



恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社 恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

(学生用书)

全国重点中学一线骨干教师编写
丛书主编 方可

九年级数学(上)

与人教实验版配套

北京出版社出版集团



北京教育出版社



恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

(学生用书)

新课标

与人教实验版配套

| | | | |
|-------|-----|-----|-----|
| 丛书主编 | 方可 | | |
| 本册主编 | 沈晓强 | | |
| 本册副主编 | 高贵江 | 蔺丽娟 | 王贵宾 |
| 撰稿人 | 王金美 | 王华志 | 魏文范 |
| | 辛秀国 | 孙鸿昌 | 辛坤荣 |
| | 王敬安 | 张美玲 | 王爱森 |
| | 孙丕岩 | | |

九年级数学(上)



北京出版社出版集团



北京教育出版社



主编寄语

授人以鱼，还是授人以渔

以网络为载体的e时代，向中学教育提出了许多问题：1.什么样的教育理念最好？2.怎样及时应对教材多样化、考卷多元化的局面？3.老师怎样教，学生怎样学，才最有效果？……我们策划《超级学练考》的初衷，就是为了解决师生目前遇到的以上困惑——让广大学生在较短的时间内学得多，记得牢，练得精。

《超级学练考》丛书作为同步类新型教辅，主要为进课堂编写（也可作为学生自读类用书），其突出特点在于：

一、渗透先进的教育理念，体现教师的主导作用和学生的主体地位，立足以学生发展为中心，注重学生学习方式及思维能力的培养。

二、“学”、“练”、“考”有机结合、环环相扣：“学”以节（课）为单位，归纳、细梳所要学习的核心内容；“练”按梯度分组设题，逐级提升学生的解题能力；“考”设置多种类型试卷，全方位挖掘和诠释考点，目的在于让学生“考”后而知不足。

三、“疑难点解析”、“典例归类”、“学习笔记”等栏目设计新颖、科学、实用，有如名师从旁指导，求知更加轻松。

四、题解分离，便于思考；详解单订，便于验证。

五、书网互动，增值无限。师生在使用本丛书时，可锁定**www.hengqian.com**进行信息查询、资源下载、在线辅导等，作为本书读者免费享受这些增值服务。

相信这样的一套好书，定会给您艰辛求学带来意想不到的实惠和无穷的轻松；实现我们既授人以鱼，更授人以渔的愿望！

丛书主编 方可





目 录

第 21 章 二次根式

| | |
|--------------------|--------|
| 21.1 二次根式 | (1) |
| 21.2 二次根式的乘除 | (4) |
| 21.3 二次根式的加减 | (7) |
| 本章复习与总结 | (11) |
| 第 21 章自测试题 | (14) |
| 第 21 章综合测评 | (16) |

第 22 章 一元二次方程

| | |
|------------------------|--------|
| 22.1 一元二次方程 | (18) |
| 22.2 降次——解一元二次方程 | (21) |
| 22.3 实际问题与一元二次方程 | (27) |
| 本章复习与总结 | (30) |
| 第 22 章自测试题 | (33) |
| 第 22 章综合测评 | (34) |

第 23 章 旋 转

| | |
|--------------------------|--------|
| 23.1 图形的旋转 | (36) |
| 23.2 中心对称 | (39) |
| 23.2.1 中心对称 | (39) |
| 23.2.2 中心对称图形 | (41) |
| 23.2.3 关于原点对称的点的坐标 | (42) |
| 23.3 课题学习 图案设计 | (44) |
| 本章复习与总结 | (46) |
| 第 23 章自测试题 | (47) |
| 第 23 章综合测评 | (48) |





Contents

第 24 章 圆

| | |
|------------------------|--------|
| 24.1 圆 | (51) |
| 24.1.1 圆 | (51) |
| 24.1.2 垂直于弦的直径 | (52) |
| 24.1.3 弧、弦、圆心角 | (55) |
| 24.1.4 圆周角 | (59) |
| 24.2 与圆有关的位置关系 | (64) |
| 24.2.1 点和圆的位置关系 | (64) |
| 24.2.2 直线和圆的位置关系 | (66) |
| 24.2.3 圆和圆的位置关系 | (70) |
| 24.3 正多边形和圆 | (72) |
| 24.4 弧长和扇形面积 | (74) |
| 本章复习与总结 | (78) |
| 第 24 章自测试题 | (80) |
| 第 24 章综合测评 | (81) |

第 25 章 概率初步

| | |
|---------------------|---------|
| 25.1 概 率 | (84) |
| 25.1.1 随机事件 | (84) |
| 25.1.2 概率的意义 | (86) |
| 25.2 用列举法求概率 | (89) |
| 25.3 利用频率估计概率 | (92) |
| 本章复习与总结 | (95) |
| 第 25 章自测试题 | (97) |
| 第 25 章综合测评 | (100) |
| 期中测试卷 | (103) |
| 期末测试卷 | (106) |
| 阶段测评卷(1) | (109) |
| 阶段测评卷(2) | (113) |

(参考答案活页装订, 随书赠送)



第21章

Changjixuelianxiao

二次根式

21.1 二次根式



总结、模仿、创新。这是内化知识、创新运用的基础。



预习探路

1. 什么数的平方等于9?有没有一个数的平方等于-9?

提示 9是正数,正数的平方根有两个,这两个数是±3. 负数没有平方根.

2. 什么叫做代数式?举出几个代数式的例子.

提示 只包含代数运算的式子.如: $2+a$, $3x$, $\frac{1}{y}$, $\sqrt{6}$...

3. $\sqrt{25}$ 是一个数吗?是一个式子吗?是一个代数式吗? \sqrt{a} 呢? $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 呢?

提示 $\sqrt{25}$ 是数,是式子,是代数式.对于 \sqrt{a} ,则要在 $a \geq 0$ 的前提下视具体 a 值而定.

4. 面积为 10 m^2 的正方形,它的边长是多少?

提示 $\sqrt{10} \text{ m}$.

5. 如图21-1-1梁架的梁BC长8米,高AD长2.4米,那么斜撑AB长多少?

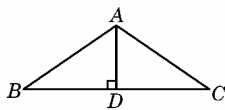


图 21-1-1

提示 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,用勾股定理求解.

6. 二次根式有哪两个形式上的特点?

提示 (1)二次根号;(2)被开方数不能取负数.



疑难点解析

1. 二次根式有意义的条件

二次根式 \sqrt{a} 有意义的条件是 $a \geq 0$,因为 \sqrt{a} 表示 a 的算术平方根.我们知道只有正数和零才有平方根和算术平方根,而负数没有平方根和算术平方根.因此二次根式中的被开方数必须是非负数,即只有被开方数 $a \geq 0$ 时,式子 \sqrt{a} 才是二次根式, \sqrt{a} 才有意义.相反,若 $a < 0$,则式子 \sqrt{a} 就不能叫做二次根式.如: $\sqrt{-5}$ 、 $\sqrt{-3-a^2}$ 都不是二次根式.

2. 二次根式必须具有以下两个特点

(1)有二次根号;

(2)被开方数不能小于0,被开方数可以是一个实数、一个单项式或多项式.如: $\sqrt{x-y}(x \geq y)$, $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ 等.

3. 区别平方根与二次根式

一个非负数的平方根不一定用“ $\sqrt{\quad}$ ”表示,如9的平方根是3与-3,但3与-3都不是根式.一个非负数的平方根用符号“ $\sqrt{\quad}$ ”表示时,它是平方根,又是根式.如: $\pm\sqrt{9}$ 是9的平方根,是根式.

4. 平方根与算术平方根

一个非负数的平方根可能是正数、负数或零,而它的算术平方根只能是正数或零.

5. \sqrt{a} 是 a 的算术平方根,是非负数,它的平方应是 a ,这就是说 $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$.这个公式反映了一个性质:二次根式的平方等于它的被开方数,它可以用来计算二次根式.

6. $\sqrt{a^2}$ 是 a 的二次幂的算术平方根, a 为任何实数时, a^2 总是非负数, $\sqrt{a^2}$ 总是非负数.因此

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & (a > 0) \\ 0, & (a = 0) \\ -a, & (a < 0) \end{cases}$$

例1 $\sqrt{(-3)^2}$ 等于 ()

A. -3 B. 3 C. ±3 D. 无意义

解 B.

例2 $\sqrt{(-x)^2}$ 等于 ()

A. x B. $-x$ C. $\pm x$ D. $|x|$

解 D.

例3 $\sqrt{(x-3)^2}$ 等于 ()

A. $x-3$

B. $3-x$

C. $x-3$ 或 $3-x$

D. 无意义

解 C.



典例归类

一、关于二次根式的定义问题

例1 在下列各式中,是二次根式的有_____. ()

(1) $\sqrt{5}$, (2) $\sqrt{-3}$, (3) $\sqrt{(-7)^2}$, (4) $\sqrt[3]{10}$,

(5) $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$, (6) $\sqrt{2-x}$ ($x \leq 2$), (7) $\sqrt{-m}$ ($m > 0$),

(8) $\sqrt{(a-1)^2}$, (9) $\sqrt{-x^2-5}$,



$$(10) \sqrt{|y|+1}, (11) \sqrt{\frac{b}{a}} (ab>0).$$

分析 要判断一个式子是不是二次根式,一是看根指数是不是2,二是看被开方数是否为非负数.

解 因为 $\sqrt{5}$, $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49}$, $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}}$, $\sqrt{2-x} (x \leq 2)$, $\sqrt{(a-1)^2}$, $\sqrt{|y|+1}$, $\sqrt{\frac{b}{a}} (ab>0)$ 中的根指数为2,且被开方数大于或等于0,所以是二次根式.

填(1)(3)(5)(6)(8)(10)(11).

说明 看被开方数是否为非负数时:一是注意到题后的条件,二是注意完全平方数和数的绝对值,还要注意到有理数的乘除法则.

思考 二次根式与平方根、算术平方根有什么联系?

例2 x 取什么数时,下列各式有意义?

$$(1) \sqrt{x-6}, (2) \sqrt{x^2+1}, (3) \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x},$$

$$(4) \sqrt{-(x+1)^2}, (5) \sqrt{x^2+2x+3}, (6) \sqrt{-x^2-3}.$$

分析 利用二次根式成立的条件 \sqrt{a} 当 $a \geq 0$ 时有意义,把各题转化为解不等式(或组).

$$\text{解 } (1) \because x-6 \geq 0, \therefore x \geq 6.$$

$$(2) \because x^2+1 > 0, \therefore x \text{ 取任何实数时, } \sqrt{x^2+1} \text{ 都有意义.}$$

$$(3) \because \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}, \therefore x=1.$$

$$(4) \because -(x+1)^2 \geq 0, \therefore x+1=0, \therefore x=-1.$$

$$(5) \because x^2+2x+3 \geq 0, \text{ 即 } x^2+2x+2+1 \geq 0$$

$$\therefore (x+1)^2+2 \geq 0, \therefore x \text{ 取任意实数.}$$

$$(6) \because -x^2-3 \geq 0, \therefore x^2+3 \leq 0$$

\therefore 不论 x 取何值, $\sqrt{-x^2-3}$ 都无意义.

说明 ①根据完全平方数,得到绝对值不等式;

②能正确地解答一元一次不等式组和一元一次不等式是关键.

思考 (1) x 是怎样的实数时,例2的6个式子中有哪几个在实数范围内没有意义?

(2)带有二次根号的式子一定是二次根式吗?判断 $\sqrt{-a}$ 是不是二次根式.

$$\text{例3 已知实数满足 } \sqrt{a-1} + \sqrt{b+2} = 0, \text{ 求 } \sqrt{-ab}.$$

分析 两个非负数的和为零,每一个数(或式子)必为零.

$$\text{解 } \because \sqrt{a-1} \geq 0, \sqrt{b+2} \geq 0, \sqrt{a-1} + \sqrt{b+2} = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} a-1=0 \\ b+2=0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{-ab} = \sqrt{-(-2)} = \sqrt{2}.$$

说明 当几个非负数的和等于0时,这几个非负数分别等于0.

思考 在下列各式中,分别求出 a, b 的值.

$$(1) |a| + |b| = 0, (2) |a| + b^2 = 0,$$

$$(3) a^2 + b^2 = 0, (4) a^2 + \sqrt{b} = 0,$$

$$(5) \sqrt{a} + \sqrt{b} = 0, (6) |a| + \sqrt{b} = 0.$$

二、关于二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$,

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & (a > 0) \\ 0, & (a = 0) \\ -a, & (a < 0) \end{cases} \text{ 的应用问题}$$

$$\text{例4 化简 } (1) \frac{10}{\sqrt{5}}, (2) \frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}.$$

分析 一个非负数为了化简的需要,可以写成它的算术平方根的平方,即 $a = (\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$.

$$\text{解 } (1) \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times 5}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times (\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

$$(2) \frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}} = \frac{x^2 - (\sqrt{2})^2}{x+\sqrt{2}} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} = x - \sqrt{2}.$$

说明 把公式 $(\sqrt{a})^2 = a$ 逆用,在进行分式的化简和解方程因式时经常用到.

思考 (1)-5 能写成 $(-\sqrt{5})^2$ 吗?

(2)当 $x \geq 0$ 时, $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$ 吗?

当 $x \leq 0$ 时, $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ 吗?

例5 若 $\sqrt{(a-5)^2} = a-5$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a > 5$ B. $a \geq 5$ C. $a < 5$ D. $a \leq 5$

分析 $\because \sqrt{(a-5)^2}$ 是表示非负数 $(a-5)^2$ 的算术平方根,

$$\therefore a-5 \geq 0.$$

$$\text{解 } \because \sqrt{(a-5)^2} = a-5,$$

$$\therefore a-5 \geq 0, \therefore a \geq 5. \text{ 选 B.}$$

说明 二次根式的化简,应掌握 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$,

特别注意 $\sqrt{a^2} = -a$ 那么 $a \leq 0$.

思考 若 $\sqrt{(a-5)^2} = 5-a$, 那么 a 还是大于等于5吗?

例6 已知 a, b, c 是三角形的三条边长, 试化简

$$\sqrt{(a+b-c)^2} + \sqrt{(a-b-c)^2}.$$

分析 运用三角形的两边之和大于第三边.

解 $\because a, b, c$ 为三角形的三条边长,

$$\therefore a+b > c, b+c > a,$$

$$\therefore a+b-c > 0, a-b-c < 0,$$

$$\therefore \text{原式} = |a+b-c| + |a-b-c|$$

$$= a+b-c + b+c-a$$

$$= 2b.$$

说明 在化简 $\sqrt{a^2}$ 时,一定要首先弄明白被开方数的底数 a 是正数、零还是负数,若是正数或零,则等于 a 本身,若是负数,则等于 a 的相反数.

思考 本题若缺少 a, b, c 是三角形的三条边长这一条件,还能化简吗?



学习 笔记

1. 二次根式的实质是非负数的算术平方根,所以我们可以用平方根、算术平方根的性质来研究二次根式.明确 $(\sqrt{a})^2$ 和 $\sqrt{a^2}$ 的根本区别与联系. $(\sqrt{a})^2$ 是 a 的算术平方根的平方. $\sqrt{a^2}$ 是 a^2 的算术平方根. 当 $a \geq 0$ 时 $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$, 公式

$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 反映了二次根式的平方等于它的被开方数. 公式 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 和 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是根式化简的基本公式.

2. 通过动手、动脑、动口, 与同伴进行合作, 并充分交流, 加强概念的形成过程.



A 课堂巩固

一、选择题

1. a, b 为任意实数, 下列各式中可能不是二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{a^2+b^2}$ B. $\sqrt{a^2+3}$
C. $\sqrt{a^2-b^2}$ D. $\sqrt{b^2+1}$

2. 下列各式中一定是二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{-11}$ B. $\sqrt[3]{2m}$
C. $\sqrt{x^2+2}$ D. $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

3. 使式子 $\sqrt{x-5} + \sqrt{8-x}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

- A. $x \leq 8$ B. $x \geq 5$
C. $x \leq 8$ 或 $x \geq 5$ D. $5 \leq x \leq 8$

4. 下列各式中恒成立的是 ()

- A. $\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b$ B. $\sqrt{(x-y)^2} = x - y$
C. $\sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2 + b^2$ D. $\sqrt{(-m)^2} = m$

二、填空题

1. x 为 _____ 时, $\sqrt{(1-x)^2}$ 是二次根式.
2. $(-\sqrt{0.01})^2 =$ _____, $-\sqrt{(-0.01)^2} =$ _____.
3. 式子 $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 是二次根式的条件是 _____.
4. 当 $1 \leq x \leq 5$ 时, $\sqrt{(x-1)^2} + |x-5| =$ _____.
5. 若 $\sqrt{(x-3)^2} + (x-3) = 0$, 则 x 的取值范围为 _____.

三、解答题

1. 已知 $(x+5)^2 + \sqrt{2y-1} = 0$, 求 $(xy)^2$ 的值.
2. 已知 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 5$, 求 $x^2 - xy + y^2$ 的值.

B 课后拓展

1. $a = |x-2|, b = (x-2)^2, c = \sqrt{x-2}, d = x+2$, 则在 a, b, c, d 中, 其值一定是非负数的共有 () 个.
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (探索题) $\sqrt{18-x}$ 是二次根式, 且 x 为整数, 求 $\frac{8}{2x}$ 的所有正整数值.

3. (探索题) 已知正数 a, b , 有下列命题

- ① 若 $a+b=2$, 则 $\sqrt{ab} \leq 1$;
② 若 $a+b=3$, 则 $\sqrt{ab} \leq \frac{3}{2}$;
③ 若 $a+b=6$, 则 $\sqrt{ab} \leq 3$.

根据以上三个命题可提供的规律猜想, 若 $a+b=9$, 则 $\sqrt{ab} \leq$ _____.

4. (应用题) 在平面直角坐标系中, 正方形 $OABC$ 的四个顶点的坐标分别是 $O(0,0), A(0,2), B(2,2), C(2,0)$, 如图 21-1-2. 如果将正方形 $OABC$ 绕顶点 O 旋转 360° , 求所得旋转图形的面积.

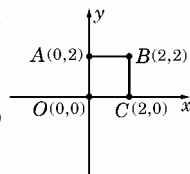


图 21-1-2

e 考题演练

一、选择题

1. (2005·重庆市中考) 9 的算术平方根是 ()
A. 3 B. -3 C. ± 3 D. 18
2. (2005·山东潍坊) 如果 $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3$ 成立, 那么实数 a 的取值范围是 ()
A. $a \leq 0$ B. $a \leq 3$
C. $a \geq -3$ D. $a \geq 3$
3. 若 $ab < 0$, 则代数式 $\sqrt{a^2 b}$ 可化简为 ()



A. $a\sqrt{b}$

B. $a\sqrt{-b}$

C. $-a\sqrt{b}$

D. $-a\sqrt{-b}$

二、填空题

1. (2005·无锡)函数 $y = \sqrt{x+3}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

2. (2005·安徽)如图 21-1-3, $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC = 2\sqrt{3}$, 则 $AB =$ _____.

3. (2005·宿迁)如图 21-1-4, 将一根 25 cm 的细木棒放入长、宽、高分别是 8 cm、6 cm 和 $10\sqrt{3}$ cm 的长方体无盖盒子中, 则木棒露出盒外的最短长度是_____.

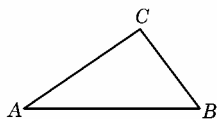


图 21-1-3

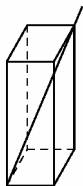
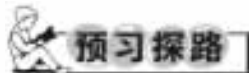


图 21-1-4

21.2 二次根式的乘除



总结、模仿 创新, 这是内化知识、创新运用的基础。



预习探路

1. 当 $a \geq 0$ 时, $(\sqrt{a})^2$ 等于什么? 我们可以把式子 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 改写成积的形式吗?

提示 可以写成 $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a (a \geq 0)$ 的形式, 根据算术平方根的意义, 当 $a \geq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = a$ 运用几何中的“等量代换”思想可得: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} (a \geq 0)$, 即 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} (a \geq 0)$.

2. 你能用两种形式表示积的算术平方根的性质吗?

提示 ① $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$, ② 积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.

3. 对于公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$. 如果把这个公式反过来看你能得到什么新的意义?

提示 公式从右到左看的意义: 二次根式相乘, 把被开方数相乘, 根指数不变. 表示成公式就是: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$.

4. 我们已经掌握了分式的乘除法, 你会进行二次根式的乘除吗?

提示 二次根式乘除, 被开方数相乘数, 根指数不变.

5. 分式运算或化简的结果要化简成最简分式. 二次根式的乘除结果或化简结果也要化成最简二次根式. 你知道什么

样的二次根式为最简二次根式吗?

提示 最简二次根式有两个要求: 一是根式中不能为分式, 二是根式中的整式没有可分离出的平方数或平方式.

6. 如何把分母中的根号化去?

提示 分子分母同时乘以分母或分母化简后的最简分式.



疑难点解析

1. 二次根式的乘除法: 两个二次根式相乘(或除), 只是把被开方数相乘(除), 根指数不变. 对于多个二次根式相乘(除), 同样把被开方数相乘(除), 把它们的乘积作为积的被开方数.

2. 在进行二次根式的乘法运算时, 注意在被开方数相乘的时候, 要考虑因式分解或因数分解, 如: $\sqrt{14} \cdot \sqrt{7}$ 可得 $\sqrt{7^2 \times 2}$, 而不要写成 $\sqrt{98}$ 再分解.

3. $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}$ 的结果是 $3 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} = 3 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$, 即根号外因式相乘, 根号内被开方数相乘, 不要出现类似于 $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ 的错误.

4. $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} \neq \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$, 而应是 $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$.

这就是说积中的各个因式必须是非负数, 若不是非负数, 应化成非负数后再运用公式化简.

5. “ $\sqrt{\quad}$ ”内的被开方数的分母到根号外时, 仍做分母, 不要出现 $\sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{6}$ 的错误.

6. 对于二次根式的乘除混合运算要注意运算顺序.



典例归类

一、关于二次根式的运算

例 1 计算: $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}$

分析 两个二次根式相乘, 将系数、被开方数分别相乘.

解 $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2 \times 3 \cdot \sqrt{3 \times 2} = 6\sqrt{6}$.

说明 对于多个二次根式相乘, 也要把系数和被开方数分别相乘.

思考 在多个二次根式相乘时, 如果出现根式的系数有负号的情况时, 确定其积的符号要运用有理数相乘的法则. 在被开方数相乘的同时, 还要注意因数分解和因式分解.

例 2 化简: (1) $\sqrt{18}$, (2) $\sqrt{a^3 b^5} (a > 0)$, (3) $\sqrt{27x^3}$.

分析 可根据 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ 和 $\sqrt{a^2} = |a|$ 将其化简.

解 (1) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{a^3 b^5} = \sqrt{a^2 \cdot a \cdot b^4 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(b^2)^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a b^2 \sqrt{ab}$.

(3) $\sqrt{27x^3} = \sqrt{9 \times 3x^2 \cdot x} = \sqrt{3^2 x^2} \cdot \sqrt{3x} = 3x \sqrt{3x}$.

说明 把被开方数分解, 使其成为 $\sqrt{a^2}$ 的形式是化简的关键.

思考 把结论中二次根式的乘数转移到根号内后, 看是

否是原被开方数,可验证化简的对错.

例 3 计算: $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{10})$.

分析 一个二次根式与几个二次根式的和或差相乘,可运用乘法对加法的分配律,分别相乘,再把积相加.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{10}) \\ & =\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}+\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}+\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \\ & =\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{20} \\ & =\sqrt{6}+\sqrt{4 \times 3}+\sqrt{4 \times 5} \\ & =\sqrt{6}+2 \sqrt{3}+2 \sqrt{5} . \end{aligned}$$

说明 被开方数相乘后,还要注意化简.特别要注意去掉括号后的符号.

思考 如果是几个二次根式的和或差与另几个二次根式的和或差相乘呢?

二、关于二次根式的除法运算,及乘除混合运算

例 4 计算:(1) $\sqrt{27} \div \sqrt{3}$,

(2) $\sqrt{a^3 b^4} \div \sqrt{ab}(a>0, b>0)$.

分析 直接用二次根式除法法则 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} (a \geq 0, b > 0)$.

$$\text{解} \quad (1) \sqrt{27} \div \sqrt{3} = \sqrt{27 \div 3} = \sqrt{9} = 3,$$

$$(2) \sqrt{a^3 b^4} \div \sqrt{ab} = \sqrt{a^3 b^4 \div ab} = \sqrt{a^2 b^3} = ab\sqrt{b}.$$

说明 结果要化成最简二次根式.

思考 以上两题,试用另一种解法作答.(提示:先把被除式和除式分别化简后,再相除)

例 5 计算: $\sqrt{3a^3} \div \sqrt{\frac{a}{6}}$.

分析 可直接运用二次根式乘除法公式或先将分子、分母分别化简再相除.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt{3a^3} \div \sqrt{\frac{a}{6}} = \sqrt{3a^3 \times \frac{6}{a}} = \sqrt{18a^2} = \sqrt{9a^2 \cdot 2} = \\ & 3a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

说明 被开方数相除,单项式除以单项式,等于单项式乘以单项式的倒数.将二次根式除法、积的算术平方根的知识综合运用时,一定要按照运算法则进行计算.

例 6 计算 $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{c^2}} \div \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bc^2}} \times \frac{1}{5}\sqrt{\frac{b}{c}}$.

分析 解题的关键是二次根式的乘法运算.利用 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 进行乘除法混合运算.先统一成乘法,再进行运算,最后结果要化成最简根式.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} & = -6 \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{2(a-b)}{c^2} \cdot \frac{2bc^2}{a-b} \cdot \frac{b}{c}} = \\ & -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{4b^2}{c}} = -\frac{3b\sqrt{c}}{c}. \end{aligned}$$

说明 对于二次根式的乘除法混合运算题,先统一成乘法后,再用乘法的结合律进行运算.

思考 本题若把各个根式先化简,然后再乘除,是否更简便,试一试.

三、关于二次根式的化简问题

例 7 化简: $\sqrt{-8ab^3} (b < 0)$.

分析 被开方数是 3 个因式的乘积,且有数字因式要根据 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 的法则进行化简.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt{-8ab^3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-2ab} = 2|b| \sqrt{-2ab} = \\ & -2b \sqrt{-2ab}. \end{aligned}$$

说明 数字因数要分解质因数,确定能化为 $\sqrt{a^2}$ 的因式是关键. $b < 0$, 而这又是一个算术平方根,要把握好算术平方根的性质即非负数.

思考 $\sqrt{-8ab^3}$ 是二次根式,已知 $b < 0$,那么 a 是怎样的数应首先确定,这是一个隐含条件.

例 8 化简:(1) $\sqrt{\frac{-8x^3}{27}}$, (2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

分析 第一小题分母是一个简单的二次根式,第二小题分母是两个二次根式的代数差,化简的目的都是要化去分母中的根号.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \sqrt{\frac{-8x^3}{27}} & = \sqrt{\frac{-4x^2 \cdot 2 \times 3x}{27 \times 3}} = \sqrt{\left(\frac{2x}{9}\right)^2 \cdot (-6x)} = \\ & -\frac{2x}{9} \sqrt{-6x}, \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{15}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}.$$

说明 如何把分母化为 $(\sqrt{a})^2$ 的形式是关键.那就要首先确定分母的有理化因式;还要根据分式的基本性质,分子、分母都要乘以有理化因式,这是易错之处.

思考 化去分母中根号是根式化简的重要内容.怎样求一个二次根式的有理化因式是有一定规律的,想一想.你能找出这个规律吗?

例 9 把根号外因式移到根号内: $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$.

分析 $\because \sqrt{\frac{1}{1-a}}$ 是根式, $\therefore 1-a > 0$, $\therefore a < 1$, 即 $a-1 < 0$.

把根号外的因式 $a-1$ 移入根号内时,要把 $a-1$ 的相反数移入根号内,此因式的本身是一个负值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} & = -\sqrt{(1-a)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-a}} = \\ & -\sqrt{(1-a)^2 \cdot \frac{1}{1-a}} = -\sqrt{1-a}. \end{aligned}$$

说明 把根号外的因式移到根号内,要运用 $a = \sqrt{a^2} (a \geq 0)$ 对式子进行变形.

思考 为什么要把根号外的因式移到根号内?它与根式的化简有什么联系呢?

学习笔记

1. 本小节内容是围绕着积的算术平方根的性质,商的算术平方根的性质为主线展开的,利用积、商算术平方根的性质进行二次根式的化简与运算.化简是将根号内能开得尽方的因式或因数开出来.运算是指二次根式相乘除.

2. 对于积的算术平方根的性质 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$



0). 应特别注意 $a \geq 0, b \geq 0$ 这个条件, 缺少这一条件, 上述性质不存在. 因为 $a < 0, b < 0$ 时, 虽然 \sqrt{ab} 有意义, 但是 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 在实数范围内无意义. 商的算术平方根的性质也是如此.

3. 在进行乘法运算时, 应注意在被开方数相乘的时候, 就考虑因式分解或因数分解. 如: $\sqrt{14} \cdot \sqrt{7}$ 直接可得 $\sqrt{7^2 \times 2}$, 而不要先写成 $\sqrt{98}$ 再分解.

4. 二次根式的除法, 一般是采用分母有理化的方法进行.



抛洒糖霜, 方显英雄本色.

A 课堂巩固

一、判断题

- $\sqrt{3(-2)} \cdot (-5) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-5}$. ()
- $\sqrt{81-64} = \sqrt{81} - \sqrt{64} = 9-8=1$. ()
- $-3\sqrt{2} = \sqrt{(-3)^2 \times 2} = \sqrt{18}$. ()
- $\sqrt{3 \frac{1}{4}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ()
- $5 \sqrt{\frac{m}{5}} = \sqrt{m}$. ()
- $\sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{(41+40)(41-40)} = \sqrt{81} = 9$. ()
- $\sqrt{25 \frac{1}{16}} = 5 \frac{1}{4}$. ()
- $\sqrt{\frac{a}{9b}} = 3b \sqrt{ab}$. ()
- 若 $b < 0$, 则 $\sqrt{\frac{4a}{-3b}} = -\frac{2}{3b} \sqrt{-3ab}$. ()

二、选择题

- 下列各式计算正确的是 ()
 - $\sqrt{4x^2} = -2x (x \leq 0)$
 - $\sqrt{a^8 b^2} = a^4 b (a < 0, b < 0)$
 - $\sqrt{4a^3 b} = 2a \sqrt{ab}$
 - $\sqrt{8a^9} = 4a^3$
- 下列计算错误的是 ()
 - $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$
 - $\sqrt{\frac{27}{64}} = \frac{3}{8} \sqrt{3}$
 - $\sqrt{4 \frac{2}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$
 - $-\sqrt{7 \frac{1}{5}} = -\frac{6}{5} \sqrt{5}$
- 等式 $\frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{a-5}} = \sqrt{\frac{a-3}{a-5}}$ 成立的条件是 ()
 - $a \neq 5$
 - $a \geq 3$
 - $a \geq 3$ 且 $a \neq 5$
 - $a > 5$

4. 当 a, b 同号时, 等式: ① $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$, ② $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b}$,

③ $\sqrt{a^2 b - 2ab^2 + b^3} = (b-a)\sqrt{b}$ 中成立的是 ()
A. ①②③ B. ①② C. ③ D. ①

三、填空题

- $\sqrt{\frac{a-b}{2(a+b)}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- $\sqrt{21} \cdot \sqrt{14} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sqrt{0.0196 \times 22500} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 把 $-6\sqrt{3}$ 根号外因式移到根号内化为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- $\frac{1}{3} \sqrt{x^2 y} \cdot \left(-\frac{1}{4} \sqrt{xy^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

B 课后拓展

一、把下列各根号内的因式移到根号外

- $\sqrt{27a^3 b^2}$;
- $\sqrt{x^3 - 2x^2 + x} (x \geq 1)$;
- $\sqrt{(a^2 - b^2)(a^4 - b^4)} (0 \leq a < b)$.

二、计算题

- $\sqrt{\frac{0.04 \times 121}{0.25 \times 676}}$;
- $\sqrt{\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}} (x > 0, y > 0)$;
- $12 \sqrt{\frac{1}{6}} \div 3 \sqrt{\frac{7}{12}} \times \frac{1}{2} \sqrt{10 \frac{1}{2}}$.

三、解答题

一个三角形底为 $2\sqrt{3}$ cm, 高是 $5\sqrt{3}$ cm, 求此三角形的面积.

四、选择题

- 已知: a, b, c 为 $\triangle ABC$ 三边的长, 且满足 $3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, 则这个三角形是 ()
- A. 等腰三角形
 - B. 等边三角形
 - C. 等腰直角三角形
 - D. 无法确定形状

e 考题演练

一、选择题

1. (2005 · 绍兴) 化简: $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - (\sqrt{2x - 3})^2$ 得 ()
 - A. 2
 - B. $-4x + 4$
 - C. -2
 - D. $4x - 4$
2. (2005 · 漳州) 下列等式成立的是 ()
 - A. $\sqrt{4+9} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$
 - B. $3 + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 - C. $\sqrt{(-4)^2} = -4$
 - D. $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
3. (2005 · 岳阳) 下列根式中是最简根式的是 ()
 - A. $\sqrt{14}$
 - B. $\sqrt{48}$
 - C. $\sqrt{\frac{a}{b}}$
 - D. $\sqrt{4a+4}$
4. (2005 · 江苏淮安) 关于 12 的说法错误的是 ()
 - A. $\sqrt{12}$ 是无理数
 - B. $3 < \sqrt{12} < 4$
 - C. $\sqrt{12}$ 是 12 的算术平方根
 - D. $\sqrt{12}$ 不能再化简
5. (2005 · 江苏宿迁) 如图 21-2-1, 将一个边长分别为 4, 8 的长方形纸片 $ABCD$ 折叠, 使 C 点与 A 点重合, 则折痕 EF 的长度是 ()
 - A. $\sqrt{3}$
 - B. $2\sqrt{3}$
 - C. $\sqrt{5}$
 - D. $2\sqrt{5}$

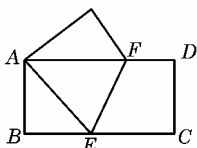


图 21-2-1

二、计算题

(2005 · 绍兴) 求下列各数的和.

$$-\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left|\frac{1}{2}\right|, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \sqrt{\frac{1}{2}}$$

三、解答题

(2005 · 河南) 有一道题, 先化简, 再求值: $\left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4}\right) \div \frac{1}{x^2-4}$, 其中 $x = -\sqrt{3}$, 小玲做题时把 $x = -\sqrt{3}$ 错抄成了 $x = \sqrt{3}$, 但她的计算结果也是正确的, 请你解释这是怎么回事?

21.3 二次根式的加减



总结、概括、创新, 这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 什么叫做同类项? 怎样合并同类项?

提示 两个单项式里如果所含的字母相同, 并且相同字母的指数也分别相同, 那么这样的两个单项式叫做同类项. 合并同类项就是把同类项的系数相加, 字母和字母指数不变.
2. 什么叫最简二次根式?

提示 ①被开方数不含分母;
②被开方数的每一个因式的指数都小于 2.
3. 什么叫同类二次根式?

提示 几个二次根式化成最简根式后, 如果被开方数相同, 则是同类根式.
4. 同类二次根式是否可以合并? 怎样合并?

提示 同类二次根式能合并, 合并二次根式与合并同类项类似.
5. 怎样进行二次根式的加减运算?

提示 先把各个二次根式化成最简二次根式, 再把同类二次根式分别合并.
6. 怎样进行二次根式的混合运算?

提示 在掌握了二次根式的化简与基本运算的基础上, 结合运算律的应用, 可以对比整式、分式的运算方法进行运算.



疑难点解析

1. 要正确进行二次根式的加减, 首先弄明白什么是同类二次根式; 而判断几个二次根式是不是同类二次根式, 应先将每个二次根式进行化简, 化成最简二次根式. 将一个二次根式化成最简二次根式, 要用到积商的算术平方根的性质.

如 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} (a \geq 0, b > 0)$.

2. 合并二次根式, 是将同类二次根式的系数相加减, 被开方数和根指数不变, 注意易出现如下错误:

① 系数相加减, 被开方数也相加减. 如: $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{6}$;

② 不同类根式也合并, 如: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2\sqrt{a+b}$;

③ 当几个同类二次根式的系数为字母时, 系数的和没用括号括起来, 如: $a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = a + b\sqrt{x}$, 又如: $2\sqrt{m} + a\sqrt{m} = 2 + a\sqrt{m}$.

3. 同类二次根式的理解: ① 必须是最简二次根式; ② 必须是被开方数相同; ③ 与根式的系数及符号无关.

4. 二次根式的混合运算中, 当几个二次根式的和或差与一个二次根式相乘时, 可以运用类似整式乘法中的单项式乘以多项式, 当几个二次根式的和或差与几个二次根式的和或差相乘时, 可以运用类似整式乘法中的多项式乘以多项式的法则进行, 有些运算还可以直接用乘法公式.

5. 二次根式的运算涉及的知识点比较多. 如: 二次根式的化简、运算律的应用、去括号法则、有理数的运算法则, 运算过程还要用上因式分解、约分等技巧, 稍有不慎, 出一点小错, 全题皆错. 因此, 要处处小心, 养成严谨的解题习惯.



典例归类

一、二次根式的加减问题

例 1 计算 (1) $(\sqrt{24} - \sqrt{0.5} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}) - (\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6})$,

(2) $\frac{2}{3}\sqrt{9x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

分析 第一小题是数字计算, 第二小题是字母运算, 且每个小题的被开方数中含分母, 需把各二次根式先化成最简二次根式后, 再加减.

解 (1) 原式 $= (2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6}) - (\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{6})$
 $= 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{6}$
 $= (2 + \frac{2}{3} + 1)\sqrt{6} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})\sqrt{2}$
 $= \frac{11}{3}\sqrt{6} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$

(2) 原式 $= \frac{2}{3} \times 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$
 $= (2 + 3 - 2)\sqrt{x}$

$$= 3\sqrt{x}.$$

说明 被开方数是小数的时候, 要先化成分数, 再化简. 被开方数中的分母移到根号外还做分母, 并与根式的系数相乘除, 能约分的要约分. 特别注意最简根式的系数为 1 时, 系数相加减时不要把它忘掉了.

思考 ① 题中的结果 $\frac{11}{3}\sqrt{6} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ 还能合并吗? 为什么?

$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ 是不是最简二次根式, 是否还能合并?

例 2 下列各式中, 哪些是同类二次根式?

(1) $\sqrt{75}, \sqrt{\frac{1}{27}}, \sqrt{2}, \sqrt{12}, \sqrt{\frac{1}{50}}, \sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{10}}$.

(2) $5\sqrt{a^3b^3c}, \sqrt{a^3b^2c^3}, \sqrt{\frac{ab}{c^4}}, a\sqrt{\frac{a}{bc}}$.

分析 第一小题的被开方数是数, 第二小题的被开方数是字母, 多数根式都不是最简二次根式, 因此要先化简.

解 (1) $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$,

$\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{1 \times 3}{27 \times 3}} = \sqrt{\frac{3}{9^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$,

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$,

$\sqrt{\frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{1 \times 2}{50 \times 2}} = \sqrt{\frac{2}{10^2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$,

$\sqrt{\frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{1 \times 10}{10 \times 10}} = \sqrt{\frac{10}{10^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore \sqrt{75}, \sqrt{\frac{1}{27}}, \sqrt{12}, \sqrt{3}$ 是同类根式.

$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{50}}$ 是同类二次根式.

(2) $\because 5\sqrt{a^3b^3c} = 5ab\sqrt{abc}$,

$\sqrt{a^3b^2c^3} = abc\sqrt{ac}$,

$\sqrt{\frac{ab}{c^4}} = \frac{1}{c^2}\sqrt{ab}$,

$a\sqrt{\frac{a}{bc}} = \frac{a}{bc}\sqrt{abc}$

$\therefore 5\sqrt{a^3b^3c}$ 与 $a\sqrt{\frac{a}{bc}}$ 是同类二次根式,

$\sqrt{a^3b^2c^3}$ 与 $\sqrt{\frac{ab}{c^4}}$ 不是同类根式.

说明 只要把各根式化成最简根式后, 它们的被开方数相同了, 不论有几个, 它们都属同类根式. 要说明同类根式, 最少有 2 个根式.

思考 为什么 $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式, 而 $b\sqrt{a}$ 和 $a\sqrt{b}$ 就不是同类二次根式?

例 3 比较 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ 与 $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ 的大小.

分析 比较两个数的大小常用的方法有: 求差法, 求商法. 求差法为: $a - b > 0$, 则 $a > b$; $a - b < 0$, 则 $a < b$; $a - b = 0$, 则 $a = b$.

本题适合用求差法比较大小.

解 $\because (\sqrt{7} - \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{5})$
 $= \sqrt{7} - \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{5} = \sqrt{7} - 2\sqrt{6} + \sqrt{5}$

又 $\because (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 = 12 + 2\sqrt{35}$

$$(2\sqrt{6})^2 = 24$$

$$\text{而 } \sqrt{35} < 6, \therefore 2\sqrt{35} < 12,$$

$$\therefore \sqrt{7} + \sqrt{5} < 2\sqrt{6},$$

$$\therefore (\sqrt{7} - \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{5}) < 0, \text{即 } \sqrt{7} - \sqrt{6} < \sqrt{6} - \sqrt{5}.$$

说明 比较两个根式的大小方法很多,这里仅用了一种方法,本题不仅用了求差法,还用了平方法,有时要用倒数法,有时可以把根号外的因式移到根号内,用比较被开方数大小的方法比较两式大小,这要根据不同情况灵活选择方法.

思考 本题若不用求差法,你能用其他方法比较吗?如倒数法,不妨一试.

二、关于二次根式混合运算的问题

例 4 计算 $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$.

分析 二次根式的除法化简就是要去掉分母中含有根号的式子,故把分母中含有根号的式子乘以一个合适的数,使积不再含有根号.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - [(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2] \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} - (18-12) \\ &= 2+\sqrt{3}-6 = -4+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

说明 当分母中含有根号时,要首先求出这个分母的有理化因式,然后分子分母同乘以这个有理化因式.本题后边的两式相乘,正适合平方差公式.

思考 两个含有根式的代数式相乘,能用乘法公式的时候用公式会特别简便,不适合乘法公式的用多项式乘以多项式的法则去解题.

例 5 当 $m = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ 时,求代数式 $m + \frac{1}{m}$ 的值.

分析 解答这类问题,可将已知条件化简,或者将求得的结果化简,有时要把条件和结果都化简.

$$\begin{aligned} \text{解 } \because m &= \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2, \\ \therefore m + \frac{1}{m} &= \sqrt{5}+2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}+2 + \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \sqrt{5}+2 + \sqrt{5}-2 = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

说明 本题也可直接代入求值.

思考 二次根式求值问题,一般要先化简,化简时常用倒数关系.如: $\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$, $3+2\sqrt{2}$ 和 $3-2\sqrt{2}$, 即 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ 与 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

也会用完全平方公式 $(a \pm \sqrt{b})^2 = a^2 + b \pm 2a\sqrt{b}$.

$$\text{如: } (4+\sqrt{5})^2 = 16+5+8\sqrt{5} = 21+8\sqrt{5}.$$

例 6 已知 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \sqrt{y}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})$,

求 $\frac{2x+y+\sqrt{xy}}{x-\sqrt{2xy}+\sqrt{xy}}$.

分析 可利用条件求 x 与 y 之间的关系,然后代入代数式求值,由于二次根式的运算较整式运算复杂,因此可考虑用换元法替换式子中的 \sqrt{x} 与 \sqrt{y} .

解 设 $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$ 则 $a(a+b) = b(a+2b)$,

$$\therefore a^2 = 2b^2.$$

$$\therefore a \geq 0, b \geq 0, \therefore a = \sqrt{2}b.$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{2a^2 + b^2 + ab}{a^2 - \sqrt{2}ab + ab} \\ &= \frac{4b^2 + b^2 + \sqrt{2}b^2}{2b^2 - 2b^2 + \sqrt{2}b^2} \\ &= \frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}+2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{2}+1. \end{aligned}$$

说明 针对题目的特征,适当的时候用换元法可把二次根式的运算转化成整式运算,从而降低题目的难度.

思考 二次根式的化简、计算、求值题种类繁多.有些题目偏难,解答前应分析题目特点灵活选用方法.如换元法,求倒数法,分子有理化等.

学习 笔记

1. 二次根式加减运算的难度大于二次根式的乘除运算,能正确进行二次根式加减运算的关键是正确化简二次根式.

2. 同类二次根式是对一组二次根式来讲的,判别同类根式,首先把所给根式都化成最简二次根式,然后再判断其被开方数是否相同.

3. 二次根式的混合运算中,会用到有理式的运算律,多项式的乘法法则以及乘法公式,注意将运算最终结果化为最简二次根式.

4. 进行二次根式的混合运算,能有效地提高学生的综合运算能力,特别是在运算时出现了错误要找到其原因,接受教训,提高运算质量.

5. 二次根式的化简运算是学好其他数学知识的有力工具,一定要边训练边总结规律,使自己具备过硬的运算能力.

练 胆胸横溢,方显英雄本色.

A 课堂巩固

一、判断题

1. $\sqrt{75}, \sqrt{\frac{1}{27}}, \sqrt{3}$ 是同类二次根式. ()

2. $5+5\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$. ()

3. $6\sqrt{5}-5\sqrt{6} < 0$. ()

4. $\sqrt{2} \div (\sqrt{2}+\sqrt{6}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. ()

5. $5-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$. ()

6. $\sqrt{x+y}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x-y}$. ()

二、选择题

1. 化简 $\frac{b-a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ($a \neq b$) 等于 ()



- A. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
 B. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
 C. $-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
 D. $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$

2. 最简二次根式 $\frac{3}{4}\sqrt{4a^2+1}$ 与 $2\sqrt{6a^2-1}$ 是同类根式,

则 a 的值是 ()

- A. 1 B. 0 C. -1 D. 1 或 -1

3. 如果 $a=\frac{4}{\sqrt{5}-1}, b=\sqrt{5}+1$, 那么 ()

- A. a, b 互为相反数
 B. a, b 互为倒数
 C. a, b 相等
 D. a, b 互为负倒数

4. 下面四组二次根式: ① $\sqrt{3x^3}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{9x}}$,

② $\sqrt{\frac{2a}{3}}$ 和 $\sqrt{\frac{24}{a}}$,

③ $\sqrt{0.2x}$ 和 $\sqrt{0.24x}$,

④ $\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ 和 $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$ ($m>n>0$),

其中是同类二次根式的是 ()

- A. ①②③ B. ②③④
 C. ②④ D. ①②③④

三、填空题

1. $\sqrt{0.0012}-\frac{1}{5}\sqrt{0.27}+\frac{1}{25}\sqrt{3}=\underline{\hspace{2cm}}$.

2. $2\sqrt{49x}-3\sqrt{x^2y}-3\sqrt{25x}=\underline{\hspace{2cm}}$.

3. $(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}})(\frac{1}{4}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}})=\underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\sqrt{9-6\pi+\pi^2}=\underline{\hspace{2cm}}$.



课后拓展

一、选择题

1. (开放题) 如果最简根式 $b-a\sqrt{3b}$ 和 $\sqrt{3b-a+2}$ 是同类二次根式, 那么 a, b 的值是 ()

- A. $a=0, b=2$ B. $a=2, b=0$
 C. $a=-1, b=1$ D. $a=1, b=-2$

2. (应用题) 某商品原价为 100 元, 现有四种调价方案, 其中 $0<n<m<100$, 则调价后, 该商品价格最高的方案是 ()

- A. 先涨价 $m\%$, 后降价 $n\%$
 B. 先涨价 $n\%$, 后降价 $m\%$
 C. 先涨价 $\frac{m+n}{2}\%$, 后降价 $\frac{m+n}{2}\%$
 D. 先涨价 $\sqrt{mn}\%$, 后降价 $\sqrt{mn}\%$

二、解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=1, \\ \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=2. \end{cases}$$

三、探究题

已知 $x=\frac{1+\sqrt{1995}}{2}$,

求多项式 $(4x^3-1997x-1994)^{2006}$ 的值.

四、创新题

观察下列各式 $\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}},$

$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$. 请你将猜想到的规律, 用含自然数 $n(n\geq 1)$

的代数式表示出来 _____.



考题演练

一、选择题

1. (2005·新疆) $\sqrt{18}-|-\sqrt{2}|$ 的结果是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

2. (2005·广州) 用计算器计算 $\frac{\sqrt{2^2-1}}{2}, \frac{\sqrt{3^2-1}}{3-1},$

$\frac{\sqrt{4^2-1}}{4-1}, \frac{\sqrt{5^2-1}}{5-1}, \dots$, 根据你发现的规律, 判断 $P=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n-1}$

与 $Q=\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{(n+1)-1}$ (n 为大于 1 的整数) 的值的大小关系为 ()

- A. $P<Q$
 B. $P=Q$
 C. $P>Q$
 D. 与 n 的取值有关

二、计算题

1. (2005·四川) $\sqrt{8}-|-2\sqrt{2}|+\sqrt{3}\cdot \tan 60^\circ$

2. (2005·苏州) $\sqrt{18}-\frac{1}{2}\div 2^{-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-(\sqrt{2}-1)^0$

三、化简求值

1. (2005·宿迁) $\frac{1}{x+2}-\frac{x^2+2x+1}{x+2}\div\frac{x^2-1}{x-1}$, 其中 $x=\sqrt{2}-2$.

2. (2005 · 岳阳) $\frac{x-y}{x+2y} \div \frac{x^2-y^2}{x^2+4xy+4y^2} - 2$, 其中 $x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}$.

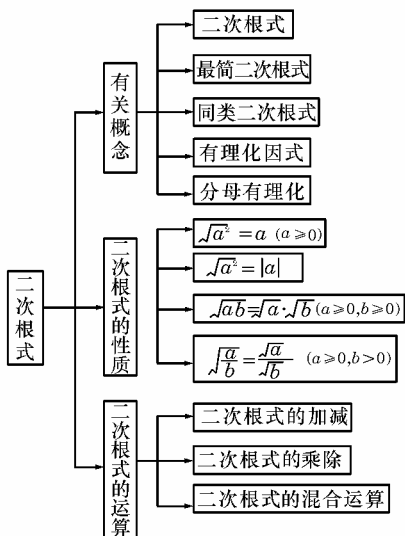
四、解答题

(2005 · 常德) 同学们玩过“24”点游戏吗? 现给你一个无理数 $\sqrt{2}$, 你再找 3 个有理数, 使它们经过 3 次运算后得到的结果为 24, 请你写出一个符合要求的等式.

本章复习与总结



本章知识网络



本章知识专项突破

一、本章二次根式的有关概念较少, 只有以下 4 个

1. 二次根式: 式子 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 叫做二次根式, 其中“ $\sqrt{\quad}$ ”叫做二次根号, a 叫做被开方数, 当 $a < 0$ 时, 式子 \sqrt{a} 无意义, 被开方数 a 可以是单项式也可以是多项式; 二次根式 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 永远是非负数.

2. 最简二次根式: 满足下列两个条件的二次根式, 叫做最简二次根式.

① 被开方数的因数是整数, 因式是整式, 即被开方数不

含分母;

② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式, 即被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2.

3. 同类二次根式: 几个二次根式化成最简根式后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式叫做同类二次根式.

4. 分母有理化: 把分母中的根号化去 (即用分母的有理化因式去乘分子与分母), 叫做分母有理化.

二、二次根式的性质理解及运用

1. 注意: 公式 $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ 与公式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 的异同点.

不同点: ① 字母的取值范围不同;

② 运算顺序不同;

③ 运算结果的表现形式不同.

相同点: ① 运算结果都是一个非负数;

② 都起到化简二次根式的作用.

2. 二次根式性质的逆用:

① 逆用性质 $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ 可把任何一个非负数写成平方的形式, 如: $5 = (\sqrt{5})^2, 0.2 = (\sqrt{0.2})^2$ 等, 这对于在实数范围内分解因式是十分有用的. 如: 分解因式 $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

② 逆用性质 $\sqrt{a^2} = |a|$, 可将根号外的正的因式平方后移到根号内, 如: 当 $a > 0$ 时, 有 $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$; 当 $a < 0$ 时, 则有 $a\sqrt{b} = -|a|\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

③ 逆用性质 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0)$ 和 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a \geq 0, b > 0)$, 就得到二次根式的乘、除运算公式.

三、比较两个根式的大小

一个根式值的大小并不像有理数那样直观, 因此在比较两个根式的大小时, 常常要作适当的变形, 变成容易比较的形式, 以下举例说明:

(1) 把根号外的因数移到根号内:

例 1 比较 $5\sqrt{6}$ 与 $6\sqrt{5}$ 的大小.

解 $5\sqrt{6} = \sqrt{150}, 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$,

$\therefore \sqrt{150} < \sqrt{180}$,

$\therefore 5\sqrt{6} < 6\sqrt{5}$.

(2) 平方法: 两个正数的大小是和它们的平方数的大小对应的, 先把两个根式平方后去掉根号, 比较两个有理数的大小, 从而达到比较两个根式大小的目的, 平方法还可以用来判断更复杂的根式大小.

例 2 比较 $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ 和 $\sqrt{4} + \sqrt{7}$ 的大小.

解 $(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 = 11 + 2\sqrt{30}$,

$(\sqrt{4} + \sqrt{7})^2 = 11 + 2\sqrt{28}$,

$\therefore \sqrt{28} < \sqrt{30}$,

$\therefore (\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 > (\sqrt{4} + \sqrt{7})^2$,

即 $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{4} + \sqrt{7}$.

(3) 作商法: 对于两个正数 a, b , 若 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$.

例 3 比较 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6} - 2$ 的大小.

解 $\therefore \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$,



$$\therefore \sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{6}-2.$$

(4)放大或缩小:这是技巧性较强的方法,但有时十分有效,要证明 $a<b$,可先把 a 略微放大成 c ,若 $c<b$,当然 $a<b$,要注意不要放大的太大.

例4 试证明: $2\sqrt{\pi}-\sqrt{2}>\sqrt{3}$

证明: $\because \sqrt{\pi}>\sqrt{3}, \sqrt{2}<\sqrt{3}$

$$\therefore 2\sqrt{\pi}-\sqrt{2}>2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

除以上方法外,还有直接计算求值法、作差法,当所给的根式是分式时,还可以把它们化成同分母或同分子的分式再比较,在此过程中,还可以用到有理化的方法.

四、二次根式运算中的常见错误

二次根式的运算法则难掌握,作业量大,因此,在运算中发生错误较多.

(1)误认为 $\sqrt{a^2 \pm b^2} = \sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2}$.

例5 化简 $\sqrt{\frac{9}{95}-\frac{1}{4}}$.

$$\begin{aligned} \text{错解 原式} &= \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

例6 计算 $\sqrt{10^2+24^2}$.

$$\text{错解 原式} = \sqrt{10^2} + \sqrt{24^2} = 10 + 24 = 34.$$

分析 当被开方数是两个数的和或差时,应直接计算或先分解成积的形式,然后再把括号内可移出的因式转移到根号外,上述解法,错用了不成立的式子 $\sqrt{a^2 \pm b^2} = \sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2}$.

(2)误认为 $x\sqrt{\frac{x}{y}} = xy, x\sqrt{y+z} = (x+z)\sqrt{y}$ 及 $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{x+y}$.

例7 计算: $2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{27}}-[-(-3\sqrt{16})+\sqrt{54}]$.

$$\begin{aligned} \text{错解 原式} &= 2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{27}}+3\sqrt{16}+\sqrt{54} \\ &= 4\sqrt{3}-4\sqrt{\frac{3}{27 \times 3}}+3\sqrt{4^2}+\sqrt{3^2 \times 6} \\ &= 4\sqrt{3}-36\sqrt{3}+12+3\sqrt{6} \\ &= -32\sqrt{3}+12+3\sqrt{6} \\ &= -20\sqrt{3}+3\sqrt{6} \\ &= -17\sqrt{9} \\ &= -51. \end{aligned}$$

分析 根号内的分母开方后移到根号外面时仍然作分母,所以 $4\sqrt{\frac{1}{27}} = 4\sqrt{\frac{3}{81}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$,故 $4\sqrt{\frac{1}{27}} = 36\sqrt{3}$ 是错误的.另外,二次根式的加减运算中,只有同类根式才能合并,由于 $-32\sqrt{3}$ 与 12 , $-20\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{6}$ 不是同类二次根式,所以它们不能合并.

(3)忽视题目中的隐含条件.

例8 计算: $a\sqrt{-\frac{1}{a}} - \sqrt{-a^3}$.

$$\begin{aligned} \text{错解 原式} &= a\sqrt{-\frac{a}{a^2}} - \sqrt{a^2(-a)} = \sqrt{-a} - a\sqrt{-a} \\ &= (1-a)\sqrt{-a} \end{aligned}$$

分析 题中要使根式有意义,必须 $a<0$,因此把 a^2 从根号内开出来时应得 $-a$,而不是 a .



中考命题研究预测

一、中考信息

从近几年全国各省市的中考试题来看,本章内容在中考中重点考查最简二次根式、同类二次根式的概念,以及二次根式的化简、计算、求值等.每份试题中都有二次根式的内容,考查的题型多以填空题、选择题、计算题为主;也有一些题目是在函数中、几何图形中应用二次根式的知识.

中考命题趋势:主要考查应用二次根式的意识,检查运用二次根式的知识,解决实际问题的运用能力.2006年中考命题更强调联系实际,注重应用能力考查,一是通过设置新情景对常见类型应用问题的考查,增强对分析问题、解决问题能力的考查力度;二是结合社会上一些热点或考生所熟悉的生活设置问题的情景,编拟新题,使试题密切贴近生活,突出时代感;三是应用题中设计有一定探究性、开放性的问题,在考查应用能力的同时考查探索创造能力.

二、考题研究

1. 基本考题

例1 (2004·辽宁)下列各式中最简二次根式是()

$$A. \sqrt{\frac{x}{3}} \quad B. \sqrt{8x} \quad C. \sqrt{6x^3} \quad D. \sqrt{x^2+1}$$

分析 本题考查了最简二次根式的意义,最简二次根式必须满足两个条件:①被开方数的因数是整数、同时是整式;②被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.故选 D.

解 选 D.

例2 (2004·福州厦门)下列计算正确的是()

$$\begin{aligned} A. \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{6} \\ B. \sqrt{2} + \sqrt{3} &= \sqrt{6} \\ C. \sqrt{8} &= 3\sqrt{2} \\ D. \sqrt{4} \div \sqrt{2} &= 2 \end{aligned}$$

分析 本题考查了根式的化简运算性质,二次根式的乘除是被开方数相乘除,根指数不变.所以 A 正确, D 错误.二次根式的加法必须是同类根式才能合并,即 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类根式,当然不能合并, $\sqrt{8}$ 的化简应是 $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \neq 3\sqrt{2}$, 故选 A.

解 选 A.

例3 (2002·苏州)若等式 $\sqrt{6x^2-13x+6} = \sqrt{3x-2} \times \sqrt{2x-3}$ 成立,则 x 必须满足()

$$\begin{aligned} A. x &\geq \frac{2}{3} \\ B. x &\geq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \leq \frac{2}{3} \\ C. x &\geq \frac{3}{2} \\ D. \frac{2}{3} &\leq x \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

解 选 C.

分析 由 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 必须满足 $a \geq 0, b \geq 0$ 才能成立,因此 $3x-2 \geq 0$, 且 $2x-3 \geq 0$. 故选 C.