

课堂精讲精练丛书

冲出题海

初中数学

主编 陈永明 邵翼如
参编 蔡武冈 孙 忱 李福英
刘建胜 徐 俭

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书根据初中数学教学内容分成十一章。前十章讲解各章知识的应用。通过讲解例题,点拨思路,讲授关键技术,达到精做题而举一反三的效果。书中还配有类题与精练题目,帮助读者巩固课本知识。第十一章是综合复习,用以提升课堂知识。所有练习都附有答案。

本书可供初中学生使用,也是初中教师理想的教学资料。

目 录

第一章 数和式.....	1
第一节 实数.....	1
第二节 整式.....	6
第三节 分式	11
第四节 二次根式	19
第二章 一次方程(组)与一次不等式(组)	25
第一节 一次方程(组)	25
第二节 一次不等式(组)	31
第三章 函数	37
第一节 函数概念	37
第二节 正比例函数和反比例函数	43
第三节 一次函数	48
第四节 二次函数	55
第四章 一元二次方程	61
第一节 解一元二次方程、判别式,根与系数关系	61
第二节 解分式方程、无理方程、二元二次方程组	66
第三节 列方程解应用题	71
第五章 统计初步	78
第一节 统计的有关计算	78
第二节 统计思想的应用	85
第六章 三角形	96
第一节 平行线和三角形	96
第二节 全等三角形	103
第七章 四边形.....	115
第一节 平行四边形、矩形、菱形.....	115
第二节 正方形、梯形	123

第八章 相似三角形.....	130
第一节 比例线段.....	130
第二节 相似三角形.....	138
第九章 锐角三角比和解直角三角形.....	149
第一节 锐角三角比.....	149
第二节 解直角三角形及其应用.....	154
第十章 圆.....	162
第一节 圆的性质及点与圆、直线与圆的位置关系	162
第二节 两圆的位置关系、正多边形与圆	169
第十一章 初中数学专题讲座.....	178
第一节 一元二次方程的应用.....	178
第二节 函数与方程思想.....	186
第三节 函数与几何相结合型问题.....	193
第四节 函数的应用问题.....	202
第五节 几何计算和几何证明.....	215
第六节 圆的应用.....	224
第七节 图形运动	232
第八节 分类讨论研究.....	243
第九节 应用问题研究.....	251
第十节 综合题研究.....	261
第十一节 开放性问题研究.....	273

这可不是一本普通的练习册！

——写在前面

摆在大家面前的这本书，可不是一本普通的练习册！那么，她究竟有什么特别之处？让我们从头说起。

学数学要不要做题目？当然是肯定的。但是要不要无止境地做题目？完全没有必要！这不仅是我们的看法，也是多数优秀教师的看法，也是数学家的看法。

题海之所以盛行，是有深刻的原因的，其中一个直接的原因，就是不放心，老师不放心，家长不放心，同学自己也不放心，好像只有把所有的题目做过了，才放心了。于是，今天一张卷子，明天又是一张卷子，周周练，月月考，可以说学生头脑里是乱糟糟的一堆题目，没有良好的认知结构。其实心理学里早有定论，无序的知识是难以记忆、难以运用的。因此，尽管我们无法避免考试，但是应试可以傻应，也可以聪明地应，这里也体现了不同的素质。

我们主张：

- 首先要把握每一个章节的知识体系，弄清楚有哪些典型的题目；
- 接着把典型的题目弄透彻；
- 然后适当地、有层次地进行练习：做模仿巩固的、变式的、综合的、发散的各种习题；
- 在解题之后提倡反思，思考成功的经验或失败的教训，总结规律，总结思想方法；
- 回顾整个章节的知识、做过的题目、特别是自己犯过的错误，用几句话进行概括。

从而在头脑里形成清晰的、简洁的结构，就是华罗庚说的“由厚到薄”中的“薄”的境界。这时候，你可能会说：“某某章就这么回事！就这么几条经验！”这里奉献给大家的这本书，目的就是通过精练精析，让大家走出题海，真正地学好数学。

为了编好这本书，我们：

- 首先集聚了优秀的老师，我们这个编写组，有好几位著名的数学教育专家和资深的高级教师，还有好多优秀的青年教师；
- 第二，我们认真学习了上海市教委的有关精神和中考的考纲，认真地做了近五年的中考试卷，并逐题进行分析，寻找“稳中有变”的精华，杜绝怪题偏题；
- 第三，我们框定了例题、习题的数量，根据要求，我们认真选题，认真分析，强调通法，拒绝花俏，做到精练精析。

我们相信：这本书对大家一定大有帮助！

在这本书里，每一节包含：例题、类题、精练三个部分。“例题”不多，每节只精选六个题，一般说是这一节里面的典型问题，通过它的解决，可以达到解决一类问题的目的。“类题”是模仿性的，这是必要的，是符合学习规律的，类题也不多，每道例题后面只安排了1—2个。“精练”是我们精选出来的配套习题。在例题里，除“解答”外，有“点拨”、“评注”等环节，启发和帮助大家理解、把握解题的规律，体现了“精析”的精神。特别是我们对重要规律写了30多条“点睛”，这是我们多年教学的心得，有的还是“独门绝技”，相信它会让你眼更明，心更亮！

最后要说明的是,本书仅针对了上海市一、二期课改转型期的 2007、2008 年中考,主要供相应届别的中学生学习。但是内容的针对性,并不妨碍本书的通用价值:冲出题海!选题要精!分析要透!这是值得每一位教师和学生记取的和进一步研究的。

最后,祝大家学习进步!

主编 陈永明 邵翼如

2006 年 12 月

(注:陈永明——教授,徐汇区教学指导团团长;邵翼如——特级教师,西南位育中学副校长)

第一章 数和式

第一节 实数



例题

【例 1】判断以下各题的正误,并简要说明理由:

- (1) 实数就是能够写成两个整数之比的一类数。
- (2) 无限小数就是无理数。
- (3) 带根号的数不一定是无理数。
- (4) 无理数实际上就是开方开不尽的不尽方根。
- (5) 两个无理数的和、差、积、商不一定是个无理数。

[点拨] 无理数定义的把握是解决此类问题的关键。无理数是无限不循环的小数。

[解] (1) 错误。(2) 错误。(3) 正确。(4) 错误。(5) 正确。

[评注] 要深刻理解无理数、实数概念。

①实数是无理数和有理数的统称,其中有理数可以写成两个整数之比的形式,如 $-2 = -\frac{2}{1}$, $0 = -\frac{0}{1}$, $-1\frac{2}{5} = \frac{-7}{5}$ 等等,反之,凡是由两个整数之比(比的后项不等于零)得到的数一定是有理数。因此,一切可以表示成 $\frac{n}{m}$ [$m \neq 0, m, n$ 为整数且互质]这种形式的数就是有理数,但无理数不能写成两个整数的比。②无限小数可分为两类:无限不循环小数和无限循环小数,其中前一种是无理数,后一种是有理数,如 $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$ 。③带根号的数可以是有理数。如 $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$,也可以是无理数,如 $\sqrt{3}, \sqrt{5} \cdots$ (4)无理数不仅是开不尽的方根,还有像 $\pi, e, 0.1011011101110 \cdots$ 等也都是无理数。

[类题]

1. 有下列说法:

- (1) 无理数就是开方开不尽的数。
- (2) 无理数是无限不循环小数。
- (3) 无理数包括正无理数、零、负无理数。
- (4) 无理数都可以用数轴上的点来表示。

其中正确的说法的编号是_____。

2. 在 $-\frac{5}{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{16}}, 3.14, 0, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}}{2}, |\sqrt{4}-1|$ 中,

整数有_____;

试读 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

无理数有_____；

有理数有_____。

- 【例 2】** (1) 求 $|-8|$ 。 (2) 求 $|x|-x$ 。
 (3) 求 $|a-5|+|a-6|$ 。 (4) 实数 a 取何值时, $|a|+a=0$ 成立。

[点拨] 数字绝对值可以根据绝对值意义求得。含字母绝对值的求值,关键是通过讨论去掉绝对值符号。要记住绝对值的意义: $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

[解] (1) 8。

(2) 当 $x \geq 0$ 时,原式 $= x - x = 0$; 当 $x < 0$ 时,原式 $= -x - x = -2x$ 。

(3) 当 $a < 5$ 时,原式 $= -(a-5) - (a-6) = -2a+11$;

当 $5 \leq a < 6$ 时,原式 $= (a-5) - (a-6) = 1$;

当 $a \geq 6$ 时,原式 $= (a-5) + (a-6) = 2a-11$ 。

(4) 当 $a \geq 0$ 时,左端 $= a+a=2a \geq 0$;

当 $a < 0$ 时,左端 $= -a+a=0$;

所以 $a < 0$ 时, $|a|+a=0$ 成立。

[类题]

3. 求(1) $|7-x|$ ($x > 7$ 时)。 (2) $|a|-|a-1|$ 。 (3) 化简 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|ab|}{ab}$ 。

4. 如果 $|x+(-8)| = |x| + |-8|$, 那么 x 是怎样的数?



点睛

字母绝对值讨论的关键是寻找关节点。如 $|x|$ 的关节点是 0, $|x+1|$ 的关节点是 -1, $|2x-4|$ 的关节点是使 $2x-4=0$ 的 x 的值, 即是 2, $|x-1|+|x-3|$ 的关节点是 1 和 3。

【例 3】 已知 $\left|a + \frac{1}{3}\right| + (c-2)^2 = 0$, 求 a^c 的值。

[点拨] 注意到对任意实数 x , $|x| \geq 0, x^2 \geq 0$ 。

[解] $\left|a + \frac{1}{3}\right| + (c-2)^2 = 0$,

依题意得: $\begin{cases} a + \frac{1}{3} = 0, \\ c - 2 = 0. \end{cases}$

解此方程组得: $a = -\frac{1}{3}, c = 2$ 。所以 $a^c = \frac{1}{9}$ 。

[类题]

5. 如果 $|2x+3| + (2y-1)^2 = 0$, 那么 $(x+y)^{2001} =$ _____。



点睛

例 3 的条件是有 2 个变量, 1 个式子, 通常是无法求出这 2 个变量的值的。但在一些特殊

情形是可以的:若干个非负数的和等于0,那么这些非负数都等于0。初中阶段遇到的主要的非负数有: x^2 , $|y|$,今后还有根式 \sqrt{x} 。

【例4】 计算: $9\frac{3}{4}+99\frac{3}{4}+999\frac{3}{4}+9999\frac{3}{4}$ 。

[点拨] 本题可将 $9\frac{3}{4}$ 改写成 $(10-\frac{1}{4})$, $99\frac{3}{4}$ 改写成 $(100-\frac{1}{4})$,……,然后用加法的交换律、结合律将整数和分数分别相加,便得结果;

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 9\frac{3}{4}+99\frac{3}{4}+999\frac{3}{4}+9999\frac{3}{4} \\ & =\left(10-\frac{1}{4}\right)+\left(100-\frac{1}{4}\right)+\left(1000-\frac{1}{4}\right)+\left(10000-\frac{1}{4}\right) \\ & =11110-1 \\ & =11109. \end{aligned}$$

[评注] 分析运算中数字的特点是基本的技术,一般都通过变形进行简便运算,这样就可以省时又省力。

[类题]

6. $8^{2000} \times 0.125^{2001} =$ _____。

【例5】 计算: $-3^2 - \left[(-2)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \sqrt[3]{-8} \right] \div (-5) \times \frac{1}{5}$ 。

[点拨] 本题是实数的混合运算,用混合运算的顺序来解。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & -3^2 - \left[(-2)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \sqrt[3]{-8} \right] \div (-5) \times \frac{1}{5} \\ & =-9 - (-8 \times 4 + 2) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{5} \\ & =-9 - 30 \times \frac{1}{25} \\ & =-9 - \frac{6}{5} \\ & =-\frac{51}{5}. \end{aligned}$$

[评注] 注意运算顺序的规则,先去括号,再乘除乘方,然后加减。同时灵活运用运算律,简化运算步骤。这里特别要注意的是:不能先计算 $(-5) \times \frac{1}{5}$ 。

[类题]

7. $-2^2 - (-3)^{-1} + \sqrt[3]{-27} \div 9 - \sqrt{12} \div \sqrt{\frac{1}{3}}$ 。

【例6】 实数 p 在数轴上的位置如图1-1所示,

$|p-1| + |p-2| =$ _____。

[点拨] 从图中看出 p 与1,2的大小。即 $p > 1$,
 $p < 2$ 。

[解] $|p-1| + |p-2|$

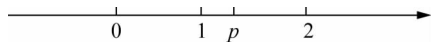


图 1-1

$$= p - 1 + 2 - p$$

$$= 1.$$

[评注] 此类问题,捕捉图形信息非常重要,即形数的有机结合。

[类题]

8. 若实数 a, b, c (在数轴上对应点如图 1-2 所示), 计算 $\sqrt{a^2} + |c-a| - |a+b| + |b+c|$ 的值。



图 1-2



精练

一、填空题

- 计算: $1 + (-1)^3 \div 3^2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$ _____; $[-2^2 \times 5 + (-2)^2] \div (-4)^2 =$ _____。
- 计算: $-2 \times 3^2 - (-2 \times 3)^2 =$ _____; $-[-(-1)^{2n}]^{2n+1} =$ _____。
- 计算: $||1999 - 2000| - 2001| =$ _____。
- 如果 $|2x+3| + (2y-1)^2 = 0$, 那么 $(x+y)^{2001} =$ _____。
- 若 $1^n + (-1)^n = 0$, 则 $(-1)^n =$ _____。
- 如果 $a=5, b=3$, 比较大小: a^b _____ b^a 。
- 计算: $0.125^{15} \cdot (2^{15})^3 =$ _____。
- 设 $a=3^{55}, b=4^{44}, c=5^{33}$, 则 a, b, c 的大小关系是 _____。

二、选择题

- 一个数的平方是正数, 则这个数是()。

A. 正数 B. 负数 C. 不为零的数 D. 非负数
- 下列计算错误的是()。

A. $(2^3)^2 \times 2^4 = 2^{10}$ B. $(-c)^3 (-c)^5 = c^8$

C. $-3^2 \times (-3)^4 = (-3)^6$ D. $5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = 20$

三、计算与解答题

11. 把下列各数填入相应的集合内:

$$-7, 0.32, \frac{1}{3}, 46, 0, \sqrt{8}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{216}, -\frac{\pi}{2}.$$

- ① 有理数集合: { _____ }; ② 无理数集合: { _____ };
- ③ 正实数集合: { _____ }; ④ 实数集合: { _____ }.

12. 计算:

(1) $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}+\frac{7}{18}\right)\times 18-1.45\times 6+3.95\div\frac{1}{6}$.

(2) $2\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{11}\div 1\frac{1}{3}$.

(3) $\left|\frac{1}{1001}-\frac{1}{1000}\right|+\left|\frac{1}{1002}-\frac{1}{1001}\right|-\left|\frac{1}{1002}-\frac{1}{1000}\right|$.

13. 写出所有适合下列条件的数:

(1) 大于 $-\sqrt{17}$ 小于 $\sqrt{11}$ 的所有整数。(2) 绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数。14. 一个正数 x 的平方根是 $2a-3$ 与 $5-a$, 则 a 是多少?15. 设 $m\neq n$, 指出由于下列推算的哪一步的错误, 因而得出错误的结论。

$$\because (m-n)^2=(n-m)^2,$$

$$\therefore \sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

$$\therefore m-n=n-m,$$

$$\therefore 2m=2n,$$

$$\therefore m=n.$$

16. 从 -56 起, 逐次加 1 得到一连串整数, $-56, -55, -54, -53, -52, \dots$, 问:(1) 第 100 个整数是什么?(2) 求这 100 个整数的和。

答案

[类题]

1. (2), (4). 2. 整数有 $0, |\sqrt{4}-1|$, 无理数有 $\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}}{2}$, 有理数有 $-\frac{5}{2}, -\sqrt{\frac{1}{6}}, 3.14, 0, |\sqrt{4}-1|$. 3. (1) $x-7$; (2) 当 $a<0$ 时, -1 , 当 $0\leq a<1$ 时, $2a-1$, 当 $a\geq 1$ 时, 1 ; (3) $-1, 3$. 4. 非正实数. 5. -1 . 6. 0.125 . 7. -10 . 8. $-a$.

[精练]

1. $\frac{80}{81}, -1$. 2. $-54, 1$. 3. 2000 . 4. -1 . 5. -1 . 6. $<$. 7. 1 . 8. $c<a<b$.
 9. C. 10. C. 11. 有理数 $\left\{-7, 0.32, \frac{1}{3}, 46, 0, \sqrt[3]{216}\right\}$, 无理数 $\left\{\sqrt{8}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{\pi}{2}\right\}$, 正实数 $\{0.32, \frac{1}{3}, 46, \sqrt[3]{216}\}$, 实数 $\left\{-7, 0.32, \frac{1}{3}, 46, 0, \sqrt[3]{216}, \sqrt{8}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{\pi}{2}\right\}$. 12. (1) 21 ; (2) $-\frac{3}{40}$; (3) 0 . 13. (1) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; (2) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. 14. $-a$. 15. 第三步错. 16. (1) 43 ; (2) -650 .

第二节 整 式



例题

【例 1】 计算： $12a^2b^3 \cdot \left(-\frac{11}{3}a^3b^4\right) \div \left(-\frac{33}{5}ab^2\right)$ 。

[点拨] 单项式的乘法，只要把系数和字母分别相乘除。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 12a^2b^3 \cdot \left(-\frac{11}{3}a^3b^4\right) \div \left(-\frac{33}{5}ab^2\right) \\ &= 12 \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) \left(-\frac{5}{33}\right) a^{2+3-1} b^{3+4-2} \\ &= \frac{20}{3} a^4 b^5. \end{aligned}$$

[评注] 单项式的乘法可归结为数的运算与幂的运算，尤其要注意系数运算的正确性，运算过程中或结果中的分数，一般写成假分数而不写成带分数。

[类题]

1. 计算： $(3x^3y^2)^3 \div (6x^2y)^2 - \frac{1}{3}(xy)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y\right)$ 。

【例 2】 已知 $a = -\frac{1}{4}$ ，求 $a(2a+1) + (a+1)(2a+1) - (2a+3)(2a-3)$ 的值。

[点拨] 求代数式的值，一般都是先化简再代入。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & a(2a+1) + (a+1)(2a+1) - (2a+3)(2a-3) \\ &= 2a^2 + a + 2a^2 + 3a + 1 - (4a^2 - 9) \\ &= 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 9 \\ &= 4a + 10. \end{aligned}$$

因为 $a = -\frac{1}{4}$ ，所以，原式 $= 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 10 = 9$ 。

[评注] 单项式与多项式、多项式与多项式相乘时，要注意：①避免漏项；②能用乘法公式时，尽量用乘法公式；③整式的运算不要与因式分解相混，本题的化简结果不能写成 $2(2a+5)$ 。

[类题]

2. 先化简再求值： $(x+y)^2 - 4(x^2 - y^2) + 4(x-y)^2$ ，其中 $x=1.1, y=3.7$ 。

【例 3】 (1) 已知 $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$ ，求 $xy + 2x - y - 2$ 的值。

(2) 已知 $x + y = 1$ ，求代数式 $x^3 + 3xy + y^3$ 。

[点拨] 本题的两个小题都是代数式的条件求值问题，要会利用条件，正确求得结论。第 1 小题可以设法先求出 x, y 的值，第 2 小题可利用 $x + y = 1$ ，整体代入待求值的式子，从而推出 $x^3 + 3xy + y^3$ 的值。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & (1) \text{ 由 } x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0 \text{ 得} \\ & (x-2)^2 + y^2 = 0, \end{aligned}$$

所以 得 $x=2, y=0$,

代入待求式子,得

$$xy+2x-y-2=2.$$

(2) 因为 $x+y=1$, 所以 $(x+y)^2=1$. 得

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y) \\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+3xy(x+y)+y^3 \\ &= x^3+3xy+y^3=1, \\ \therefore x^3+3xy+y^3 &= 1.\end{aligned}$$

[评注] ①条件求值题不同于普通求值题, 不知道 x, y 的值, 却要求出含有 x, y 的代数式的值。②第(2)小题还可用以下方法求解:

解法二

把 $y=1-x$ 代入, 得

$$\begin{aligned}x^3+3xy+y^3 &= x^3+3x(1-x)+(1-x)^3 \\ &= x^3+3x-3x^2+1-3x+3x^2-x^3 \\ &= 1.\end{aligned}$$

方法二是消元法(利用条件将待求值的代数式消去一个未知数)。

[类题]

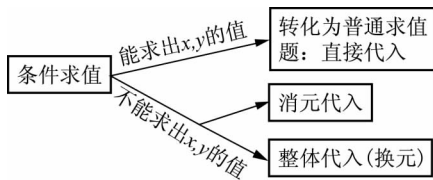
3. 已知 $a+b=3$, 求 a^3+b^3+9ab 的值。

4. 已知 $x^2+y^2-6x-8y+25=0$, 求 x^2y-xy^2+xy+1 的值。



点睛

条件求值题的解法是:



【例 4】列代数式:

(1) x 的 $1\frac{1}{3}$ 加上 6 的和; x 与 $1\frac{1}{3}$ 的积的 6 倍。

(2) 某人上山办事, 沿原路返回, 去时速度每小时行 a km, 回来时速度每小时 b km, ($b > a$) 求某平均速度。

[点拨] 本题的第一小题, 是列代数式的文字题, 要掌握“先读先写, 后读后写”的方法。第二小题是应用题的形式, 关键抓住题目中的几个量之间的关系, 其中平均速度 = 总路程 ÷ 总时间。

[解]

(1) 由题意得 $\frac{4}{3}x+6; 6(x+1\frac{1}{3})$ 。

(2) 设上山路程为 s km, 去时速度每小时行 a km, 则所需时间为 $\frac{s}{a}$ 小时; 回来时速度每小时 b km, 所需时间为 $\frac{s}{b}$ 小时; 来回总路程为 $2s$, 则总时间需 $(\frac{s}{a} + \frac{s}{b})$ 小时。

所以平均速度为 $\frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}}$ (km)/小时, 即 $\frac{2ab}{a+b}$ (km/小时)。

[评注] 列代数式要注意书写格式: ①数字写在字母之前, 乘号省略不写。②除法写成分数形式。③数字系数写成假分数形式。④几个字母因数按字母表顺序排列。⑤最后一步是加减运算的代数式, 加单位时先把代数式加括号, 后面再写单位。

[类题]

5. x 和 y 平方和与它们的平方差的积。

6. 某人进货, 进价按原价 a 扣去 25% 的利润, 后又重新定出销售价 b , 但销路不畅, 就采取让利 20% 的方法销售, 求让利后的利润。

【例 5】 因式分解:

$$(1) ax^2 + ay^2 - 2axy - ab^2。$$

$$(2) 9(m+n)^2 - 4(m-n)^2。$$

$$(3) x(5x+9) - 2。$$

[点拨] 因式分解是把一个多项式分解成几个因式的积的形式, 因此在做因式分解的题目时, 首先看题目中有没有公因式, 如果有, 先提取公因式, 再看所给的多项式是几项式: 如果是二项式, 看是否符合平方差公式; 如果是三项式, 则首先看它是否符合完全平方公式, 若不符合, 再试用十字相乘法; 如果是四项以上的多项式可用分组分解的方法进行。

[解]

$$\begin{aligned} (1) \quad & ax^2 + ay^2 - 2axy - ab^2 \\ &= a(x^2 + y^2 - 2xy - b^2) \\ &= a[(x^2 - 2xy + y^2) - b^2] \\ &= a[(x-y)^2 - b^2] \\ &= a(x-y+b)(x-y-b)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 9(m+n)^2 - 4(m-n)^2 \\ &= [3(m+n)]^2 - [2(m-n)]^2 \\ &= [3(m+n) + 2(m-n)][3(m+n) - 2(m-n)] \\ &= (3m+3n+2m-2n)(3m+3n-2m+2n) \\ &= (5m+n)(m+5n)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & x(5x+9) - 2 \\ &= 5x^2 + 9x - 2 \\ &= (5x-1)(x+2)。 \end{aligned}$$

[评注] 因式分解时特别要注意的是: ①分解结果应是几个因式的积的形式, 而这几个因式都应为最简形式。②分解因式必须进行到底。③有时把一个代数式作为整体看, 比较简单, 如第二小题中的 $(m+n)$ 和 $(m-n)$, 若先展开, 那么使题目反而复杂化了; 但有时又需要先把式子展开, 否则就不能进行因式分解, 如第三小题。

[类题]

7. 分解因式: $(a^2 + b^2 - 25)^2 - 4a^2b^2$ 。

8. $x^2 + 3x + a$ 在整数范围内可分解, 且 $\frac{1}{3}(4-2a) \leq 8$, 求 a 。

【例 6】 阅读理解并填空:

$$(1+x)(1-x) = 1-x^2,$$

$$(1+x)(1-x+x^2) = 1+x^3,$$

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3) = 1-x^4,$$

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4) = 1+x^5,$$

.....

(1) 求 $(1+x)[1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+(-x)^{n-1}] =$ _____。

(2) 化简: $1-2+2^2-2^3+2^4-\dots+(-2)^{64} =$ _____。(结果为含有 2^n 的形式)

[点拨] 第一小题, 阅读分析、找出规律、写出答案。第二小题设法创造条件, 使其符合上面的形式, 从而解答。

[解] (1) 因为 $(1+x)(1-x) = 1-x^2 = 1-(1-x)^2$,

$$(1+x)(1-x+x^2) = 1+x^3 = 1-(-x)^3,$$

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3) = 1-x^4 = 1-(-x)^4,$$

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4) = 1+x^5 = 1-(-x)^5,$$

.....

所以 $(1+x)[1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+(-x)^{n-1}] = 1-(-x)^n$ 。

(2) $1-2+2^2-2^3+2^4-\dots+(-2)^{64}$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(1+2)[1-2+2^2-2^3+2^4-\dots+(-2)^{64}]}{1+2} \\ &= \frac{1-(-2)^{65}}{3} \\ &= \frac{1+2^{65}}{3}. \end{aligned}$$

[评注] 阅读理解题关键是仔细、认真读题, 根据题中所提供的已知条件, 寻找其规律, 并通过联想、模仿、构造、推广到一般, 从而最终解决问题。

[类题]

9. 写出计算结果:

$$(x-1)(x+1) = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}},$$

猜想: (1) $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $x^7-1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



精练

一、填空题

1. 计算: $x^3 \cdot (-x)^2 - x \cdot (-x^4) =$ _____。
2. 计算: $3x^3y^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^3 \cdot 9xy^2 =$ _____。
3. 计算: $(a+c)^2 - (a-2b-c)(a+2b-c) =$ _____。
4. 已知: $x-2y+3=0$, 则 $x^2 - (4y+1)x + 4y^2 + 8y =$ _____。
5. 列代数式: a, b 的和的 2 倍与 a, b 的积的一半的差为_____。
6. 一项工程, 甲单独做 a 天完成, 乙单独做 b 天完成, 现甲乙合做 4 天, 剩余工程由乙单独完成需_____天。
7. 因式分解: (1) $a^3 + a^2 - 4a - 4 =$ _____。
(2) $3x^2 - 2x - 4 =$ _____。
8. 已知: $a-b=2, b-c=3$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac =$ _____。

二、选择题

9. 已知: $9x^4 + 6x^2 + m$ 是完全平方式, 则 m 必定为()。

A. 1 B. $6\sqrt{6}x^3$ C. $-6\sqrt{6}x^3$ D. 1 或 $\pm 6\sqrt{6}x^3$ 或 $\frac{27}{8}x^6$
10. 甲、乙两人分别从 A、B 两地相向而行, 在 C 地相遇后, 甲又经过 t_1 小时后到达 B 地, 乙又经过 t_2 小时后到达 A 地, 设 $AC=s_1, bc=s_2$ 那么 $\frac{t_1}{t_2}$ 等于()。

A. $\frac{s_1}{s_2}$ B. $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ C. $\frac{s_2}{s_1}$ D. $\frac{s_2^2}{s_1^2}$

三、解答题

11. 化简并求值: $\left[(-3xy)^2 \cdot x^3 - 2x^2(3xy^2)^3 \cdot \frac{1}{2y}\right] \div 9x^4y^2$, 其中 $x=2, y=-1$ 。
12. 已知: $x^2 + x - 1 = 0$, 求 $x^3 + 2x^2 - 2$ 的值。
13. 已知: $a^2 + b^2 = 4, c^2 + d^2 = 10, ac + bd = 2$, 求 $ad - bc$ 。
14. 因式分解: (1) $(x^2 + 12x)^2 + 9(x^2 + 12x) - 22$ 。
(2) $(x-2)x(x+2)(x+4) + 12$ 。
15. 在整数范围内分解 $x^2 - mx - 20$, 且求 m 的值。
16. 一个盛满 20 升药液的容器, 第一次倒出 x 升 ($x < 20$) 后, 用水加满, 第二次又倒出 x 升, 求此容器还有原药液多少升?



答案

[类题]

1. $\frac{7}{12}x^5y^4$ 。 2. 100。 3. 27。 4. 1。 5. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$ 。 6. $\frac{4}{5}b - \frac{3}{5}a$ 。
7. $(a+b+5)(a+b-5)(a-b+5)(a-b-5)$ 。 8. -10, -4, 0, 2。 9. $x^2-1, x^3-1, x^4-1, x^5-1, x^{n+1}-1, (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ 。

[精练]

1. $2x^5$ 。 2. x^7y^5 。 3. $4ac + 4b^2$ 。 4. 21。 5. $2(a+b) - \frac{1}{2}ab$ 。 6.
 $\frac{1-4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{b}}$ 天, $\left(\frac{ab-4b-4a}{a}\right)$ (天)。 7. (1) $(a+1)(a-2)(a+2)$; (2) $3\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{3}\right) \cdot$
 $\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right)$ 。 8. 19。 9. D。 10. D。 11. 解 原式 $= x - 3xy^5$, 当 $x=2, y=-1$ 时,
原式 $= 2 - 3 \times 2 \times (-1)^5 = 8$ 。 12. -1。 13. ± 6 。 14(1) 解 原式 $= (x+1)(x+11)(x+6 + \sqrt{38})(x+6 - \sqrt{38})$; (2) $= (x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{7})(x+1-\sqrt{7})$ 。 15. $m = \pm 1, m = \pm 8, m = \pm 9$ 。 16. $\left(20 - x - \frac{20-x}{20} \cdot x\right)$ 升或 $20\left(1 - \frac{x}{20}\right)^2$ 升。

第三节 分式



例题

【例 1】(1) 下列有理式中, 哪些是整式, 哪些是分式?

$$\frac{16}{x-y}, -8a^3b, \frac{a^2-2b^2}{5}, 3-\frac{3}{a}, -\frac{6}{17}, \frac{1}{n}, \frac{4xy}{7}, \frac{3x-2}{\pi}$$

(2) 当 x 为何值时, 分式 $\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}$ 没有意义?

(3) 当 x 为何值时, 分式 $\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}$ 为 0?

[点拨] ①判断一个有理式是整式还是分式, 要看分母中是否含有字母, 若含有字母则是分式, 否则是整式。②分式没有意义的条件是分母的值等于零; 分式有意义的条件是分母的值不等于零。③分式为 0, 首先要有意义, 即分母不为 0, 其次分子应该为 0。

[解] (1) 整式有: $-8a^3b, \frac{a^2-2b^2}{5}, -\frac{6}{17}, \frac{4xy}{7}, \frac{3x-2}{\pi}$; 分式有: $\frac{16}{x-y}, 3-\frac{3}{a}, \frac{1}{n}$ 。

(2) 如果分式 $\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}$ 没有意义, 须分母 $x^2-5x-6=0$, 即 $(x-6)(x+1)=0$, 得 $x=6$

或 $x=-1$; 试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com