　）

A. $y=5+\frac{6}{x-3}$　　B. $y=-5+\frac{6}{x-3}$　　C. $y=\frac{-5x+9}{x-3}$　　D. $y=\frac{-5x}{x-3}$

(8)已知函数 $y=x^2-9x+10$ 的函数值为 2,则 x 的值是 …………………………………………… (　　)

A. $x=8$　　B. $x=8$ 或 $x=1$　　C. $x=1$　　D. $x=8$ 或 $x=-1$

(9)一个圆的半径为 5 cm,它的半径减少 x cm 后得到新的圆的面积为 y cm^2,面积 y cm^2 和 x cm 之间的函数关系式为 $y=\pi(5-x)^2$,其中自变量 x 的取值范围是 …………………………………… (　　)

A. $0<x<5$　　B. $0\leqslant x<5$　　C. $0<x\leqslant 5$　　D. $0\leqslant x\leqslant 5$

(10)当 $x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$时,函数 $y=\frac{3}{x}$的值为 ……………………………………………………… (　　)

A. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$　　C. -3　　D. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(11)若函数 $y=2x-4$ 中 x 的取值范围为 $1\leqslant x\leqslant 3$,则 y 的取值范围是 ……………………… (　　)

A. $-2<y<2$　　B. $-2\leqslant y<2$　　C. $-2<y\leqslant 2$　　D. $-2\leqslant y\leqslant 2$

(12)若函数 $y=mx^2+n$(m、n 为常数)中,当 $x=1$ 时,$y=3$;当 $x=2$ 时,$y=6$,则 m、n 的值为 …… (　　)

A. $m=1,n=-2$　　B. $m=1,n=2$　　C. $m=-1,n=-2$　　D. $m=-1,n=2$

2.填空题

(1)一长方形的面积为 20 平方厘米,设它的长为 x 厘米,则它的宽 y 与 x 的函数关系式为______,x 的取值范围是______.

(2)函数 $y=\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$中自变量 x 的取值范围是______;

(3)某校办工厂现年产值是 15 万元,如果每增加 100 元投资一年可增加 250 元产值,那么总产值 y(万元)与新增加的投资额 x(万元)之间的函数关系式为______.

3. 梯形 $ABCD$ 中,中位线 $EF=4$,求梯形上底 x 与下底 y 的函数关系式,并求 x 的取值范围.

4.计程车的收费标准是:不超过 9 公里收 12.6 元,每超过 1 公里加 1.6 元(不满 1 公里的部分按 1 公里计价).x 表示行程的公里数,y 表示应收服务费(元),用 x 表示 y.

5.(1)若当 $x=4$ 时,函数 $y=4x+2k$ 和 $y=kx-8$ 的值相等,求 k 的值;

(2)若 x、y 均为实数,且 $y=\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}+4}{x+2}$,求 $x+y$ 的值;

(3)已知函数 $y=\frac{\sqrt{x-5}}{x^2-25}$,求:①自变量 x 的取值范围;②当 $x=6$ 时的函数值.

6.用解析法表示下列函数(要注明自变量的取值范围):

(1)正方形边长为 x,面积为 S;把 S 表示为 x 的函数,把 x 表示为 S 的函数.

(2)梯形的上底为 2,下底为 h,把梯形面积 S 表示为梯形高 h 的函数.

(3)梯形下底为 b,高为 $h(h>0)$,把梯形面积 S 表示为梯形上底 x 的函数.

7.已知函数 $y=2x^2-x+1$.

(1)当 $x=\frac{1}{4}$时,求 y 的值;(2)当 $y=1$ 时,求 x 的值;(3)这个函数的值能为 0 吗?为什么?

8.某水池蓄水 400 m^3,每小时向外供水 4 m^3,求水池中剩余水 $y(\text{m}^3)$与供水时间 x(小时)之间的函数关系式.

9.等腰三角形顶角的度数为 x,底角的度数为 y,试写出 y 与 x 的函数关系式,并注明 x 的取值范围.

10. $\triangle ABC$ 的周长为 12 cm，一边 AB 的长为 4 cm，设另一条边长为 x cm，且这条边上的高为第三条边的$\frac{\sqrt{3}}{2}$倍，求此三角形的面积 S cm² 与边长 x cm 之间的函数式，并写出 x 的取值范围．

11. 某工厂加工一批产品，为了提前交货，规定每个工人完成 100 个以内，每个产品付酬 1.5 元；超过 100 个，超过部分每个产品付酬增加 0.3 元；超过 200 个，超过部分除按上述规定外，每个产品再增加 0.4 元．求一个工人：

(1)完成 100 个以内所得报酬 y(元)与产品数 x(个)之间的函数关系式；

(2)完成 100 个以上，但不超过 200 个所得报酬 y(元)与产品数 x(个)之间的函数关系式；

(3)完成 200 个以上所得报酬 y(元)与产品数 x(个)之间的函数关系式．

12. 弹簧秤的弹簧原长 10 cm，它能提起的重物不超过 14 千克，并能每提起一千克的重物弹簧就伸长$\frac{1}{2}$ cm；用解析式表示弹簧挂重物后的长度 y 和重量 x 之间的函数关系，并画出函数图象．

〖读一读〗

函数小史

数学史表明，重要的数学概念的产生和发展，对数学的发展起着不可估量的作用．有些重要的数学概念对数学分支的产生起着奠定性的作用．我们刚学过的函数就是这样的重要概念．

在笛卡尔引入变量以后，变量和函数等概念日益渗透到科学技术的各个领域．纵观宇宙，运算天体，探索热的传导，揭示电磁秘密，这些都和函数概念息息相关，正是在这些实践过程中，人们对函数的概念不断深化．

回顾一下函数概念的发展史，对于刚接触到函数的初中同学来说，虽然不可能较深的理解，但无疑对加深理解课堂知识、激发学习兴趣将是有益的．

最早提出函数(*function*)概念的，是 17 世纪德国数学家莱布尼茨．最初莱布尼茨用“函数”一词表示幂，如 x, x^2, x^3 都是函数．此后，他又用函数表示在直角坐标系中曲线上一点的横坐标、纵坐标．

1781 年，莱布尼茨的学生、瑞士数学家贝努利把函数定义为：“由某个变量及任意的一个常数结合而成的数量．”意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫做 x 的函数．贝努利所强调的函数要用公式来表示．

后来数学家觉得不应该把函数概念局限在只能用公式来表达上．只要一些变量变化，另一些变量能随之而变化就可以，至于这两个变量的关系是否要用公式来表示，就不作为判断函数的标准．

1755 年，瑞士数学家欧拉把函数定义为：“如果某些变量，以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面的这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数．”在欧拉的定义中，就不强调函数要用公式表示了．由于函数不一定要用公式来表示，欧拉曾把画在坐标系的曲线也叫函数，他认为：“函数是随意画出的一条曲线”．

当时有些数学家对于不用公式来表示函数感到很不习惯，有的数学家甚至抱怀疑态度．他们把能用公式表示的函数叫“真函数”，把不能用公式表示的函数叫“假函数”．

1821 年，法国数学家柯西给出了类似现在中学课本的函数定义：“在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随着而确定时，则将最初的变数叫自变量，其他各变数叫做函数．”在柯西的定义中，首先出现了自变量一词．

1834 年，俄国数学家罗巴契夫斯基进一步提出函数的定义：“x 的函数是这样一个数，它对于每一个 x 都有确定的值，并且随着 x 一起变化，函数值可以由解析式给出，也可以由一个条件给出，这个条件提供了一

种寻求全部对应值的方法．函数的这种依赖关系可以存在，但仍然是未知的．”这个定义指出了对应关系(条件)的必要性，利用这个关系，可以求出每一个 x 的对应值．

1837 年，德国数学家狄里克雷认为怎样去建立 x 与 y 之间的对应关系是无关紧要的，所以他的定义是："如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数．”这个定义抓住了概念的本质属性，变量 y 称为 x 的函数，只须存在一个法则，使得这个函数取值范围中的每一个值，有一个确定的 y 值和它对应就行了，不管这个法则是公式、图象、表格或其他形式．这个定义比前面的定义带有普遍性，为理论研究和实际应用提供了方便．因此，这个定义曾被长期的使用着．

自从德国数学家康托尔的集合被大家接受后，用集合对应关系来定义函数概念就是现在高中课本里用的．

中文数学书上使用的“函数”一词是转译词，是我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》(1895 年)一书时，把“*function*”译成“函数”的．

中国古代“函”字与“含”字通用，都有着“包含”的意思．李善兰给出的定义是：“凡式中含天，为天之函数．”中国古代用天、地、人、物 4 个字来表示 4 个不同的未知数或变量．这个定义的含义是：“凡是公式中含有自变量 x，则该式子叫做 x 的函数．”所以“函数”是指公式里含有变量的意思．

我们可以预计，关于函数的争论、研究、发展、拓广将不会完结，也正是这些影响着数学及其相邻学科的发展．

§ 13.3　函数的图象

〖学习目标〗

1. 能画出简单函数的图象．
2. 知道还可以用列表或图象的方法表示函数．
3. 能较熟练地看图、识图，并能进一步认识数形结合的思想方法．

〖知识要点〗

1. 列表法　通过列表给出 y 与 x 的对应值，用来表示 y 与 x 的函数关系，这种表示函数的方法叫做列表法.
2. 图象法　一般地，对于一个函数，如果把自变量 x 与函数 y 的每对对应值分别作为点的横坐标与纵坐标，在坐标平面内描出相应的点，这些点所组成的图形，就是这个函数的图象. 这种表示函数的方法叫做图象法.
3. 用图象法表示函数，即在直角坐标系中画出函数的图象，一般按下列步骤进行：
   (1)列表：在自变量的取值范围内，列表给出自变量与函数的一些对应值；
   (2)描点：以表中对应值为坐标(自变量为横坐标，函数值为纵坐标)，在坐标平面内描出相应的点；
   (3)连线：按照自变量由小到大的顺序，把所描各点用平滑的曲线连结起来.

〖学习指导〗

1. 对于函数的三种常用表示法，应该认识到：
   (1)给出一种函数关系，根据需要，有时可以写出它的解析表达式，有时可以列出函数与其自变量的对应数值表，有时可以画出它的图象；反过来，也可以用一个解析式，或一个反映两个变量对应关系的数值表，

或一个图象,来表示一个函数关系.

(2)三种函数表示法的优缺点:

解析法便于了解两个变量之间的相依关系,书写方便,便于研究;但需要两变量之间的对应值时,有时计算较复杂,同时它的变化趋势不易看出.

列表法对于自变量和函数的对应值一目了然,但不易发现两变量之间的相依关系.在实际中不少售货员为计价方便,常制作表示售价与数量关系的表.

图象法直观、形象,便于观察函数中两个变量的变化趋势.如实际中表示一天气温变化的图.缺点:由图中观察得到的两个变量的对应值一般都是近似值.

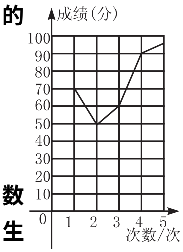

图 13—5

[例1]图 13—5 是某学生五次测验的成绩,根据图回答:

(1)这个学生第一次测验是多少?(2)哪次测验成绩比上次退步?

(3)五次测验中最高是几分?最低是几分?

分析:用图表列出测验次数与成绩的关系清楚明了.要想了解某次测验成绩,只需在次数栏中找出相应次数,然后根据图在成绩栏中找到对应的分数.从图中还清楚看到这个学生成绩变化的趋势:从第一次测验到第二次测验,图形向下,表示学习退步;第二次测验以后图形向上,表示学习进步.

解:(1)这个学生第一次测验是 70 分;(2)第二次测验比第一次退步;

(3)五次测验中最高约是 95 分,最低为 50 分.

说明:从图象中还可知道,这个学生的成绩是在进步.

[例2](1)如果点$(-2,3)$在函数 $y=\frac{1}{2}x+2m$ 的图象上,则 $m=$______;

(2)若点$(a,2)$在函数 $y=2x^2-3x$ 的图象上,则 $a=$______.

分析:点在函数的图象上,意味着点的坐标满足这个图象的解析式,也就是说,用点的横坐标代替自变量 x,用纵坐标代替函数 y 等式成立,通过解方程可求得.

解:(1)由题意,得$\frac{1}{2}\times(-2)+2m=3$　解得 $m=2$;

(2)由题意,得 $2a^2-3a=2$,即 $2a^2-3a-2=0$,解得 $a=2$ 或$-\frac{1}{2}$.

说明:(1)若图象上一点的坐标已知,则可求解析式中字母(只含一个)的值.(2)若函数的解析式已知,图象上点的坐标只知其一,则可求出另一个.

2. 理解函数图象的意义,必须注意到:

(1)列表前要考虑自变量的取值范围,因为所取自变量的值一定在此范围内.

(2)是把自变量 x 与函数 y 的每对对应值分别作为点的横坐标与纵坐标.

(3)一般地,画函数图象所描点越多图象越精确,但一方面取点要合理,要注意点与点之间的变化趋势,另一方面特殊点(如与坐标轴的交点等)在自变量的取值范围内,各部均要有所考虑.

(4)往往画出来的图象只是函数图象的一个局部.

(5)观察所画函数图象的形状,看能通过观察图象知道什么.

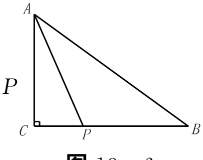

图 13—6

[例3]如图 13—6 所示,在 $Rt\triangle ABC$ 中,$C=90°$,$AC=6$,$BC=8$,设点 P 为 BC 边上一点,P 点不与点 B、C 重合.且 $CP=x$,若 $y=S_{\triangle APB}$.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)画出所求函数的图象.

解:(1)$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$,$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times 6x=3x$,

$\therefore S_{\triangle APB}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle APC}=24-3x$.

y 与 x 的函数解析式为 $y=24-3x$.

又 x 最大不能超过 8,最小不能为 0,$\therefore 0<x<8$.

(2)列表:

x	(8)	6	4	2	(0)
y	(0)	6	12	18	(24)

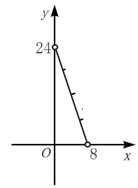

图 13—7

描点:描出(6,6),(4,12),(2,18)各点.

连线:连出所求线段的图象(如图 13—7)

说明:(1)求出函数的解析式后,必须根据题意讨论 x 的取值范围.

(2)注意(8,0)、(0,24)两点要用虚点.

[例4]某校广场有一段 30 米长的旧围栏(图中用线段 EF 表示),现打算利用该围栏的一部分(或全部)为一边,围建一块面积为 225 平方米的长方形草坪(如图 13—8 所示,$AB<AD$),已知整修旧围栏的价格为每米 2 元,建新围栏的价格是每米 5 元.设利用的围栏 AD 的长度为 x 米,修建草坪围栏所需的总费用为 y 元.

(1)求出 y 与 x 之间的函数关系式;并写出自变量 x 的取值范围;

(2)若计划修建费为 265 元,则应利用旧围栏多少米?

(3)若计划修建费只有 250 元,能否完成该草坪的围栏修建任务,请说明理由.

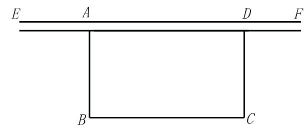

图 13—8

解:(1)$y=2x+5x+5\times 2\times\frac{225}{x}=7x+\frac{2250}{x}$.($15<x<30$).

(2)由 $265=7x+\frac{2250}{x}$,整理,得 $7x^2-265x+2250=0$,

解之,得 $x=25$.($x=\frac{90}{7}$不合题意,舍去)

$\therefore$应利用旧围栏 25 米.

(3)假设修费用 250 元能完成围栏修建任务,则

$250=7x+\frac{2250}{x}$,整理,得 $7x^2-250x+2250=0$.

$\because \Delta=(-250)^2-4\times 7\times 2250=-500<0$.

$\therefore$该方程没有实数根.

故 250 元的修建费用不能完成该草坪的围栏修建任务.

说明:利用 250 元的修建费,能否完成该草坪的围栏修建任务,实际上就是,当函数值为 250 时,有无对应的自变量 x 的值,在这里是通过解方程 $250=7x+\frac{2250}{x}$来完成的,因为该方程没有实数解,所以也就不能完成草坪围栏的修建任务.

〖效果评估〗

1. 选择题

(1)点 $M(0,1)$,$N(2,3)$,$P(-\sqrt{2},2\sqrt{2}+1)$,$Q(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$,在函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象上的点是 …( )

A. M 点　　B. N 点　　C. P 点　　D. Q 点

(2)在函数 $y=\frac{1}{x+1}$ 的图象上的点是…………（　　）

A. (0,1)　　B. (−2,2)　　C. (−1,1)　　D. $(-\frac{1}{2},-1)$

(3)函数 $y=3-x$ 与 $y=\frac{2}{x}$ 的图象的交点坐标是…………（　　）

A. (1,2),(2,1)　　B. (−1,−2),(−2,−1)

C. (−1,2),(−2,1)　　D. 以上都不正确

(4)已知点 $P(9,m)$ 在函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象上，则 m 的值为…………（　　）

A. ±3　　B. 3　　C. −3　　D. 81

(5)若一个函数的图象都在第一、二象限内，那么这个函数的值…………（　　）

A. 都是正数　　B. 都是负数　　C. 都是非负数　　D. 任意实数

2. 填空题

(1)已知 $y=kx+b$，当 $x=1$ 时，$y=1$；当 $x=-1$ 时，$y=0$，则 $k=$______，$b=$______；

(2)由函数解析式画函数图象的一般步骤是__________．

3. 某月友谊商店营业额的记录表如下：

日期(日)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
营业额(万元)	4	2.5	3	2.5	4	5.5	6	5	3	3.5

根据上表画出反映这个月营业额变化情况的曲线，并估计 20 号的营业额．

4. 画出函数 $y=-\frac{2}{3}x+1$ 的图象(先填下表再描点画图)：

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y									

5. 画函数 $y=3x$ 的图象，并判断下列各点是否在函数 $y=3x$ 的图象上．

$A(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，$B(-1,-3)$，$C(-1,3)$，$D(2,-6)$，$E(0,\frac{5}{3})$，$F(3,0)$，$G(0,0)$，$H(-a,-3a)$．

6. 已知函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$．

(1)写出自变量 x 的取值范围；

(2)对下表的 x 值，求出对应的函数值 y(精确到 0.1)；

x	0.5	1	2	3	4	5
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$						

(3)根据上表，作出函数的图象，图象会不会与 x 轴相交，为什么？

(4)根据图象，求当 $x=\frac{2}{3}$ 时 y 的值，当 $y=2$ 时 x 的值；

(5)根据图象，当 x 增大时，y 的值是增大还是减小？

7. 根据下表，用描点法画出函数 $y=x^2-4x$ 的图象，并根据图象回答下列问题：