数学教育理论与实践探索丛书

初等数学建模

CHUDENG SHUXUE JIANMO

黄忠裕 / 编著

四川大学出版社

前　言

数学具有广泛的应用，数学建模是数学应用的必由之路．在教育方面，数学的作用仍然是非常突出的，正如谷超豪院士所说：“数学最大的应用是教育．”

由于数学建模回复了数学研究中诸如简化假设、收集数据、建立模型、求取答案、解释验证、拓广引申等过程，从而有利于学生思维能力及解决问题能力的提高，因此，数学建模特别能发挥它在培养与塑造人中的作用．

数学建模作为解决问题过程中重要的一部分，很好地回应了教育界所提出的“以问题为纽带的教学”这一教育新理念．尤其是当前的课程改革，“发展学生的数学应用意识”已被作为中学数学课程的基本理念之一．在高中阶段，数学建模是贯穿整个高中数学课程的重要内容，并渗透在每个模块或专题中．由此可见，学习数学建模顺应了数学教育改革的需要．

数学教育改革成败的关键在于教师，数学建模已成为中小学教师必备的知识和能力．为此，温州大学于 1998 年在开设数学模型这门专业必修课的基础上，为师范生专门开设了“初等数学建模”选修课，并先后多次在中学教师继续教育及高师本科函授中开设了这门课程，受到了学员的一致好评．

在课程开设过程中，我们不断收集合适的建模案例，本着一方面要处理好初等数学建模课程与高等数学建模课程的关系，另一方面又要解决好初等数学建模面向中学需要以及中学课程改革的要求这样两个目的，认为本课程以问题解决的形式出现比较好，即类似于有组织的问题集，但又不同于当前流行的中学应用

题集．这些建模问题，包括来自生活实际的、具有一定开放度的问题，具有应用背景的数学名题，重要的数学建模方法涉及的典型例子以及数学新理论中的一些比较初等的应用问题等．这些建模案例与建模方法，大多数是符合中学数学教学中开展数学建模的要求的，我们还为有些例题配备了背景材料及相关介绍，目的是增加本书的趣味性与可读性．

对于这些建模案例，我们按两条主线展开，一部分按中学知识板块来组织教材内容，主要有方程模型、函数模型、不等式模型、数列模型、几何模型、简单的线性规划模型、计数与初等概率模型等；另一部分按数学建模的常见方法编成两章，其中一章是图论模型，另一章包括数据拟合法、近似计算法、优选法、统筹法、聚类分析法、模糊评判法及层次分析法等数学建模方法．在每一章中，除了列举一些典型的建模案例外，还配备了一些思考与练习题，供读者选用；书后附有这些问题的提示与参考答案．

为便于中学数学教学，我们对书中的大多数建模案例进行了"教学法"加工，以促使其"数学的学术形态向教育形态的转化"(张奠宙语)．在本书编写中，我们既突出了数学模型是如何建立的，又特别注重模型求解中数学思想与方法的巧妙运用，还把问题从不同角度拓广．这样，不但能以开放的眼光对每个案例加以审视，而且始终能把握住问题解决中发现、探索与实践这一主旋律．

本书的内容在中学数学教师培训中使用过多次．据学员反映，这些内容切合中学实际，对教师数学素养的提高有很大帮助，对他们在中学开展数学建模与数学应用教学也有一定的启发作用．

本书可作为师范院校数学专业、中学教师继续教育、高师本科函授教材及中学教师教学参考书，也可作为中学生课外读物．

初等数学建模是一门新课程，教学内容和教学方法都很不成熟，编写教材难度较大，再加上编者水平有限，本书必然存在一些不足之处，诚恳希望广大读者提出宝贵意见，以便进一步修订.

黄忠裕

2004 年 9 月于温州

目　　录

第 1 章　数学建模概述 …… 1
1.1　为什么要学习数学建模 …… 1
1.1.1　学习数学建模是数学教育改革的需要 …… 1
1.1.2　学习数学建模是社会发展和培养人的需要 …… 6
1.2　数学模型及数学建模概述 …… 7
1.2.1　什么是数学模型 …… 7
1.2.2　什么是数学建模 …… 8
1.2.3　传统的应用题与数学建模的关系 …… 10
1.3　本课程学习建议 …… 12

第 2 章　方程模型 …… 16
2.1　可转化为方程的简单的应用问题 …… 16
2.1.1　测量的设计 …… 16
2.1.2　圆形跑道问题 …… 17
2.1.3　赶火车的策略 …… 18
2.2　一次不定方程的应用 …… 21
2.2.1　液体等分 …… 21
2.2.2　称量问题 …… 23
2.3　中国剩余定理的应用 …… 24
2.4　投入产出数学模型 …… 27
2.4.1　背景介绍 …… 27

2.4.2 举 例 …… 27

第 3 章 函数模型 …… 33
3.1 运输优化 …… 33
3.2 价格竞争 …… 38
3.3 有关交通的数学模型 …… 41
3.3.1 交通信号灯的管理 …… 41
3.3.2 交通路口的红绿灯模型 …… 44
3.4 连续函数介值性的应用 …… 46
3.4.1 双煎饼问题 …… 47
3.4.2 椅子能在不平的地面上放稳吗 …… 50

第 4 章 不等式模型 …… 56
4.1 算术平均值 - 几何平均值不等式的应用 …… 56
4.1.1 饮料罐制造用材问题 …… 56
4.1.2 洗衣服中的数学 …… 58
4.2 电阻问题 …… 61
4.3 体育训练问题 …… 63
4.4 公平的席位分配 …… 67

第 5 章 数列模型 …… 79
5.1 一阶常系数线性差分方程的应用 …… 79
5.1.1 魔针问题 …… 80
5.1.2 学习过程的数学描述 …… 81
5.2 银行中的数学问题 …… 84
5.2.1 从一组数据提出问题 …… 84

5.2.2　分析与假设 …………………………………… 85
5.2.3　建立模型 ……………………………………… 85
5.2.4　关于买房贷款 ………………………………… 87
5.3　斐波那契数列及其应用…………………………… 87
5.3.1　问题缘起 ……………………………………… 87
5.3.2　兔子问题数学模型的建立 …………………… 88
5.4　人口增长模型……………………………………… 96
5.4.1　马尔萨斯模型 ………………………………… 96
5.4.2　阻滞增长（Logistic）模型 ………………… 96
5.4.3　连续型的阻滞增长模型…………………… 100

第 6 章　几何模型……………………………………… 104
6.1　等周问题 ……………………………………… 104
6.1.1　等周定理的发现…………………………… 105
6.1.2　等周定理的证明…………………………… 107
6.1.3　等周定理的另外几种形式………………… 109
6.1.4　等周定理的应用…………………………… 109
6.2　几何优化问题 ………………………………… 112
6.2.1　光的折射…………………………………… 112
6.2.2　集散点问题………………………………… 115
6.2.3　集散点问题特殊化后的几个初等问题…… 116
6.3　多面体欧拉公式的应用 ……………………… 117
6.3.1　多面体欧拉公式的历史花絮介绍………… 117
6.3.2　欧拉是怎样发现这个公式的……………… 118
6.3.3　多面体欧拉公式的证明…………………… 119
6.3.4　多面体欧拉公式的应用…………………… 122

6.4 用正多边形地砖铺砌地面问题 …… 124

第 7 章 规划模型 …… 131
7.1 生产的合理安排 …… 132
7.1.1 合理安排生产 …… 132
7.1.2 建立线性规划模型的过程 …… 132
7.1.3 模型求解的基本方法 …… 134
7.2 下料问题 …… 137
7.3 分配模型与指派模型 …… 139
7.3.1 指派问题 …… 140
7.3.2 分配问题 …… 143

第 8 章 计数与初等概率模型 …… 145
8.1 平面分空间问题 …… 145
8.2 伯努利–欧拉错装信封问题 …… 149
8.2.1 引 例 …… 149
8.2.2 问题一般化 …… 149
8.2.3 伯努利–欧拉错装信封问题的解决 …… 150
8.2.4 将问题扩展，从概率角度进行描述 …… 153
8.3 长方体规则打包方案数的数学模型 …… 153
8.4 可以转化为几何概率的应用题 …… 156
8.4.1 丈夫–妻子相遇问题 …… 157
8.4.2 蒲丰投针问题 …… 158
8.4.3 游泳人问题 …… 159
8.5 电梯运行问题 …… 161

第 9 章　图论模型…………………………………………………… 169
9.1　一笔画问题 ………………………………………………… 169
9.1.1　七桥问题……………………………………………… 169
9.1.2　有关图的基本概念…………………………………… 171
9.1.3　一笔画定理及其证明………………………………… 172
9.1.4　一笔画定理的简单应用……………………………… 173
9.1.5　评　注………………………………………………… 173
9.2　中国邮递员问题 …………………………………………… 174
9.3　周游世界问题 ……………………………………………… 176
9.4　最小生成树 ………………………………………………… 178
9.4.1　最小生成树…………………………………………… 178
9.4.2　斯坦纳最小树………………………………………… 181
9.5　最短路模型 ………………………………………………… 186
9.5.1　最短路模型的算法…………………………………… 186
9.5.2　最短路模型的一个应用：中心选址问题
……………………………………………………………… 189

第 10 章　数学建模的常见方法 ………………………………… 196
10.1　数据建模法……………………………………………… 196
10.1.1　从不同角度看待数据资料………………………… 197
10.1.2　依据确定性数据的建模方法……………………… 199
10.1.3　依据随机性数据的建模方法……………………… 202
10.2　优选法…………………………………………………… 209
10.2.1　问　题……………………………………………… 209
10.2.2　分　析……………………………………………… 210
10.2.3　等分法……………………………………………… 210

10.2.4　优选法（0.618 法）…… 210
10.2.5　等分法与优选法试验结果比较…… 211
10.2.6　优选法的两点创新…… 212
10.2.7　优选法的工作原理…… 212
10.2.8　分数法…… 215
10.3　统筹法…… 216
10.3.1　问　题…… 216
10.3.2　分　析…… 217
10.3.3　问题解决…… 217
10.3.4　统筹法及其步骤…… 220
10.4　聚类分析法…… 221
10.4.1　如何衡量两个事物的差别…… 221
10.4.2　聚类分析法…… 223
10.4.3　有序事物的聚类分析…… 224
10.5　模糊综合评判法…… 227
10.6　层次分析法…… 232
10.6.1　层次分析法的基本原理与步骤…… 233

附录　思考与练习题答案与提示…… 245

参考文献…… 255

第 1 章　数学建模概述

随着科技的迅速发展，数学模型、数学建模这些词汇越来越多地出现在现代人的生产生活和社会活动中．当前，绝大部分高师院校的数学系、中学教师职后培训都开设了与数学建模有关的课程，这自然是与教育改革的不断深入密切相关的．那么，作为数学教师，为什么要学习数学建模？数学模型、数学建模方法以及数学建模到底是什么？这门课程的学习需要注意些什么？这是我们必须首先知道的．

1.1　为什么要学习数学建模

1.1.1　学习数学建模是数学教育改革的需要

1.1.1.1　教学改革的需要

1980 年 4 月，美国数学教师协会（NCTM）公布了一份指导 80 年代学校数学教育的纲领性文件《关于行动的议程》．该文件指出：“80 年代的数学教育大纲，应当在各年级都介绍数学的应用，把学生引进到问题解决中去．”“数学课程应当围绕问题解决来组织，数学教师应当创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境．”总之，“必须把问题解决作为学校数学教育的核心”．自从美国提出“问题解决”这一口号以来，各国纷纷响应．在 1984 年第五届国际数学教育大会（ICME－5）上，“问题解决”已成为大会最主要的议题之一．现在，世界上大部分国家都已将

提高学生的问题解决能力作为数学教育的主要目标之一，问题解决已成为国际数学教育研究的一个热点.

尽管人们对什么是“问题解决”，数学教育中要解决什么样的问题看法不太一致，但把“问题解决”的特性界定为“用新颖的方法组合两个或更多的法则去解决一个问题”(《国际数学教育辞典》)，却是人们普遍认可的.

正因为如此，人们对当前课堂教学所进行的改革之一，便是追求“以问题为纽带”的教学.

首先，创造力是人人具有的天然禀赋，而创造始于问题. 因为，有了问题才会思考，有了思考，才有解决问题的方法，才有找到独立思路的可能. 当然，这里的关键在于你能否在没有问题的地方发现问题. 显然，有问题虽然不一定有创造，但没有问题一定没有创造.

其次，问题意识是与生俱来的本能. 例如，小孩子学会说话以后，说得最多的就是“这是什么?”“那是什么?”当你回答了他们那些无穷无尽的问题后，他们还会接下去产生新的问题——“为什么?”

再次，我国传统教育有明显的“去问题教育”的倾向. 我们经常听到老师下课前问学生:“都听懂了吗?”“还有问题吗?”当学生回答说没有问题了，老师就放心了. 有的老师还要抽问学生，当得到的答案都是正确的，也就是都符合标准答案时，老师才会感到确实是没有问题了. 学生没有问题地走进教室，然后再没有问题地走出教室，这种教育被一些教育家们称为“去问题教育”，而且我们发现“去问题”现象会随年级的增加而递增.

我们应该追求什么呢？我们应该追求以问题为纽带的教学，即学生带着问题走进教室，带着更多的问题走出教室；教师并不以知识的传授为目的，而是以激发学生的问题意识、加深问题的深度、探求解决问题的方法，特别是形成自己对问题的独到见解

为目的.

当然，以问题为纽带的教学需要“好的问题”，其标准有二：一是清晰易懂；二是难而又可解决（希尔伯特），如哥德巴赫猜想. 本书选编的一些中学数学建模案例，就力求达到上述标准.

素质教育的核心是对创新精神与实践能力的培养，“问题解决”将直接促进学生创新意识与实践能力的提高. 这里的问题，大多数来自实际，或是具有实际背景的数学问题. 也就是说，数学建模是问题解决的主要形式，因此，学习数学建模顺应了当前教学改革的需要.

1.1.1.2 中学课程改革的需要

（1）我国有重视数学应用的传统.

最早的数学建模教材应该说是我国古代的《九章算术》（约成书于公元 1 世纪），它具有开放的归纳体系、算法化的内容、模型化的方法，充分体现了我国的数学传统——实用主义与算法思想，并因此孕育了吴文俊院士的巨大成就——机械化证明，特别是他所提出的“吴氏消元法”为数学处理在计算机上的实现奠定了理论基础.

《九章算术》中有 246 个应用题，每个问题分成四个条目：一是问，给出具体问题；二是答，给出问题的数值答案；三是术，讨论与条目同类问题的普遍方法或算法，有时相当于一个公式或定理；四是注，说明“术”的理由，即给出一种证明或佐证.

例 $1-1$　鸡兔同笼问题.

问：今有鸡兔同笼，共有头 6 个，足 18 只，问鸡兔各几何？

答：鸡 3，兔 3.

术：鸡数 $=$（头数 $\times 4-$ 足数）$\div$（$4-2$）.

注：如果全算成兔，则多出的足就是由于把鸡算成兔而造成

的，到底把多少鸡算成了兔？

（2）当前的中学教材已经比较重视数学建模与应用，并且把培养学生的应用意识与应用能力作为数学课程的重要目标．这些体现在：

①每章的引言：展示一个具体问题或本章研究的主要内容与思想方法．例如，初中“圆”这一章的引言课就提出，一个残破的轮片，怎样测出它的直径？圆弧形拱桥，设计时桥拱圈的半径该怎么计算？等一系列问题．

②阅读材料：例如，蜂房里的几何学，自由落体运动的数学模型等．

③专门的应用题：例如，函数的应用举例．

④实习作业与研究性课题：例如，高中的线性规划的实际应用，初中的“想一想”等，绝大部分是研究性课题，或是知识的应用与深化．

（3）当前中学生数学知识应用竞赛正如火如荼地开展．

最早的数学建模比赛是1985年在美国举办的大学生数学建模竞赛．从20世纪90年代起，我国开始举办大学生数学建模竞赛，最早由中国工业与应用数学学会组织，每年一届，现已被教育部列为国家级大学生能力竞赛之一，是衡量大学办学质量的一个指标．

上海市从1991年开始组织“金桥杯”中学生数学知识应用竞赛．北京市从1994年开始组织“方正杯”中学生数学知识应用竞赛，每年一届．目前，类似于数学建模竞赛的中学生数学知识应用竞赛正在全国多个城市展开，这对中学生数学能力的培养将起到深远的影响．因此，在中学教师的职前培训中开设数学建模课程，在职后教育中学习数学建模知识已经成为时代的需要．

（4）已经试验的义务教育阶段新的数学课程标准，对学生应用意识的培养进行了全面的阐述．

首先，学生的应用意识体现在以下两个方面：一是面对实际问题，能主动尝试从数学的角度运用所学知识和方法寻求解决问题的策略．学生主动运用数学知识的意识包括两方面：①在实际情景中发现问题和提出问题的意识；②主动应用数学知识解决问题的意识．二是认识到现实生活中蕴涵着大量的数学信息，数学在现实世界中有着广泛的应用．这是一种理论联系实际的意识，对学生来说，也包含了两方面的含义：①学生对生活中的数学现象具有一定的敏感性，能认识到生活中处处有数学，数学就在他们身边；②学生对数学有一种正确的观念，学习者在学习的过程中能够认识到数学是有用的．

其次，关于如何培养学生的应用意识，标准中指出：

①在数学教学中和对学生数学学习的指导中，应该重视介绍数学知识的来龙去脉．

一般来说，数学知识的产生源于两个方面：实际的需要和数学内部的需要．义务教育阶段，学生所学的知识大都来源于实际生活，包括他们的实际生活经验．例如，日常生活中存在着“具有相反意义的量”、“不同形式的等量关系和不等量关系”以及“变量间的函数对应关系”等，这些正是数学中引入“正负数”、“方程”、“不等式”、“函数”的实际背景．

②学会运用数学语言描述周围世界出现的数学现象．

数学是一种“世界通用语言”，它能够准确、清楚、间接地刻画和描述日常生活中的许多现象．应让学生养成乐于运用数学语言进行交流的习惯．例如，当学生乘坐出租车时，他应能意识到付费与行驶时间（或路程）之间具有一定的函数关系．

③在数学教学和课外活动中，要鼓励和支持学生“面对实际问题时，能主动尝试着从数学的角度运用所学知识和方法寻求解决问题的策略”，即强调通过数学的应用，培养学生应用数学的意识和解决实际问题的能力．

例如，一所农村小学，盖了一座新教学楼，教学楼盖好了需要装修．这里有两个任务：一是测量这个大楼的表面积；二是了解市场上各种涂料的价格．要求设计使用涂料的分配方案，使其既能保证装修质量，又能省钱．

④开阔学生的数学视野，使他们了解数学的应用价值．

（5）2004 年颁发的《普通高中数学课程标准》（实验）中明确指出，发展学生的数学应用意识是高中课程的基本理念之一．

20 世纪下半叶以来，数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一．在当今的知识经济时代，数学正从幕后走向台前，数学和计算机技术的结合使得数学在许多方面能够直接为社会创造价值，同时，也为数学的发展开拓了广阔的前景．我国的数学教育在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视，因此，高中数学在数学应用和联系实际方面需要大力加强．近几年来，我国大学、中学数学建模的实践表明，开展数学应用的教学活动符合社会需要，有利于激发学生学习数学的兴趣，有利于增强学生的应用意识，有利于扩展学生的视野．

高中数学课程应提供数学基本内容的实际背景，反映数学的应用价值，开展“数学建模”的学习活动，设立体现数学某些重要应用的专题课程，力求使学生体验到数学在实际问题中的作用，数学与日常生活及其他学科的联系，促进学生逐步形成和发展数学应用意识，提高实践能力．

1.1.2　学习数学建模是社会发展和培养人的需要

当前，数学模型已成为科技工作者经常谈论的名词．炼钢厂的工程师们希望有炼钢过程的数学模型，以实现计算机自动控制；气象工作者需要天气预报的数学模型；从事城市规划工作的专家需要建立一个包括人口、交通、能源、城市环境的数学模

型，为决策者提供决策依据；金融工作者需要计算期权定价的数学模型……众所周知，现在美国正在研究的国家导弹防御系统中也包含着大量的数学问题．如果要对导弹进行拦截，就要对雷达上接收到的数据进行短时间快速处理．这首先要确定弹道导弹的轨道，然后再确定拦截导弹的轨道，并使两颗导弹的弹道曲线在空中相交，并且相交的角度要越小越好，这样才能提高拦截的成功率．这种拦截原理要求有非常精确的测算、控制和制导，其中大部分都是数学问题，涉及大量的数学模型．总之，数学建模可以为我们研究的对象提供分析、预报、决策或控制、优化等定量结果，它是数学应用的必由之路．人类和社会的发展都需要数学建模．

另外，数学建模能促进学生思维能力及解决问题能力的培养．传统的数学教学总给人这样一种印象：似乎数学的研究内容仅仅是从公理、公式、定义出发进行逻辑推理．而数学建模恢复了数学研究收集数据、建立模型、求取答案、解释验证的本来面目．因此，凡学过数学建模的学生都认为数学建模不是一门传统的数学课程，它会让学生感觉耳目一新，其对学生能力的培养是前所未有的．

1.2 数学模型及数学建模概述

1.2.1 什么是数学模型

1.2.1.1 数学模型的含义

广义地说，一切数学概念、数学理论体系、方程式和算法系统都可以称为数学模型；各种数学分支也都可以看作数学模型．本书采用数学模型的狭义含义，包括以下三种说法：