前　言

QIAN　YAN

为推进素质教育，减轻初中生的课业负担，注重能力培养，体现新世纪教材、教学改革的要求，实现由应试教育向素质教育的转轨，我们特组织了一批知名初中优秀教师和教研员，以人教社九年义务教育2003年春季统编新版教材为依据，编写了这套《初中同步测控优化设计》系列丛书。在编写过程中，我们力求使抽象内容形象化、复杂内容简明化、呆板知识趣味化、能力训练系统化，努力使其成为教师指导下的学生同步自学辅导书中的精品。

本丛书具有以下特点：

1.依据教学大纲　强化同步性

该丛书根据九年义务教育教学大纲的要求，紧紧围绕最新《课程标准》和2002年版新教材。初一、初二、初三各年级按学期分上、下册编写。本丛书编写过程中，吸纳了全国各地近年来初中教育教学研究的最新成果，渗透了学科间交叉综合的思想。每本书单元、章、节、目、点层次清晰，并且配有期中、期末试题，完全与初中教学进程一致。

2.课内课外结合　突出可读性

本丛书的编写，以符合初中生年龄特点和心理特征为前提，避免了僵硬的知识灌输，尽量使课内外知识形成有机的结合。采取网络化、情节化、操作化等多种活泼的形式，用准确、生动、有趣、流畅的语言加以表述，融知识性和趣味性于一体，以增强其可读性。

3.遵循教学规律　注重实用性

本书在内容编排上遵循了由易到难、由浅入深、循序渐进、通俗易懂的原则，营造了一个讲授、自学、练习一体化的学习平台，既适合于教师指导下的课堂学习使用，又适合于学生的课后自学使用。书中对许多栏目设置了学案形式，或填空式、或图表式、或问答式，新颖独到，方便训练。单元自测题按100分45分钟合理安排，易于操作。

4.突出素质教育　体现创新性

本书的编写在内容选材和试题设计上力求典型新颖，大量增加了研究性课题、开放性问

题和贴近社会生产、生活实际问题的内容,以激活学生的共同参与意识,培养学生的创造性和发散思维。还创设了象[知识拓展][知识小品]和[你也会做]等灵活性栏目,有的适于动手操作,有的适于集体表演,它将对初中生综合素质的提高起到良好的启示作用。

本套丛书的编写,汇集了众多知名教师的辛勤劳动,集中展示了现代教育的科研成果,希望对广大初中学生的学习有所裨益。

由于编者水平有限,加之时间仓促,偏颇之处在所难免,恳望读者提出宝贵意见,以利于再版时修订。

编　者

2002 年 12 月

目录
MU LU

目 录
MU LU

代数部分

第十章 数的开方

§10.1 平方根

〖学习目标〗

1. 能说出平方根、算术平方根的意义和性质,能规范地表示一个数的平方根和算术平方根.
2. 能说出平方与开平方的关系.
3. 能熟练地求一个简单数的平方根、算术平方根.

〖知识要点〗

1. 平方根　如果一个数的平方等于 a,这个数就叫做的 a 的平方根(或二次方根). 就是说,如果 $x^2=a$,那么 x 就叫做 a 的平方根.
2. 平方根的性质　一个正数有两个平方根,它们互为相反数;0 有一个平方根,它就是 0 本身;负数没有平方根.
3. 平方与开平方的关系　平方与开平方互为逆运算.
4. 算术平方根　正数 a 的正的平方根,叫做 a 的算术平方根,记作$\sqrt{a}$,0 的算术平方根是 0,记作$\sqrt{0}$.
5. 算术平方根的性质　非负数的算术平方根是非负数,即当 $a\geqslant 0$ 时,$\sqrt{a}\geqslant 0$.

〖学习指导〗

1. 理解平方根的意义,必须注意

(1)平方根的意义,既可以判定一个数是否为另一个数的平方根,也同时给出了求某些数的平方根的推理方法.

(2)在求一个正数的平方根时,不要忽略负的平方根,在开平方运算时,还应特别注意负数没有平方根. 请看下例.

[例1]下列各数是否有平方根?说明理由,并对有平方根的,说明其个数.

(1)$(-4)^2$　(2)-8　(3)0　(4)$(-x)^2$

解:(1)$\because (-4)^2=16$,$\therefore (-4)^2$ 有平方根,平方根有两个 .

(2)$\because -8<0$,$\therefore -8$ 没有平方根,因为所有的负数都没有平方根.

(3)0 有平方根,且只有一个.

(4)当 $x=0$ 时,$-x^2=0$,此时它有一个平方根;当 $x\neq 0$ 时,$-x^2<0$ 时,此时,它没有平方根 .

说明:本题考查对一个数是否有平方根的判定,解题关键是确定这个数的性质符号.

[例2]检验下列各题中,前面的数是否为后面的数的平方根.

(1)-2,4 (2)±3,9 (3)10^{-2},10^{-4}

解:(1)$\because(-2)^2=4$,$\therefore-2$是4的平方根.

(2)$\because(\pm3)^2=9$,$\therefore\pm3$是9的平方根.

(3)$\because(10^{-2})^2=10^{-4}$,$\therefore10^{-2}$是$10^{-4}$的平方根.

[例3]求下列各数的平方根

(1)$\frac{16}{49}$ (2)$1\frac{11}{25}$ (3)0.04 (4)10^{-6} (5)$(-\frac{1}{2})^2$ (6)0

解:(1)$\because(\pm\frac{4}{7})^2=\frac{16}{49}$,$\therefore\frac{16}{49}$的平方根是$\pm\frac{4}{7}$,即$\pm\sqrt{\frac{16}{49}}=\pm\frac{4}{7}$.

(2)$\because1\frac{11}{25}=\frac{36}{25}$,$(\pm\frac{6}{5})^2=\frac{36}{25}$,$\therefore1\frac{11}{25}$的平方根是$\pm\frac{6}{5}$,即$\pm\sqrt{1\frac{11}{25}}=\pm\frac{6}{5}$.

(3)$\because(\pm0.2)^2=0.04$,$\therefore0.04$的平方根是±0.2,即$\pm\sqrt{0.04}=\pm0.2$.

(4)$\because(\pm10^{-3})^2=10^{-6}$,$\therefore10^{-6}$的平方根是$\pm10^{-3}$,即$\pm\sqrt{10^{-6}}=\pm10^{-3}$.

(5)$\because(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,$(\pm\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,$\therefore(-\frac{1}{2})^2$的平方根是$\pm\frac{1}{2}$,即$\pm\sqrt{(-\frac{1}{2})^2}=\pm\frac{1}{2}$.

(6)0的平方根是0,即$\pm\sqrt{0}=0$.

说明:(1)由于一个正数的平方根有两个,所以,在表示一个数的平方根时,不要出现概念性的错误.如(1)小题中$\frac{16}{49}$的平方根是$\pm\sqrt{\frac{16}{49}}$,而$\sqrt{\frac{16}{49}}$只是其中的一个.

(2)第(5)小题中$(-\frac{1}{2})^2$不是一个负数,它是一个正数$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{4}$的平方根有两个,是$\pm\frac{1}{2}$.

(3)在求0的平方根时,可直接根据平方根的性质写出.

2. 平方根与算术平方根的区别与联系

区别在于:一个正数的平方根有两个,而它的算术平方根只有一个.

联系在于:正数的负的平方根与它的算术平方根互为相反数,0的平方根也就是它的算术平方根,负数既没有平方根,也没有算术平方根.因此,要根据一个数的算术平方根立即写出它的平方根,从而可使我们根据数值惟一确定的算术平方根来研究平方根.

在表示上,用$\pm\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示a的平方根.即当$a>0$时,$\pm\sqrt{a}$表示a的两个互为相反数的平方根;当$a=0$时,$\pm\sqrt{a}=0$.而$\sqrt{a}(a\geqslant0)$表示a的算术平方根,是一个正数或零.下面举例说明.

[例4]求下列各数的算术平方根和平方根

(1)121 (2)0.0009 (3)$\frac{169}{225}$ (4)$(-5)^2$ (5)$(3-\pi)^2$ (6)$(-6)^{-2}$

分析:根据平方根与算术平方根的联系,在求一个数的平方根时,可通过求它的算术平方根来求,这是因为正数正的平方根就是它的算术平方根,而正数负的平方根就是它的算术平方根的相反数.

解:(1)$\because11^2=121$,$\therefore121$的算术平方根是11,即$\sqrt{121}=11$.121的平方根是±11,即$\pm\sqrt{121}=\pm11$.

(2)$\because0.03^2=0.0009$,$\therefore0.0009$的算术平方根是0.03,即$\sqrt{0.0009}=0.03$.

0.0009的平方根是±0.03,即$\pm\sqrt{0.0009}=\pm0.03$.

(3)$\because(\frac{13}{15})^2=\frac{169}{225}$,$\therefore\frac{169}{225}$的算术平方根是$\frac{13}{15}$,即$\sqrt{\frac{169}{225}}=\frac{13}{15}$.

$\frac{169}{225}$的平方根是$\pm\frac{13}{15}$,即$\pm\sqrt{\frac{169}{225}}=\pm\frac{13}{15}$.

(4)$\because(-5)^2=25$,而$5^2=25$,$\therefore(-5)^2$的算术平方根是5,即$\sqrt{(-5)^2}=5$.

$(-5)^2$的平方根是±5,$\pm\sqrt{(-5)^2}=\pm5$.

(5)$\because\pi-3>0$,$(\pi-3)^2=(3-\pi)^2$,$\therefore(3-\pi)^2$的算术平方根是$\pi-3$,即$\sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3$.

$(3-\pi)^2$的平方根是$\pm(\pi-3)$,即$\pm\sqrt{(3-\pi)^2}=\pm(\pi-3)$.

(6)$\because(-6)^{-2}=\frac{1}{(-6)^2}=\frac{1}{36}$,且$(\frac{1}{6})^2=\frac{1}{36}$,$\therefore(-6)^{-2}$的算术平方根是$\frac{1}{6}$,即$\sqrt{(-6)^{-2}}=\frac{1}{6}$.

$(-6)^{-2}$的平方根是$\pm\frac{1}{6}$,即$\pm\sqrt{(-6)^{-2}}=\pm\frac{1}{6}$.

说明:本题考查非负数的算术平方根与平方根的求法,解题关键是弄清平方根、算术平方根的区别与联系.

[例5]求下列各式的值

(1)$\sqrt{1.21}$　(2)$-\sqrt{16}$　(3)$\pm\sqrt{\frac{49}{81}}$　(4)$\sqrt{(-25)^2}$　(5)$\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}$

分析:求$\sqrt{1.21}$,就是求1.21的算术平方根;求$-\sqrt{16}$,就是求16的算术平方根的相反数;求$\pm\sqrt{\frac{49}{81}}$,就是求$\frac{49}{81}$的平方根;因为$(-25)^2=25^2$,故求$\sqrt{(-25)^2}$就是求25^2的算术平方根,求$\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}$,就是求0.81与0.04的算术平方根的差.

解:(1)$\because1.1^2=1.21$,$\therefore\sqrt{1.21}=1.1$.　(2)$\because4^2=16$,$\therefore-\sqrt{16}=-4$.

(3)$\because(\frac{7}{9})^2=\frac{49}{81}$,$\therefore\pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.　(4)$\because(-25)^2=25^2$,$\therefore\sqrt{(-25)^2}=25$.

(5)$\because\sqrt{0.81}=0.9$,$\sqrt{0.04}=0.2$,$\therefore\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}=0.9-0.2=0.7$.

说明:注意$\sqrt{a}$,$-\sqrt{a}$,$\pm\sqrt{a}(a\geqslant0)$三者的区别;$\sqrt{a}$表示a的算术平方根,$-\sqrt{a}$表示a的算术平方根的相反数,$\pm\sqrt{a}$表示a的平方根.

[例6]求下列各式中的x

(1)$x^2-225=0$　(2)$121x^2-25=0$

解:(1)$x^2=225$,$\because(\pm15)^2=225$,$\therefore x=\pm15$.

(2)$121x^2=25$,$x^2=\frac{25}{121}$,$\because(\pm\frac{5}{11})^2=\frac{25}{121}$,$\therefore x=\pm\frac{5}{11}$.

〖效果评估〗

1.判断题

(1)$\sqrt{64}=\pm8$.……………………………………………………(　　)

(2)a的平方根可以写成$\pm a$.……………………………………(　　)

(3)7是$(-7)^2$的算术平方根.……………………………………(　　)

(4)只有正数才有平方根.……( )

(5) $\sqrt{16}$的算术平方根是 4.……( )

(6)0 的平方根就是 0 的算术平方根.……( )

(7)$(-a)^2$ 的平方根是$\pm a$.……( )

(8)一个数的算术平方根一定是正数.……( )

(9)$\sqrt{3}$是 3 的算术平方根.……( )

(10)正数 a 的平方根一定比 a 小.……( )

(11)一个正数的平方根的平方就是这个数.……( )

(12)一个正数的平方的平方根就是这个数.……( )

2. 选择题

(1)下列说法正确的是……( )

A. 9 的平方根是 3　　B. 9 的平方根是-3

C. $\because 3^2=9$, $\therefore 3$ 是 9 的平方根　　D. $\sqrt{9}=\pm 3$

(2)下列各式中错误的是……( )

A. $\pm\sqrt{0.36}=\pm 0.6$　　B. $\sqrt{0.36}=0.6$　　C. $-\sqrt{1.44}=-1.2$　　D. $\sqrt{1.44}=\pm 1.2$

(3)下列各数中没有平方根的是……( )

A. $(-3)^2$　　B. 0　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-(-2)^2$

(4)下列说法中正确的是……( )

A. -1 的平方根是-1

B. 如果一个数有平方根,那么这个数的平方根一定有两个

C. 任何一个非负数的平方根都是非负数

D. 2 是 4 的平方根

(5)下列各式中,正确的是……( )

A. $(\pm\frac{1}{4})^2=\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2\frac{1}{4}}=1\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{4+\frac{9}{16}}=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$　　D. $\sqrt{13^2-7^2}=13-7=5$

(6) $\sqrt{(-36)^2}$的平方根是……( )

A. -36　　B. 36　　C. ± 6　　D. ± 36

(7)如果 x 是 y 的一个平方根,则 y 的算术平方根是……( )

A. x　　B. $-x$　　C. $\pm x$　　D. $|x|$

(8)一个自然数的算术平方根是 a,则下一个自然数的算术平方根是……( )

A. $\sqrt{a^2+1}$　　B. $\sqrt{a}+1$　　C. $a+1$　　D. $\sqrt{a+1}$

3. 填空题

(1)0.16 的平方是________,0.16 的平方根是________.

(2)若 13 是 m 的一个平方根,则 m 的另一个平方根是________.

(3)9 的算术平方根是________, $\sqrt{81}$的平方根是________.

(4)$(-4)^3$ 的相反数的倒数的平方根是________．

(5)________的算术平方根等于它的平方根．

(6)下列各数：$-2,(-3)^2,|-0.5|,\frac{2}{3},0,-(-1\frac{1}{4})$，其中有平方根的数有________个．

(7)$3x-4$ 的算术平方根是 0，则 $x=$________．

(8)若 $5x+4$ 的平方根是 ±1，则 $x=$________．

4. 求下列各数的平方根和算术平方根

(1)169　(2)0.0256　(3)$2\frac{14}{25}$　(4)10^{-2}　(5)$|-2\frac{7}{9}|$　(6)17^2-8^2

5. 求下列各式的值

(1)$\sqrt{0.25}$　(2)$\sqrt{(-7)^2}$　(3)$\pm\sqrt{0.0625}$　(4)$-\sqrt{1\frac{15}{49}}$　(5)$\sqrt{1\frac{9}{16}-\frac{9}{16}}$　(6)$\frac{1}{3}\sqrt{0.25}+\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{7}{9}}$

6. 求下列各式中的 x

(1)$x^2=361$　(2)$81x^2-49=0$　(3)$49(x^2+1)=50$　(4)$(3x-1)^2=(-5)^2$

7. 求下列各式的值

(1)$\sqrt{(-12)^2+5^2}$　(2)$\sqrt{289}-\sqrt{441}$　(3)$\frac{1}{3}\sqrt{0.36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$　(4)$\sqrt{3.24}\cdot\sqrt{\frac{4}{81}}$

8. 求 $-\frac{1}{2}(a-1)^2$ 的算术平方根．

9. 在公式 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ 中，已知 $c=41,b=40$，求 a.

〖想一想〗

有没有平方根等于它本身的数？有没有算术平方根等于它本身的数？有没有算术平方根比它本身大的数？如果有，请分别说出它们各是哪些数．

△§10.2　用计算器求平方根

〖学习目标〗

1. 会用计算器进行数的开平方运算．
2. 会用计算器求一个数的平方根．

〖知识要点〗

求 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$ 的按键顺序 $\boxed{a}\rightarrow\boxed{2F}\rightarrow\boxed{\sqrt[x]{y}}\rightarrow2\rightarrow\boxed{=}$.

〖学习指导〗

计算器不仅可以进行简单的加、减、乘、除和乘方运算，还可以进行开平方运算，用它进行开平方运算时，程序较长，特别是在输入被开方数与根指数之间依次按第二功能键、方根运算键．其间的顺序容易弄混运用

时要特别注意,下面举例说明.

[例1]用计算器求 $\sqrt{12.34}$.

解:

按键	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$	$\boxed{2F}$	$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	$\boxed{2}$	$\boxed{=}$
显示	12.34	$2F$	12.34	2	3.51283361

$\therefore \sqrt{12.34}\approx 3.513$.

说明:(1)人教版代数第二册教材中提到的 $TRULY$ 信利牌 $SC118B$ 双行显示科学计算器有开平方功能键 $\boxed{\sqrt{\ }}$,上例用这种计算器计算较简捷,步骤如下:

按键	双行显示
$\boxed{\sqrt{\ }}$	$\sqrt{\ }$……
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$	$\sqrt{\ }$ 12.34……
$\boxed{=}$	$\sqrt{\ }12.34=3.51283361$

科学计算器的用法不尽相同,应用时应参考其使用说明.

(2)在遇到平方开不尽的情况下,如无特别说明,计算结果一律保留四个有效数字.

[例2]求下式中的 x

$4x^2=491$(结果保留两位小数).

分析:本例应先由计算器求出 x^2 的值,再对其开平方取值.

解:

按键	$\boxed{4}$ $\boxed{9}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$	$\boxed{=}$	$\boxed{2F}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$	$\boxed{2}$	$\boxed{=}$	$\boxed{2F}$ $\boxed{TAB}$ $\boxed{2}$
显示	4	122.75	122.75	2	11.0792599	11.08

$\therefore x\approx \pm 11.08$.

说明:用计算器求一个非负数的算术平方根关键在掌握正确的方法与步骤,如果求平方根时,则注意在写结论时,应添上“+”“-”号.

对于若干非负数的算术平方根的四则运算,亦可通过计算器求得结果. 如用计算器求 $\sqrt{64}+\sqrt{6.48}$的值,其步骤如下:

按键	显示
$\boxed{6}$ $\boxed{4}$	64
$\boxed{2F}$	$2F$
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	64
$\boxed{2}$	2
$\boxed{+}$	8
$\boxed{6}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$	6.48
$\boxed{2F}$	$2F$

$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	6.48
$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	10.54558441

∴ $\sqrt{64}+\sqrt{6.48}\approx10.55$.

〖效果评估〗

1. **选择题**

用计算器求$\sqrt{5}$的值的按键顺序是 …………………………………………………………………（　　）

A. $\boxed{5}\to\boxed{\sqrt[x]{y}}\to\boxed{=}$　　B. $\boxed{5}\to\boxed{2F}\to\boxed{\sqrt[x]{y}}\to\boxed{=}$

C. $\boxed{5}\to\boxed{\sqrt[x]{y}}\to\boxed{2}\to\boxed{=}$　　D. $\boxed{5}\to\boxed{2F}\to\boxed{\sqrt[x]{y}}\to\boxed{2}\to\boxed{=}$

2. **填空题**

(1)**用计算器求** $\sqrt{39.95}=$________，$\sqrt{3995}=$________，$\sqrt{0.3995}=$________，$\sqrt{0.003995}$________.

(2)**观察上题，试想：设任意一个非负数扩大（或缩小）到原来的** 100 **倍（或**$\frac{1}{100}$**），则它的平方根扩大（或缩小）到原数的**________**倍**.

请你根据发现的规律完成(3)～(5)**小题**.

(3)**已知** $\sqrt{0.007128}=0.08443$，**则** $\sqrt{712800}=$________.

(4)**已知** $\sqrt{375.8}=a$，**那么** $\sqrt{0.0003758}=$________，$\sqrt{37580}=$________.

(5)**已知** $\sqrt{10404}=102$，$-\sqrt{x}=-0.102$，**那么** $x=$________.

3. **用计算器求下列各式的值**

(1) $\sqrt{3.34}$　(2) $-\sqrt{47.5}$　(3) $\pm\sqrt{57.23}$　(4) $\pm\sqrt{2.4365}$　(5) $-\sqrt{8418}$　(6) $\pm\sqrt{545.4}$

(7) $-\sqrt{0.02845}$　(8) $\pm\sqrt{1124.9}$　(9) $\sqrt{362}+\sqrt{0.362}$　(10) $\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{25}{2}}$

4. **求下列各式中的** x

(1) $x^2=625$　(2) $4x^2=11$（**精确到** 0.01）　(3) $5x^2-2=0$（**保留** 3 **个有效数字**）　(4) $3x^2-32.52=0$

5. **一个长方体木箱，它的底是正方形，木箱高** 1.25 **米，体积是** 2.718 **立方米，求这个木箱边长（精确到** 0.01 **米）.**

6. **海平线用公式** $d=4.1\sqrt{h}$**决定，这里** d **的单位是千米，表示从海平线到观察者的距离；而** h **的单位是米，它是表示海平线以上到观察者的眼睛的高度，设** $h=10$ **米，试计算观察者和海平线之间的距离（精确到** 0.001 **千米）.**

7. **飞出地球，遨游太空，长期以来就是人类的一种理想，可是地球的吸引力毕竟太大了，飞机飞得再快也得回到地面，只有当物体速度达到一定值时，才能克服地球引力，围绕地球旋转，这个速度叫第一宇宙速度，计算公式是：**$V=\sqrt{gR}$**（千米/秒），其中** $g=0.0098$ **千米/秒**^{2}**，是重力加速度，**$R=6370$ **千米，是地球半径. 请你求出第一宇宙速度，看看有多大.**

〖读一读〗

根号的由来

现在,我们已经会用根号来表示平方根、立方根等,并感觉到使用起来既简便又方便,你知道根号是怎样产生而又演变成现在这样的吗?

古时候,埃及人用记号"$\ulcorner\ $"表示平方根,印度人在开平方时,在被开数的前面写 ka,阿拉伯人用 $\overset{=}{\overline{48}}$ 表示 $\sqrt{48}$. 1480 年以后,德国人用一个点"·"来表示平方根,两个点"··"表示 4 次方根,三个点表示立方根,比如,·3、··3、···3 就分别表示 3 的平方根、4 次方根、立方根,到十六世纪初,可能是书写快的缘故,小点上带了一条细长的尾巴,变成了"$\surd$". 1525 年,路多尔夫在他的代数著作中,首先采用了根号,比如他写 $\surd 4$ 是 2,$\surd 9$ 是 3,并用 $\surd\surd 8$、$\surd\surd\surd 8$ 表示 $\sqrt[4]{8}$,$\sqrt[3]{8}$. 但这种写法未得到普遍的认可与采纳.

与此同时,有人采用"根"字的拉丁文 $radix$ 中第一个字母的大写 R 来表示开方运算,并且后面跟着拉丁文"平方"一字的第一个字母 q,或"立方"的第一个字母 c 来表示开的是多少次方. 例如,现在的 $\sqrt{4352}$,当时有人写成 $R.q.4352$. 现在的 $\sqrt[3]{7+\sqrt{14}}$,用数学家邦别利(1526~1572 年)的符号可以写成:$R.c.$ └$7p.R.q.14$┘,其中"└ ┘"相当于今天的括号,p 相当于今天加号(那时候,连加减号"+""-"还没有通用).

直到十七世纪,法国数学家笛卡尔(1596~1650 年)第一个使用了现今用的根号"$\sqrt{\ }$". 在一本书中,笛卡尔写道:"如果我想求 a^2+b^2 的平方根,就写作 $\sqrt{a^2+b^2}$,如果想求 a^3+b^3+abb 的立方根,则写作 $\sqrt{c.a^3+b^3+abb}$".

这是出于什么考虑呢?有时候被开方数的项数较多,为了避免混淆,笛卡尔就用一条横线把 几项连起来,前面放上根号 $\surd$(不过,它比路多尔夫的根号多了一个小钩),就成为现在的根式形式.

现在的立方根符号出现得很晚,一直到十八世纪,才在一些书中看到符号 $\sqrt[3]{\ }$,$\sqrt[4]{\ }$,$\sqrt[5]{\ }$ 的使用,比如 25 的立方根用 $\sqrt[3]{25}$表示. 以后,诸如 $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ 等等形式的根号渐渐使用开来.

由此可见,一种符号的普遍采用是多么艰难,它是人们在悠久的岁月中,经过不断改良、选择和淘汰的结果,它是数学家们集体智慧的结晶.

△§10.3 立方根

〖学习目标〗

1. 能说出立方根的意义和性质.
2. 能说出立方与开立方的关系.
3. 能正确熟练地求一个数的立方根.

〖知识要点〗

1. 立方根　如果一个数的立方等于 a,那么这个数叫做 a 的立方根(或叫做三次方根). 换言之,如果 $x^3=a$,那么 x 叫做 a 的立方根,记作 $\sqrt[3]{a}$.

2. **立方与开立方的关系** 立方与开立方互为逆运算.

3. **立方根的性质** 正数有一个正的立方根;负数有一个负的立方根;0 的立方根仍旧是 0.

4. **负数的立方根的性质** $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}(a>0)$.

〖学习指导〗

1. 理解立方根的意义,可以从以下两个方面考虑.

(1)由定义知,一个数 b 是另一个数 a 的立方根,必须有等式 $b^3=a$ 成立,从而也给出了求一个数的立方根的方法.

(2)注意立方根与平方根的区别:对于立方根,被开方数 a 没有限制,换句话说,正数、负数、零都有惟一确定的立方根;而对于平方根,被开方数 a 必须是非负数,也就是说,负数没有平方根,并且任何正数的平方根有两个,它们互为相反数,理解了以上两个,我们就可以求一个数的立方根了.

[例1]求下列各数的立方根

(1)$-\frac{27}{64}$ (2)0.343 (3)$-\frac{125}{27}$ (4)0

解:(1)$\because(-\frac{3}{4})^3=-\frac{27}{64}$,$\therefore -\frac{27}{64}$的立方根是$-\frac{3}{4}$,即$\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=-\frac{3}{4}$.

(2)$\because 0.7^3=0.343$,$\therefore 0.343$ 的立方根是 0.7,即 $\sqrt[3]{0.343}=0.7$.

(3)$\because(-\frac{5}{3})^3=-\frac{125}{27}$,$\therefore -\frac{125}{27}$的立方根是$-\frac{5}{3}$,即$\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$.

(4)0 的立方根是 0,即$\sqrt[3]{0}=0$.

说明:(1)用根号表示立方根时,根指数“3”不能省略.

(2)如果所给数是带分数,先把它化为假分数,然后再求立方根.

2. 由负数的立方根的性质知,互为相反数的立方根也是互为相反数. 这样,就把求一个负数的立方根的问题转化为求它的相反数的立方根的相反数了. 例如,求式子$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$的值,求$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$,就是求$-\frac{64}{27}$的立方根的相反数,而$\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$,所以,$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{4}{3}$.

[例2]求下列各式的值

(1)$\sqrt[3]{-1}$ (2)$-\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$ (3)$\sqrt[3]{-\frac{343}{512}}$ (4)$\sqrt[3]{-2+\frac{3}{64}}$ (5)$\sqrt[3]{-4-\frac{12}{125}}$ (6)$\sqrt[3]{(-a)^3}$

解:(1)$\sqrt[3]{-1}=-\sqrt[3]{1}=-1$. (2)$-\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$.

(3)$\sqrt[3]{-\frac{343}{512}}=-\sqrt[3]{\frac{343}{512}}=-\frac{7}{8}$. (4)$\sqrt[3]{-2+\frac{3}{64}}=\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}=-\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=-\frac{5}{4}$.

(5)$\sqrt[3]{-4-\frac{12}{125}}=\sqrt[3]{-\frac{512}{125}}=-\sqrt[3]{\frac{512}{125}}=-\frac{8}{5}$. (6)$\sqrt[3]{(-a)^3}=-a$.

[例3]求下列各式中的 x

(1)$8x^3+27=0$ (2)$(2x-5)^3=-27$ (3)$8(x-1)^3=-\frac{125}{64}$

解:(1)∵$8x^3+27=0$,∴$8x^3=-27$,即 $x^3=-\frac{27}{8}$,∴$x=\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=-\frac{3}{2}$.

(2)∵$(2x-5)^3=-27$,∴$2x-5=\sqrt[3]{-27}$即 $2x-5=-3$,∴$x=1$.

(3)由已知,得$(x-1)^3=-\frac{125}{64\times 8}$,∴$x-1=\sqrt[3]{-\frac{125}{64\times 8}}$,

即 $x-1=-\sqrt[3]{\frac{5^3}{8^3}}$,∴$x-1=-\frac{5}{8}$,∴$x=\frac{3}{8}$.

说明:本题以方程形式出现,实质是求一个数的立方根,在(2)(3)中,分别把 $2x-5$,$x-1$ 当做一个整体,先分别求出 $2x-5$,$x-1$ 的值,再求 x 的值.

3. 由立方根的定义,若$\sqrt[3]{a}=x$,则 $x^3=a$,有时要注意灵活运用立方根的定义.例如:如果 $\sqrt[3]{5x+32}=-2$,求 $x+17$ 的平方根.此题应解为:∵ $\sqrt[3]{5x+32}=-2$,∴$5x+32=(-2)^3$.即 $5x+32=-8$. ∴$5x=-40$,$x=-8$. ∴$x+17=-8+17=9$. 故$\pm\sqrt{x+17}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

〖效果评估〗

1. 判断题

(1)若 $a^3=x$,则 x 叫做 a 的立方根. ……（ ）

(2)-8 的立方根是± 2. ……（ ）

(3)只有正数和零才有立方根. ……（ ）

(4)两个互为相反数的数的立方根也互为相反数. ……（ ）

(5)64 的平方根的立方根是 2. ……（ ）

(6)一个数的平方根和立方根都是它本身,这样的数是 0 或 1. ……（ ）

(7)若 a 与 b 的立方根相等,则一定有 $a=b$. ……（ ）

(8)不论 a 取何值时,$\sqrt[3]{a}$总有意义. ……（ ）

2. 选择题

(1)下列说法正确的是……（ ）

A. 一个数的立方根有四个,它们互为相反数

B. 一个数的立方根比平方根小

C. 一个不为零的数的立方根和这个数同号,零的立方根仍旧是零

D. 负数没有立方根

(2)若一个数的算术平方根与其立方根相同,则这个数是 ……（ ）

A. 1　　B. 0 或 1　　C. 0　　D. 非负数

(3)-125 开立方所得到的数是 ……（ ）

A. ± 5　　B. -5　　C. 5　　D. $\pm\sqrt{-125}$

(4)$-\sqrt{64}$的立方根是……（ ）

A. -4　　B. ± 4　　C. ± 2　　D. -2

(5)$-\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$,则 a 的值是 ……（ ）

A. $\frac{7}{8}$　　B. $-\frac{7}{8}$　　C. $\pm\frac{7}{8}$　　D. $-\frac{343}{521}$

(6)计算$\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}-\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$得……（　）

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 2

(7)下列运算中,不是总能进行的是……（　）

A. 平方　　B. 立方　　C. 开平方　　D. 平立方

(8)$(a-b)^3$ 的立方根是……（　）

A. $b-a$　　B. $a-b$　　C. $\pm(a-b)$　　D. $(a-b)^3$

3. 填空题

(1)若 $x^3=-729$,则 $x=$________.

(2)$(-2)^3$ 的立方根是________,-125 的立方根是________,0 的立方根是________.

(3) $\sqrt[3]{-125}$的倒数是________,相反数是________.

(4) $\sqrt[3]{-1}$的立方根是________,$\sqrt[3]{-8}$的立方根是________.

(5)已知$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-y}$,则 $x+y=$________.

(6)若 $x-4$ 是 16 的算术平方根,则 x 的立方根是________.

(7)若 $\sqrt[3]{-32x}$为整数,则最小正整数 x 的值等于________.

(8)64 的算术平方根的立方根是________.

4. 求下列各数的立方根

(1)-1　(2)-343　(3)$\frac{8}{343}$　(4)$-\frac{27}{216}$　(5)0.512　(6)$-\frac{125}{8}$　(7)$-3\frac{3}{8}$　(8)-8×10^{12}

5. 求下列各式的值

(1)$-\sqrt[3]{0.027}$　(2)$-\sqrt[3]{216}$　(3)$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$　(4)$-\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}$　(5)$\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}$　(6)$\sqrt[3]{-2+\frac{3}{64}}$

6. 计算下列各题

(1)$\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$　(2) $\sqrt[3]{27}-\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt{144}}\times\sqrt[3]{512}$

(3)$\sqrt[3]{-16+10\frac{21}{125}}+2\sqrt{0.16}$　(4)$-\sqrt[3]{(-12)^3}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}$

(5)$\sqrt[3]{1-\frac{124}{125}}-\sqrt[3]{0.027}-\sqrt[3]{0.064}$　(6) $\sqrt[3]{0.125}-\sqrt{3\frac{1}{16}}+|\sqrt[3]{(-\frac{1}{8})^2}|$

7. 求下列各式中的 x

(1)$27(x-1)^3+8=0$　(2) $\sqrt{81}+25x^3=-116$　(3)$(5x-0.1)^3=0.000343$

(4)$(x-0.5)^3+10^{-3}=0$　(5)$(10-0.1x)^3=-0.027$　(6)$(3x+2)^3-1=\frac{61}{64}$

(7)$343x^3-\sqrt[3]{-8}=-\sqrt{625}$　(8)$\frac{1}{9}(2x-3)^3=3\times2^3$

〖想一想〗

判断下列各式是否成立

(1)$\sqrt[3]{8}=2$　(2)$\sqrt[3]{64}=4=2^2$　(3)$\sqrt[2]{512}=8=2^3$……

判断完之后,如果成立,你能否用自然数 n 将上面式子的一般规律表示出来?

§10.4　用计算器求立方根

〖学习目标〗

1. 熟记用计算器进行一般开立方运算的程序.
2. 会用计算器进行数的开立方运算.

〖知识要点〗

用计算器求数的立方根$\sqrt[3]{a}(a\geqslant 0)$的步骤是:(1)输入被开方数 a;(2)按第二功能键$\boxed{2ndF}$;(3)再按方根运算键$\boxed{\sqrt[x]{y}}$;(4)输入根指数$\boxed{3}$;(5)按等于号键$\boxed{=}$.

〖学习指导〗

前面已经学习了用计算器求一个数的平方根,而求一个数的立方根在按键程序上与求平方根完全相同,只是输入的根指数不同.下面举例说明:

[例题]用计算器求 $\sqrt[3]{0.5678}$.

解:方法如下:

按键	显示
$\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$	0.5678
$\boxed{2F}$	$2F$
$\sqrt[x]{y}$	0.5678
$\boxed{3}$	3
$\boxed{=}$	0.828066336

$\therefore \sqrt[3]{0.5678}\approx 0.8281$.

说明:用计算器求一个正数的立方根,可以采用上面的程序,求一个负数的立方根,可以先求它的相反数的立方根,然后在所得结果前面加上负号,如 $\sqrt[3]{-10}=-\sqrt[3]{10}\approx -2.154$.

〖效果评估〗

1. 填空题

(1)填表:表 1:

a	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{3n}(n 是正整数)
$\sqrt[3]{a}$					

表 2：

a	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-3n}（n 是正整数）
$\sqrt[3]{a}$					

根据上表，你会发现被开方数的小数点与立方根的小数点之间的移动规律如何？将你发现的规律叙述出来.

____.

请根据你发现的规律完成(2)～(4)题.

(2)若 $\sqrt[3]{0.0678}=0.4078$，$a^3=67800$，$b^3=-0.0000678$，则 $a=$________，$b=$________.

(3)已知 $\sqrt[3]{0.00572}=0.1788$，$\sqrt[3]{a}=-17.88$，那么 $a=$________.

(4)已知 a 的立方根是 -45.6，那么立方根是 456 的数是________.

2. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.001）

(1)$\sqrt[3]{2}$　(2) $\sqrt[3]{68.8}$　(3)$-\sqrt[3]{522}$　(4) $\sqrt[3]{-753.8}$　(5)$-\sqrt[3]{-697420}$

(6)$-\sqrt[3]{0.08009}$　(7)$-\sqrt[3]{-\frac{65}{2}}$　(8)$\sqrt[3]{4-\frac{5}{8}}$

3. 用计算器求值（保留三个有效数字）

(1) $\sqrt[3]{-212}+\sqrt[3]{21.36}$　(2) $\sqrt[3]{657.36}+\sqrt[3]{-514.6}-\sqrt[3]{0.0056}$

4. 求下列各式中的 x

(1)$16x^3=9$（精确到 0.1）　(2)$4x^3-5=0$（精确到 0.1）

5. 已知一个正方体的体积是 71 cm^3，求它的棱长（结果保留两个有效数字）.

〖想一想〗

国家标准规定国民经济各部门产品尺寸必须最大限度地采用类似于 $\sqrt[5]{10^0}$，$\sqrt[5]{10^1}$，$\sqrt[5]{10^2}$，$\sqrt[5]{10^3}$，……的参数系列，这样的参数系列叫做优先数系.

(1)请写出上列数系中第 10 个数和第 15 个数；

(2)请写出上列数系中的第 n 个数.

§ 10.5　实数

〖学习目标〗

1. 能说出无理数和实数的意义，并会对实数进行分类.
2. 熟记实数相反数的意义，实数与数轴上点的对应关系.
3. 会比较两个实数的大小.
4. 会按结果所要求的精确度用近似的有限小数代替无理数进行实数的加、减、乘、除、乘方及开方运算.

〖知识要点〗

1. 无理数　小数位数是无限的，而且是不循环的小数，叫做无理数.
2. 实数及其分类