恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

全国重点中学一线骨干教师编写
丛书主编　方　可

高中数学

必修1

与人教实验版B版配套

北京出版社出版集团　北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

新课标

与人教B版配套

丛书主编　方　可

本册主编　董玉琦　刘大为　赵焕强

撰 稿 人　李　森　何根达　于发智

唐学宁　康　立　詹　波

高中数学(必修1)

北京出版社出版集团

北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

图书在版编目(CIP)数据

超级学练考．高中数学．1：必修：人教B版 / 方可主编；
—3版．—北京：北京教育出版社，　2006
ISBN　7-5303-3333-X

Ⅰ.超…　Ⅱ.方…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第066958号

超级学练考
新课标
高中数学(必修1)
与人教实验版B版配套
丛书主编　方　可
*
北京出版社出版集团
北京教育出版社　出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码：100011
网　址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
西安天成印务有限公司印刷
*
880×1230　16开本　10.75印张　326 000字
2006年6月第3版　　2006年6月第1次印刷

ISBN 7-5303-3333-X
G·3259　定价：14.50元
(质量投诉电话：029-82027917　010-58572245　010-58572393)

主编寄语

授人以鱼，还是授人以渔

以网络为载体的e时代，向中学教育提出了许多问题：1.什么样的教育理念最好？2.怎样及时应对教材多样化、考卷多元化的局面？3.老师怎样教，学生怎样学，才最有效果？……我们策划《超级学练考》的初衷，就是为了解决师生目前遇到的以上困惑——让广大学生在较短的时间内学得多，记得牢，练得精。

《超级学练考》丛书作为同步类新型教辅，主要为进课堂编写（也可作为学生自读类用书），其突出特点在于：

一、渗透先进的教育理念，体现教师的主导作用和学生的主体地位，立足以学生发展为中心，注重学生学习方式及思维能力的培养。

二、“学”、“练”、“考”有机结合、环环相扣：“学”以节（课）为单位，归纳、细梳所要学习的核心内容；“练”按梯度分组设题，逐级提升学生的解题能力；“考”设置多种类型试卷，全方位挖掘和诠释考点，目的在于让学生“考”后而知不足。

三、“疑难点解析”、“典例归类”、“学习笔记”等栏目设计新颖、科学、实用，有如名师从旁指导，求知更加轻松。

四、题解分离，便于思考；详解单订，便于验证。

五、书网互动，增值无限。师生在使用本丛书时，可锁定**www.hengqian.com**进行信息查询、资源下载、在线辅导等，作为本书读者免费享受这些增值服务。

相信这样的一套好书，定会给您的艰辛求学带来意想不到的实惠和无穷的轻松；实现我们既授人以鱼，更授人以渔的愿景！

丛书主编　方 可

目 录

第1章 集 合

第2章 函 数

Contents

第3章　基本初等函数(Ⅰ)

(全书参考答案活页装订,随书赠送)

第1章 集合

1.1 集合与集合的表示方法

学 总结、模仿、创新，这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 集合中的元素有哪些特性？

提示　集合中的元素有确定性、互异性、无序性.

(1)确定性：作为集合的元素，必须是确定的，要么是这个集合的元素，要么不是这个集合的元素.

(2)互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是不同的，任何两个相同的对象在同一集合中时，只能算作这个集合中的一个元素.

(3)无序性：集合中的元素与顺序无关.

2. 什么叫两个集合相等？

提示　构成两个集合的元素是完全一样的，如 $A=\{1,2\}$ 和 $B=\{2,1\}$ 就是两个相等的集合.

3. 元素与集合的关系是什么？元素与集合的关系是用什么符号表示的？

提示　元素与集合的关系是属于和不属于的关系. 元素与集合的关系是用 $\in$ 与 $\notin$ 来表示的，如 $2\in\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{N}$. 一个元素 x 是否属于某个集合 A，就要看这个元素 x 是不是具有这个集合 A 的元素的共有性质，若 x 具有这个集合 A 的元素的共性，x 是这个集合的元素，记为 $x\in A$，若 x 不具有这个集合 A 的共有性质，x 就不是这个集合的元素，记为 $x\notin A$.

4. 用什么样的字母表示元素，用什么样的字母表示集合？

提示　一般用大写拉丁字母来表示集合，如 $A,B,C\cdots$ 用小写的拉丁字母表示元素，如 $a,b,c\cdots$

5. 集合有哪几种表示方法？

提示　(1)自然语言法. 用文字叙述的形式来描述集合的方法就是自然语言法. 如"北京大学 2006 年入学的全体学生组成的集合". 注意要叙述清楚.

(2)列举法. 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号"$\{\}$"内，元素与元素之间用"，"隔开.

(3)描述法. 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法. 一般形式是 $\{x\in I\mid P(x)\}$，其中"x"表示集合中的元素的代表形式，如点或数等，"I"表示 x 的范围，"$P(x)$"表示"x"具有的共同特征. 如"直线 $y=x$ 上的所有点组成的集合"用描述法可以这样表示 $\{(x,y)\mid y=x\}$.

(4)Venn 图表示法. 数学上用在平面上封闭曲线内部表示集合，这个图就是 Venn 图，这种表示方法比较形象直观. 如"小于 5 的自然数"可以用图 1－1－1 表示：

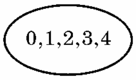

图 1－1－1

6. 什么是有限集与无限集？

提示　当集合中的元素个数是有限个时，称这个集合是有限集；当集合中的元素个数是无限个时，这个集合就是无限集. 如自然数集就是无限集，集合 $\{1,2,3\}$ 就是有限集. 如果集合只有一个元素，我们又称这个集合为单元素集，如 $\{a\}$.

疑难点解析

1. 本节的重点是集合的概念及其表示方法，难点是恰当地表示集合及正确运用符号语言表示元素与集合之间的关系. 要理解好描述法中代表元素的意义，是点还是数还是其他的事物.

2. 符号 $\in$、$\notin$ 只能用来表示元素与集合之间的从属关系，如 $0\in\mathbf{N}$，$0\notin\mathbf{N}^*$，除此之外无其他用途.

3. a 与 $\{a\}$ 不同，a 表示一个元素，$\{a\}$ 表示一个集合. 一般地，$\{a\}$ 表示由一个元素组成的集合，叫单元素集.

4. 注意集合中元素实质是什么，也就是看代表元素，如集合 $A=\{x\mid y=x^2\}$ 与集合 $B=\{(x,y)\mid y=x^2\}$ 是两个完全不同的集合. A 表示的是二次函数 $y=x^2$ 中变量 x 的所有取值，是数集；B 表示的是二次函数 $y=x^2$ 上的所有点，是点集. 还要注意点集的正确表示方法，如点 $\{(1,2)\}$ 不能写成 $\{(2,1)\}$，更不能写成 $\{1,2\}$.

典例归类

一、关于集合判定的问题

例　下列所给的对象中，能用集合表示的是(　　).

A. 一切很大的数

B. 无限接近零的数

C. 聪明的人

D. 方程 $x^2=2$ 的实数根

分析　"一切很大的数"、"无限接近零的数"、"聪明的人"标准不明确，所以不能构成集合.

解　选 D.

说明　对于这一类问题的处理方法是看是否具有集合元素的确定性，有无确定的标准，一个对象是不是这个集合的元素完全是确定的.

思考　下列描述对象是否构成集合？

某校高一(4)班视力差的女生全体.

解："视力差"无明确的标准，所以不能构成集合.

二、关于集合中元素的互异性的应用问题

例　已知 $x^2\in\{1,0,x\}$，求 x 的值.

分析　由元素的确定性知 $x^2=0,1$ 或 x，由互异性知 $x\neq 1,0$.

解　若 $x^2=0$，则 $x=0$，此时集合为 $\{1,0,0\}$，不符合集合的互异性，舍去.

若 $x^2=1$，则 $x=\pm1$. 当 $x=1$ 时，集合为 $\{1,0,1\}$，舍去；$x=-1$ 时，集合为 $\{1,0,-1\}$，符合.

若 $x^2=x$，则 $x=0$ 或 $x=1$，集合为 $\{1,0,0\}$ 或 $\{1,0,1\}$，$x=0,x=1$ 都舍去.

综上所述，$x=-1$.

说明　这是应用元素的确定性与互异性来解题的. 这类题既要用元素的确定性，又要利用互异性检验答案的正确与否. 学生在解题时最易忽视元素的互异性，必须在学习中高度重视.

思考　若 $x\in\mathbf{N}$，则 $\{5,x,x^2-4x\}$ 中的元素 x 必须满足什么条件？

解：必须满足 $\begin{cases}x\neq 5\\ x^2-4x\neq 5\\ x^2-4x\neq x\end{cases}$，故 $x\neq 5$ 且 $x\neq 0$. 所以 $x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\neq 5$.

三、关于元素与集合的关系的问题

例　设集合 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$. 若 $a\in A$，$b\in B$，试判断 $a+b$ 与 A、B 的关系.

分析　因为 A 是偶数集，B 是奇数集，所以 a 是偶数，b 是奇数，从而 $a+b$ 是奇数.

解　$\because a\in A$，$\therefore a=2k_1(k_1\in\mathbf{Z})$.

$\because b\in B$，$\therefore b=2k_2+1(k_2\in\mathbf{Z})$，

$\therefore a+b=2(k_1+k_2)+1$.

又 $\because k_1+k_2\in\mathbf{Z}$，

$\therefore a+b\in B$，

从而 $a+b\notin A$.

说明　判断一个元素是不是某个集合的元素，就是判断这个对象是不是具有这个集合的元素具有的属性特征. 反之，如果一个元素是某个集合的元素，这个元素也一定具有这个集合的元素的共有属性特征.

思考　已知集合 $A=\{x\mid x=a+\sqrt{2}b,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$. 设 $x_1\in A$，$x_2\in A$，求证：$x_1x_2\in A$.

四、关于集合的几种表示方法之间的转换问题

例 1　用列举法表示下列集合：(1)不大于 10 的非负偶数集；(2)自然数中不大于 10 的质数集；(3)方程 $x^2-4=0$ 的解集；(4)方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解集；(5)方程组 $\begin{cases}x+y=3\\ x-y=1\end{cases}$ 的解集.

分析　用列举法表示这些由自然语言描述的集合时，要将自然语言描述的集合中的元素一一找出来，然后写在大括号内.

解　(1) $\{0,2,4,6,8,10\}$；(2) $\{2,3,5,7\}$；(3) $\{-2,2\}$；(4) $\{1,2\}$；(5) $\{(2,1)\}$.

说明　写出的集合要符合元素的互异性，相同的元素只能写一个，比如方程的等根只写一个，方程组的解要写成点集的形式. 列举法最适合元素个数较少的集合；列举法不考虑元素的顺序，但不能重复也不能漏写.

思考　能用列举法表示无规律的无穷集合吗？

例 2　用描述法表示下列集合.

(1) $\{2,4,6,8,10\}$；

(2) $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$；

(3) $\{2,3,4\}$；

(4)平面上以 O 为圆心，r 为半径的圆.

分析　用描述法表示集合时要把集合中元素的共有特征性质描述出来，形式是 $\{x\in I\mid P(x)\}$. 要从元素的具体性质入手，用恰当的数学式子表示出来.

解　(1) $\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*,n<6\}$；

(2) $\left\{x\mid x=\frac{n}{n+2},n\in\mathbf{N}^*,n<6\right\}$；

(3) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}\}$；

(4) $\{$点 $P\mid |PO|=r\}$.

说明　用描述法表示集合时，要弄清元素的特征性质，所有符合性质的元素都在这个集合中，不属于这个性质的元素一定不在这个集合中.

思考　上述集合能用列举法表示吗？

例 3　用 Venn 图表示集合 $\{x\mid -1<x\leqslant 2,x\in\mathbf{N}\}$.

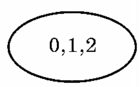

图 1-1-2

分析　写出集合中的元素，用一条封闭的曲线的内部表示集合即可.

解　如图 1-1-2 所示.

说明　这类题一般在解题过程中出现，Venn 图以直观形象的特点作为一种解题的辅助工具，一般的集合的表示方法不用 Venn 图法.

五、关于给定集合的性质求参数的综合问题

例　已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中的元素最多只有一个，求 a 的取值范围.

分析　讨论方程实数解的情况，从而确定 a 的取值范围，依题意，方程只有一个实数根或有两个相等的实数根或无实数根.

解　当 $a=0$ 时，原方程为 $-3x+2=0$，$x=\frac{2}{3}$，符合题意.

当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax^2-3x+2=0$ 为一元二次方程，$\Delta=9-8a\leqslant 0$，$a\geqslant\frac{9}{8}$.

当 $a\geqslant\frac{9}{8}$ 时，方程有两个相等的实数根或无实根，满足条件.

综上所述，a 的取值范围为 $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

说明　集合中元素就是方程的解，因此将求字母的范围转化为研究方程的解的问题，这里要注意方程不一定是二次方程，要讨论二次项系数.

思考　若上述集合中有两个元素时，结果又怎么样呢？若方程改为 $x^2-3ax+2=0$ 呢，其他条件不变，集合最多有一个元素，a 如何取值？

六、探究应用

例　设集合 $B=\{x\in\mathbf{N}|\frac{6}{2+x}\in\mathbf{N}\}$.

(1)试判断元素 1、元素 2 与集合 B 的关系；

(2)用列举法表示集合 B.

分析　由已知，只需将 $x=1$，$x=2$ 分别代入 $\frac{6}{2+x}$，看它的值是否符合条件.

解　(1)当 $x=1$ 时，$\frac{6}{2+x}=2\in\mathbf{N}$，$\therefore 1\in B$；当 $x=2$ 时，$\frac{6}{2+x}=\frac{3}{2}\notin\mathbf{N}$，$\therefore 2\notin B$.

(2)$\because \frac{6}{2+x}\in\mathbf{N}$，$x\in\mathbf{N}$，$\therefore 2+x$ 只能取 1，2，3，6，$\therefore x$ 只能取 0，1，4，则 $B=\{0,1,4\}$.

说明　本题是利用条件探究元素的问题，要利用条件进行推理，学会思考与探究.

学习笔记

1. 研究集合要先看集合中的元素是什么，才能进行下一步，就是先看代表元素的实质，通常有数集、点集、图形集等.

2. 求参数后一定要检验是否满足集合元素的互异性，可以根据互异性来确定参数的取值.

3. 对于集合表示法中，Venn 图法只是用来辅助理解，将来用于解集合运算的问题时可能起到简化作用.

4. 注意数学语言中的相互转换，符号语言与文字语言以及图形语言都是在数学中经常用到的数学语言.

练

担海横流，方显英雄本色。

A 课堂巩固

一、选择题

1. 给出下列表述：①联合国常任理事国；②充分接近$\sqrt{2}$的实数的全体；③方程 $x^2+x-1=0$ 的实数根；④全国著名的高等院校. 以上能够构成集合的是(　　).

A. ①③　　B. ①②

C. ①③④　　D. ①②③④

2. 下列集合中表示同一集合的是(　　).

A. $M=\{(3,2)\}$，$N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{3,2\}$，$N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\}$，$N=\{y|x+y=1\}$

D. $M=\{1,2\}$，$N=\{(1,2)\}$

3. 方程组 $\begin{cases}x-2y=3\\2x+y=1\end{cases}$ 的解集是(　　).

A. $(1,-1)$　　B. $\{(1,-1)\}$

C. $\{(-1,1)\}$　　D. $\{1,-1\}$

4. 由实数 a^2，$2-a$，4 组成一个集合 A，A 中含有 3 个元素，则实数 a 的值可以是(　　).

A. 1　　B. -2　　C. 6　　D. 2

5. 集合 $M=\left\{y\in\mathbf{Z}|y=\frac{8}{x+3},x\in\mathbf{Z}\right\}$ 中元素个数为(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

二、填空题

6. 方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集中有______个元素.

7. 设 $\frac{1}{2}\in\{x|x^2-ax-\frac{5}{2}=0\}$，则 $a=$________.

三、解答题

8. 已知集合 $A=\{x|x^2+px+q=x\}$，集合 $B=\{x|(x-1)^2+p(x-1)+q=x+3\}$. 当 $A=\{2\}$时，求集合 B.

9. 若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2-4\}$，求实数 a 的取值范围.

B 课后拓展

一、选择题

1. 集合$\{x-1,x^2+1,2\}$中，x 不能取的值是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 集合 $M=\{(x,y)|xy<0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$是(　　).

A. 第一象限内的点

B. 第三象限内的点

C. 第四象限内的点

D. 第二、四象限内的点

3. 方程组 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=9\end{cases}$ 的解集是(　　).

A. $(5,4)$　　B. $\{5,4\}$

C. $\{(-5,4)\}$　　D. $\{(5,-4)\}$

4. 若以方程 $x^2-5x+6=0$ 和方程 $x^2-x-2=0$ 的解为元素的集合为 P，则 P 中元素的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

5. 对于集合 $A=\{2,4,6\}$，若 $a\in A$，且$(6-a)\in A$，那么 a 的值是________.

6. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x^2-1|x\in A\}$，集合 B 用列举法表示为________.

7. 用符号$\in$或$\notin$填空.

①π ________ **Q**；②3.14 ________ **Q**；③$x^2+1=0$ 的根 ________ **R**；④$\frac{1}{\pi}$ ________ **R**.

8. (2004 年潍坊市模拟题)实数集$\{2a,a^2-a\}$中，a 的取值范围是________.

三、解答题

9. 若集合 $A=\{x|x^2+(a-1)x+b=0,x\in \mathbf{R}\}$中仅有一个元素 a，求 a,b 的值.

考题演练

1. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in \mathbf{R}\}$.
   (1)若 A 中只有一个元素时，求 a 的值；
   (2)若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

2. 有下列三个集合：
   ①$\{x|y=x^2-2\}$；②$\{y|y=x^2-2\}$；③$\{(x,y)|y=x^2-2\}$.
   (1)它们是不是相同的集合？
   (2)试用文字语言叙述它们.

1.2 集合之间的关系与运算

1.2.1 集合之间的关系

学

总结、模仿、创新，这是内化知识、创新运用的基础.

预习探路

1. 两个集合 A、B 什么时候具有包含关系？具有什么样的关系时，我们说一个集合是另一个集合的子集？

提示　对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 的元素，我们说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A.

2. 什么样的图形是 Venn 图？它有什么作用？

提示　在数学中，经常用平面上封闭曲线的内部来代表集合，这样的图称 Venn 图. 用 Venn 图可以表示集合及集合之间的关系，形象直观，简便易懂. 如 A 是 B 的子集就可以用它表示.

3. 如何从集合的包含关系中理解相等的集合？用数学符号来解释两个集合相等.

提示　两个集合 A、B，如果 A 是 B 的子集，同时 B 也是 A 的子集，这时两个集合的元素相同，就是说 A、B 是相等的，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

4. 如何理解集合 A 是集合 B 的真子集？

提示　如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

5. 什么是空集？空集有哪些性质？

提示　不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$. 空集是任何集合的子集. 空集是任何非空集合的真子集. 如方程 $x^2+1=0$ 的实数根组成的集合就是空集.

6. 包含关系$\{a\}\subseteq A$ 与属于关系 $a\in A$ 有什么区别？试结合实例作出解释.

提示　包含关系是集合之间的关系，如集合$\{a\}\subseteq\{a,b\}$，而属于关系是元素与集合之间的关系，如元素 $a\in\{a,b\}$.

7. 集合之间的基本关系有哪些结论？

提示　(1)任何一个集合是它本身的子集，$A\subseteq A$.

(2)对于集合 A、B、C. 如果 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，那么 A 也是 C 的子集. 即 $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

(3)空集是任何集合的子集，即$\varnothing\subseteq A$. 空集是任何非空集合的真子集，即$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$.

8. 集合 A 中有 n 个元素，集合 A 的子集有多少个？

提示　含 n 个元素的集合 A 的子集有 2^n 个，A 的非空子集的个数是 2^n-1；A 的真子集的个数为 2^n-1.

疑难点解析

1. 本节的重点是子集、真子集、集合相等的概念. 元素是这几个概念的本质所在，两个集合的关系是由集合的元素决定的. 难点是能够正确写出元素与集合、集合与集合之间的关系. 特别要注意集合中的元素也是集合时的表示方法，如$\{2\}\in\{\{2\},\{1\}\}$.

2. 要区分两类不同关系：属于与不属于关系——表示元素与集合之间的关系，如 $0\in \mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin \mathbf{N}$；包含与真包含或相等关系——表示集合与集合之间的关系，如 $\mathbf{Q}\subseteq \mathbf{R}$.

3. 理解三种语言——文字语言，集合语言，图形语言，以及它们之间的转换. 如真子集的定义：

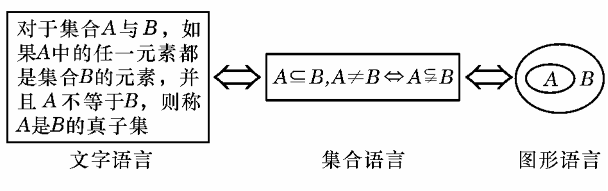

图 1-2-1

4. 元素与集合之间的关系是相对的，集合在特定条件下也可以是集合中的元素.

例　已知 $A=\{0,1\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，求 B.

解　集合 A 的子集有 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$，故 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

5. 注意 $\varnothing$、$\{\varnothing\}$、0、$\{0\}$ 之间的区别，符号 $\in$、$\subseteq$ 之间的区别.

例 1　集合 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 的关系是(　　).

A. $\{0\}\supseteq\varnothing$　　B. $\{0\}\in\varnothing$

C. $\{0\}=\varnothing$　　D. $\{0\}\subseteq\varnothing$

解　选 A.

剖析　$\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合，而 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合，故选 A.

例 2　判断下列说法是否正确，如果不正确，请加以改正.

(1) $\{\varnothing\}$ 是空集；

(2) 空集是任何集合的真子集；

(3) $\{1,2,3\}\neq\{3,2,1\}$；

(4) $\{0,1\}$ 的所有子集是 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$；

(5) 如果 $A\supseteq B$ 且 $A\neq B$，那么 B 必是 A 的真子集；

(6) $A\supseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 不能同时成立.

解　只有⑤是正确的，依据空集、子集、真子集、集合相等的概念，①②③④⑥都是错误的.

(1) $\{\varnothing\}$ 不表示空集，它表示以 $\varnothing$ 为元素的集合，所以 (1) 不正确；(2) 不正确，空集是任何非空集合的真子集；(3) 不正确，$\{1,2,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 表示同一集合；(4) 不正确，$\{0,1\}$ 的所有子集是 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$，$\varnothing$；(5) 正确；(6) 不正确，$A=B$ 时，$A\supseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 能同时成立.

6. 要注意空集在解题中的作用，空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

例　已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则 a 的值为________.

解　填 $0,-1,\frac{1}{3}$.

剖析　$\because A=\{x|x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$，$B\subseteq A$，

$\therefore$ 当 $B=\varnothing$ 时，方程 $ax-1=0$ 无解，所以 $a=0$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，则 $B=\left\{\frac{1}{a}\right\}$，若 $\frac{1}{a}=-1\Rightarrow a=-1$；

若 $\frac{1}{a}=3\Rightarrow a=\frac{1}{3}$.

综上所述，a 的值为 $0,-1,\frac{1}{3}$.

说明　这里当 B 为空集时满足条件不要漏掉了. 当问题不确定时要分类讨论，这是分类讨论思想的重要应用，这种数学思想在今后解题时要学会应用.

典例归类

一、有关子集的个数问题

例　写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.

分析　由子集的定义及空集的意义可以逐个写出.

解　子集有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$；真子集有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$.

说明　这类问题最需要注意的是空集及集合本身易被忽略，一般地，若集合 A 中有 n 个元素，集合的子集为 2^n 个，真子集有 2^n-1 个，非空子集也是 2^n-1 个.

思考　上题中集合的非空真子集的个数有多少个？

二、已知集合的关系求参数取值范围的问题

例　已知集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.

分析　$B\subseteq A$，可分为 $B=\varnothing$，$B\neq\varnothing$ 两种情况进行分类讨论. 本题还要用到二次方程根的情况来讨论.

解　$A=\{0,-4\}$，$B\subseteq A$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无解，

$\therefore\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，$\therefore a<-1$.

(2) 当 $B\neq\varnothing$ 时，$B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$ 或 $B=A$.

当方程有两个相等的根时，判别式 $\Delta=8a+8=0\Rightarrow a=-1$，此时 $B=\{0\}$ 满足条件.

当 $B=A=\{0,-4\}$ 时，$\begin{cases}-4=-2(a+1)\\0=a^2-1\end{cases}$，$\therefore a=1$.

综上可知，$a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

说明　求集合有关的子集问题时，要注意分类讨论思想的应用，注意培养分类意识及分类方法. 当集合的元素是方程根的时候，还要注意结合方程的有关知识，有时还要结合数轴用数形结合的思想来解.

思考　若 $\{x|2x-a=0\}\subsetneqq\{x|-1<x<3\}$，则 a 的取值范围是________.

解：由数轴直接得出 $-2<a<6$.

三、有关两个集合相等的问题

例　设 $A=\{x,x^2,xy\}$，$B=\{1,x,y\}$，且 $A=B$，求实数 x,y 的值.

分析　注意两个集合的元素相同，两个集合才相等，还要注意集合元素的互异性.

解　由 B 的元素性质得 $x\neq1$，$x\neq y$，由 $A=B$ 得 $\begin{cases}x^2=1\\xy=y\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2=y\\xy=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$.

说明　由集合相等问题转化为元素之间的关系时，要充分考虑到集合元素的性质，如互异性，无序性.

思考　用特殊的数来验证行吗？

四、元素与集合、属于与包含之间的区别问题

例　以下各组中两个对象是什么关系，用适当的符号表示出来.

(1) 0 与 $\{0\}$；(2) 0 与 $\varnothing$；(3) $\varnothing$ 与 $\{0\}$；(4) $\{0,1\}$ 与 $\{(0,1)\}$；(5) $\{(a,b)\}$ 与 $\{(b,a)\}$.

分析　首先要分清是“元素与集合”还是“集合与集合”的关系；如果是集合与集合还要分清是什么具体的关系.

解　(1) $0\in\{0\}$；(2) $0\notin\varnothing$；(3) $\varnothing\subseteq\{0\}$；(4) $\{0,1\}\neq\{(0,1)\}$；(5) $a=b$ 时，$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$；$a\neq b$ 时，$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$.

说明　这里要十分注意集合中元素是什么，是点还是数，还要分清是集合与集合的关系还是元素与集合的关系，特别要注意空集符号.

思考　集合与集合之间也有属于关系吗？集合的元素可能是集合吗？

五、有关集合子集的探究问题

例　设集合 $A=\{x\mid -3<x<2\}$，$B=\{x\mid 2k-1<x<2k+1\}$，且 $A\supseteq B$，则实数 k 的取值范围是________.

分析　利用数轴来确定端点之间的关系，这是数形结合思想在集合中的应用.

解 $\begin{cases}2k-1\geqslant -3\\ 2k+1\leqslant 2\end{cases}$　$\therefore -1\leqslant k\leqslant \frac{1}{2}$.

说明　由 $A\geqslant B$ 得到两个不等式解集的关系，通过画数轴，即可得出 $2k-1\geqslant -3$，$2k+1\leqslant 2$，要注意数集的端点能不能取到，另外要注意连续的数集经常画在数轴上来研究各个集合的关系，即采用数集的坐标轴法.

学习笔记

1. 本节概念符号比较多，要注意概念的比较，牢记符号 $\varnothing$，$\subseteq$，$\in$，$\notin$，$=$ 的意义及用法，会用 Venn 图来表示集合之间的包含关系，这也是数形结合思想的具体体现.

2. 在解题过程中要注意空集的意义，只要有子集问题，首先想到的是可能是空集，要养成良好的思维习惯.

3. 子集是描述两个集合关系的，集合 A 是集合 B 的子集应该理解为集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，不管集合 A 是有元素还是无元素，也不管集合 A 是有限集还是无限集，只要是集合 A 中的元素，就是集合 B 的元素. 已知一个集合是另一个集合的子集时，首先要想到有没有空集符合条件.

练

搏海横流，方显英雄本色.

A 课堂巩固

一、选择题

1. 集合 $M=\{x\in \mathbf{R}\mid x^2-1=0\}$，$T=\{-1,0,1\}$，则 M 与 T 的关系是(　　).

A. $M\subsetneqq T$　　B. $M\supsetneqq T$

C. $M=T$　　D. 以上都不对

2. 设 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，$A\subseteq B$，则 a 的取值范围是(　　).

A. $a\geqslant 2$　　B. $a\leqslant 1$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a\leqslant 2$

3. 设 $x,y\in \mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid y=x\}$，$B=\left\{(x,y)\mid \frac{y}{x}=1\right\}$，则 A 与 B 的关系是(　　).

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$

C. $A=B$　　D. 以上都不对

4. 若集合 $P=\{$正方形$\}$，$Q=\{$菱形$\}$，$C=\{$矩形$\}$，$D=\{$平行四边形$\}$，则下列关系中错误的是(　　).

A. $P\subsetneqq Q\subsetneqq C$　　B. $P\subsetneqq Q\subsetneqq D$

C. $P\subsetneqq C\subsetneqq D$　　D. $C\cap Q\subsetneqq D$

5. 设集合 $A=\{x\mid x=2n+1, n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2n-1, n\in \mathbf{Z}\}$，则集合 A 与 B 的关系为(　　).

A. $A\not\subseteq B$　　B. $B\not\subseteq A$

C. $A=B$　　D. 无法确定

二、填空题

6. 已知集合 $A=\{1,1+x,1+2x\}$，$B=\{1,y,y^2\}$，且 $A=B$，则实数 $x=$________，$y=$________.

7. 集合 $A=\{a^2,-1,a^2+1\}$，这个集合有子集________个，真子集________个，非空真子集________个.

三、解答题

8. 集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，$B\subseteq A$，求 m 的取值范围.

B 课后拓展

一、选择题

1. 已知 $M=\{(x,y)\mid y=|x|\}$，$N=\{(x,y)\mid |y|=|x|, y\geqslant 0\}$，则有(　　).

A. N 是 M 的真子集　　B. M 是 N 的真子集

C. $M=N$　　D. M 是 N 的子集

2. 下列 4 个命题：①空集没有子集；②空集是任何集合的真子集；③$\varnothing=\{0\}$；④任何一个集合必有两个或两个以上的子集. 其中正确的命题个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 已知集合 $A\subsetneqq\{2,3,7\}$，且 A 中至多有一个奇数，则这样的集合个数为(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

二、填空题

4. 若集合 $A=\{x\mid x^2+x-1=0\}$，$B=\{x\mid x^2-x+1=0\}$，则集合 A 与 B 之间的关系是________.

5. 写出满足条件 $\{0,1\}\subseteq M\subsetneqq\{0,1,2,3\}$ 的集合 M____.

6. 若集合 $\{(x,y)\mid x+y-2=0$ 且 $x-2y+4=0\}\subseteq\{(x,y)\mid y=3x+b\}$，则 b 的值是________.

三、解答题

7. 已知 $x,y\in \mathbf{R}$，$A=\{a\mid a=x^2-3x+1\}$，$B=\{b\mid b=y^2+3y+1\}$，求集合 A 与 B 的关系.

8. 已知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，$M=\{z|z=x^2,x\in A\}$，且 $M\subseteq B$. 求 a 的取值范围.

C 考题演练

一、选择题

1. 设集合 $M=\left\{x\,|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则下列关系正确的是(　　).

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

2. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，那么 A 的真子集的个数是(　　).

A. 15　　B. 16

C. 3　　D. 4

二、填空题

3. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，$A\subseteq B$，则 a 的取值范围是________.

三、解答题

4. 已知三元素集合 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x,y 的值.

5. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-a|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2x-1}{x+2}<1\right\}$. 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

1.2.2　集合的运算

学

总结、概括，创新，这是内化知识，创新运用的基础。

预习探路

1. 什么是两个集合的并集？并集有哪些性质？如何理解？

提示　(1)一般地，由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集.

记作：$A\cup B$，读作：A 并 B.

符号语言表达为：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$.

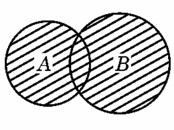

图 1-2-2

文氏图表示如图 1-2-2(阴影部分)所示.

关于定义的理解：

①其中的“或”字的意义，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的，“$x\in A$，或 $x\in B$”这一条件，包括下列三种情况：$x\in A$，但 $x\notin B$；$x\in B$，但 $x\notin A$；$x\in A$，且 $x\in B$(很明显，适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A\cap B$，它不一定是空集).

②对于 $A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$，不能认为 $A\cup B$ 是由 A 的所有元素和 B 的所有元素所组成的集合，因为 A 与 B 可能有公共元素，所以上述看法，从集合的元素互异性看是错误的.

(2)并集的运算性质.

对于任意两个集合 A、B，有

①$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；

②$A\cup A=A$；

③$A\cup\varnothing=A$；

④$A\cup B=B\cup A$.

(3)特殊情形如图 1-2-3 所示.

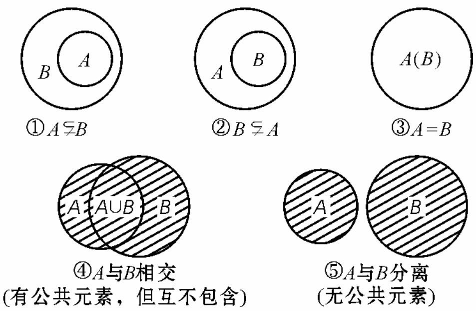

图 1-2-3

由并集的定义可知：

①$A\cup B=B$；

②$A\cup B=A$；

③$A\cup B=A$(或 $A\cup B=B$)；

④$A\cup B=$图中阴影部分；

⑤$A\cup B=$图中阴影部分.

2. 什么是两个集合的交集？如何理解？有哪些性质？

提示　(1)一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集.

记作：$A\cap B$，读作：A 交 B.

符号语言表达式为：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$.

Venn 图(图形语言)表示如图 1-2-4 所示.

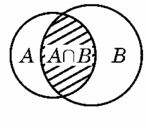

图 1-2-4

关于定义的理解：

对于“$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$”，不能仅认为 $A\cap B$ 中的任一元素都是 A 与 B 的公共元素，同时还有 A 与 B 的公共元素都属于 $A\cap B$ 的含义，这就是文字定义中“所有”二字的含义，而不是“部分”公共元素. 还有并不是任何两个集合总有公共元素，当集合 A 与 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 没有交集，而是 $A\cap B=\varnothing$.

(2)交集的运算性质.

对于任何两个集合 A、B,有

①$(A\cap B)\subseteq A$,$(A\cap B)\subseteq B$;

②$A\cap A=A$;

③$A\cap\varnothing=\varnothing$;

④$A\cap B=B\cap A$.

(3)特殊情形如图 1-2-5 所示.

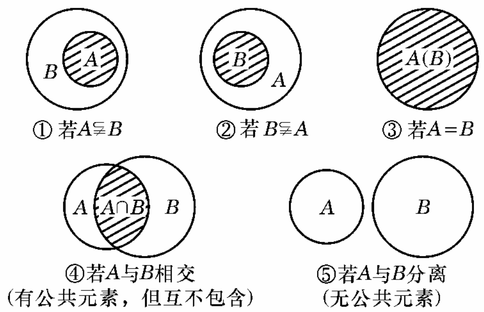

图 1-2-5

由交集的定义可知:

①$A\cap B=A$;

②$A\cap B=B$;

③$A\cap B=A$(或 $A\cap B=B$);

④$A\cap B=$图中阴影部分;

⑤$A\cap B=\varnothing$.

3. 什么是全集、补集?如何理解?有哪些性质?

提示 (1)全集的概念.

在研究集合与集合之间的关系时,有时这些集合都是某一个给定的集合的子集,这个给定的集合可以看成一个全集,可用符号 U 表示,也就是说,全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素.

注意 全集具有相对性,并不惟一,我们在自然数范围内讨论问题时,可以把 **N** 看作全集,在实数范围内讨论问题时,可以把实数集 **R** 看作全集.

(2)补集的概念.

设 U 是一个集合,A 是 U 的一个子集(即 $A\subseteq U$),由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 U 中子集 A 的补集(或余集),记作$\complement_U A$,即$\complement_U A=\{x|x\in U,且\ x\notin A\}$.

几个特殊性质:

$\complement_U U=\varnothing$,$\complement_U\varnothing=U$,$\complement_U(\complement_U A)=A$.

(3)用数学的三种语言互译表示全集与补集如图1-2-6所示.

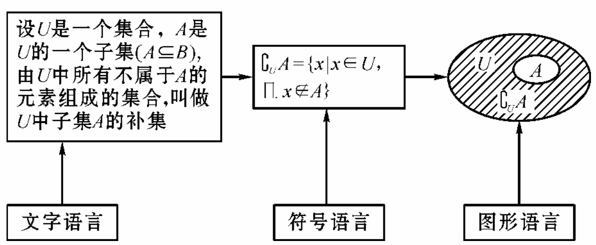

图 1-2-6

(4)用 Venn 图表示交集、并集、补集的有关关系.

如果集合 A 与 B 为全集 U 的子集,利用 Venn 图表示下面关系:

①如图 1-2-7 所示,$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

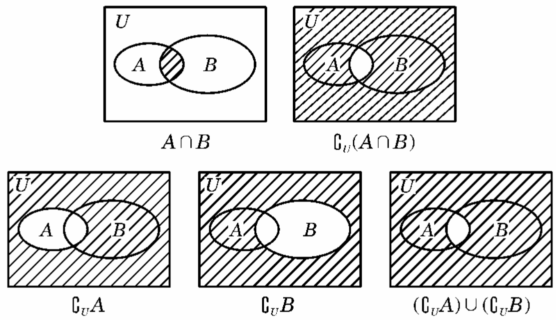

图 1-2-7

②如图 1-2-8 所示,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

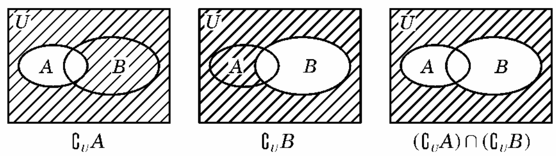

图 1-2-8

疑难点解析

1. 在深刻理解两个集合的交、并、补概念的基础上,能用 Venn 图解有关集合问题,化难为易.

2. 当两个集合都是不等式的解集时,求它们的交、并、补通常用数轴直观表示,但要注意区间的开与闭.

3. 若集合中的元素用坐标形式表示时,要想得到满足条件的点所构成的图形是什么,画出草图,转化为解析几何问题.

4. 对概念中关键字"且"与"或"的准确理解.

例 设全集为 U,求证:$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

证明 (1)任取 $x\in\complement_U(A\cup B)$,则 $x\in U$,且 $x\notin A\cup B$,即 $x\in U$,$x\notin A$ 且 $x\notin B$.

$\therefore x\in\complement_U A$ 且 $x\in\complement_U B$,

$\therefore x\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,

$\therefore\complement_U(A\cup B)\subseteq(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

(2)任取 $x\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,则 $x\in\complement_U A$ 且 $x\in\complement_U B$.

$\therefore x\in U$,$x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\notin(A\cup B)$.

$\therefore x\in\complement_U(A\cup B)$,$\therefore(\complement_U A)\cap(\complement_U B)\subseteq\complement_U(A\cup B)$.

综上所述:$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

5. 重视空集的特殊地位和作用.

例1 已知 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-2x-8=0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax+a^2-12=0\}$,$A\cup B=A$,求实数 a 的取值范围.

分析 空集是任何集合的子集,$A\cup B=A$,B 可能为空集,不能忽略.

解 $A=\{-2,4\}$,$\because A\cup B=A$,$\therefore B=\varnothing$,$\{-2\}$,$\{4\}$,$\{-2,4\}$.若 $B=\varnothing$,则 $a^2-4(a^2-12)<0$,解得 $a>4$ 或 $a<-4$;若 $B=\{-2\}$,则 $(-2)^2-2a+a^2-12=0$ 且 $\Delta=a^2-$

$4(a^2-12)=0$，解得 $a=4$；若 $B=\{4\}$，则 $4^2+4a+a^2-12=0$ 且 $\Delta=a^2-4(a^2-12)=0$，此时 a 无解；若 $B=\{-2,4\}$，则 $\begin{cases}-a=4-2\\ a^2-12=-2\times 4\end{cases}$，∴$a=-2$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a|a<-4$ 或 $a=-2$ 或 $a\geqslant 4\}$.

例 2　设 $A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的子集$\}$，$N=\{B$ 的子集$\}$，求 $M\cap N$.

解　∵$A\cap B=\varnothing$，∴A、B 的相同子集只有 $\varnothing$，

∴$M\cap N=\{\varnothing\}$.

6. 重视 Venn 图在解题中的作用.

例　已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，若 $A\cup B=U$，$A\cap B\neq\varnothing$，且 $A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$. 试求满足上述条件的集合 A、B.

解　∵$A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$，∴$1\in A$，$2\in A$，且 $1\notin B$，$2\notin B$，由 Venn 图(图 1-2-9)知，

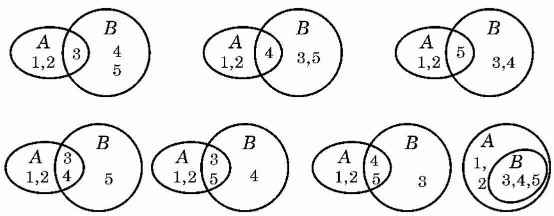

图 1-2-9

共 7 种情况.

即 $\begin{cases}A=\{1,2,3\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,4\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,5\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,3,4\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,3,5\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,4,5\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,3,4,5\}\\ B=\{3,4,5\}\end{cases}$.

典例归类

一、关于交集的有关问题

例 1　已知集合 $M=\{x|y^2=x+1\}$，$P=\{x|y^2=-2(x-3)\}$，那么 $M\cap P$ 等于(　　).

A. $\left\{(x,y)|x=\dfrac{5}{3},y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

D. $\{x|x\leqslant 3\}$

分析　识别出 M、P 的元素，是求得 $M\cap P$ 的关键.

解　$M=\{x|x=y^2-1\geqslant -1\}=\{x|x\geqslant -1\}$，

$P=\{x|x=-\dfrac{1}{2}y^2+3\leqslant 3\}=\{x|x\leqslant 3\}$，

∴$M\cap P=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，

∴应选 C.

说明　本题也可采用排除法，抓住选项之间的差异，采用取特殊值或举反例等方法排除错误选项.

思考　如果将集合改为 $M=\{(x,y)|y^2=x+1\}$，$N=\{(x,y)|y^2=-2(x-3)\}$，结果又会怎样呢？

例 2　若集合 $P=\{1,2,3,m\}$，$Q=\{m^2,3\}$，满足 $P\cap Q=Q$，求 m 的值.

分析　由 $P\cap Q=Q$，可以得到 $Q\subseteq P$，从而可求出 m 的值.

解　∵$P\cap Q=Q$，∴$Q\subseteq P$，

∴$m^2=1$ 或 $m^2=2$ 或 $m^2=m$，

解得 $m=\pm1$ 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0，

经检验 $m=1$ 时，不满足集合 P 中元素的互异性，

∴$m=-1$ 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0.

说明　解此题的关键是 $P\cap Q=Q\Leftrightarrow Q\subseteq P$ 的运用.

例 3　已知集合 $M=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant 1\}$，$P=\{x\in\mathbf{R}|x>t\}$，若 $M\cap P=\varnothing$，则 t 应满足条件(　　).

A. $t>1$　　B. $t\geqslant 1$　　C. $t<1$　　D. $t\leqslant 1$

分析　由 $M\cap P=\varnothing$，利用数轴可得 t 的范围.

解　选 B.

例 4　已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

解　∵ $A\cap B=\{-3\}$，∴$-3\in B$. 又∵$a^2+1>0$，∴集合 B 中能等于 -3 的元素有 $a-3$ 或 $2a-1$. 当 $a-3=-3$，即 $a=0$ 时，$A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$，得 $A\cap B=\{-3,1\}$，与已知 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾，∴$a\neq 0$；当 $2a-1=-3$，即 $a=-1$ 时，经检验符合题意，∴$a=-1$.

说明　本节重点是交集、并集的概念，正确理解概念是进行集合间的交、并运算的关键.

关于定义需评注：

(1)$A\cup B$ 中"或"的意义与日常用语中的"或"的意义不尽相同，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的，"$x\in A$，或 $x\in B$"包括下列三种情况：

①$x\in A$，但 $x\notin B$；②$x\in B$，但 $x\notin A$；③$x\in A$，且 $x\in B$.

(2)因为并不是任何两个集合总有公共元素，当 A 与 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 的交集不存在，而应 $A\cap B=\varnothing$.

思考　验证是求集合运算中经常遇到的问题，要符合集合的元素性质，应注意集合中元素是什么.

二、关于并集的有关问题

例　设集合 $A=\{x|2x^2+3px+2=0\}$，$B=\{x|2x^2+x+q=0\}$，其中 p、q、$x\in\mathbf{R}$，当 $A\cap B=\{\dfrac{1}{2}\}$ 时，求 p 的值及 $A\cup B$.

分析　∵ $A\cap B=\{\dfrac{1}{2}\}$，∴$\dfrac{1}{2}\in A$，且 $\dfrac{1}{2}\in B$，∴$\dfrac{1}{2}$ 既是方程 $2x^2+3px+2=0$ 的根，又是方程 $2x^2+x+q=0$ 的根，代入易求得 p、q 的值，从而得到集合 A、B，求得 $A\cup B$.

解　∵ $A\cap B=\{\dfrac{1}{2}\}$，∴ $\dfrac{1}{2}\in A$，∴ $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3p\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+2=0$，∴ $p=-\dfrac{5}{3}$，∴ $A=\left\{\dfrac{1}{2},2\right\}$. 又∵ $A\cap B=\{\dfrac{1}{2}\}$，∴$\dfrac{1}{2}\in B$，∴ $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+q=0$，∴ $q=-1$，∴$B=$

$\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$，∴ $A\cup B=\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}$.

说明　要充分利用 $A\cap B$ 这个条件求参数 p 的值.

三、关于交集与并集的综合应用问题

例　已知 $A=\{x|x^2-px-2=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0\}$，且 $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，求 p、q、r 的值.

分析　要求 p、q、r 的值，可以从 $A\cap B=\{-2\}$ 入手，$x=-2$ 是 A、B 中两个方程的公共根，代入后即可求出 p、q、r，要注意限制条件.

解　∵ $A\cap B=\{-2\}$，∴ $-2\in A$，$-2\in B$.

将 $x=-2$ 代入 $x^2-px-2=0$，得 $p=-1$，

∴ $A=\{1,-2\}$.

∵ $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，∴ $B=\{-2,5\}$.

∴ $\begin{cases}(-2)+5=-q\\(-2)\times5=r\end{cases}$，

∴ $\begin{cases}q=-3\\r=-10\end{cases}$.

∴ $p=-1$，$q=-3$，$r=-10$.

说明　条件 $A\cup B$、$A\cap B$ 要用活，$-2\in B$，但从此路走却行不通，一般要从公共关系入手.

思考　上题中，若将 A 改为 $A=\{x|\frac{p}{2}x^2-2x-2=0\}$，结果发生变化吗？

四、关于补集的有关问题

例　设全集 U 为 $\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x||x|=y+1,y\in A\}$，求 $\complement_U B$.

分析　集合 A、B 都是方程的解集，集合 A 是具体的，可先确定之，再对 B 进行分析.

解　∵ $A=\{x|x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$，$y\in A$，

∴当 $y=-1$ 时，由 $|x|=y+1=0$，得 $x=0$，

当 $y=2$ 时，由 $|x|=y+1=3$，得 $x=\pm3$.

∴ $B=\{-3,3,0\}$，∴ $\complement_U B=\{x\in\mathbf{R}|x\neq-3$，且 $x\neq3$，且 $x\neq0\}$.

说明　解决集合问题，应从元素入手进行分析处理.

思考　分类讨论思想是数学中的重要数学思想.

五、有关集合运算的性质应用问题

例1　设全集 U 为 $\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2+px+12=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$，若 $(\complement_U A)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，求 $A\cup B$.

解　∵ $(\complement_U A)\cap B=\{2\}$，

∴ $2\in B$，但 $2\notin A$；

∵ $A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，

∴ $4\in A$，但 $4\notin B$.

∴ $\begin{cases}4^2+4p+12=0\\2^2-10+q=0\end{cases}$.

∴ $p=-7$，$q=6$.

∴ $A=\{3,4\}$，$B=\{2,3\}$.

∴ $A\cup B=\{2,3,4\}$.

说明　$A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，∴ $4\in A$，$4\in(\complement_U B)$，从而 $4\notin B$. 这主要是根据 $a\in A$，则 $a\notin(\complement_U A)$；若 $a\in(\complement_U A)$，则 $a\notin A$ 而得的. 进一步可推出如下性质：$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$. 要根据补集的定义分析出相关元素具有的性质，再利用 Venn 图等工具来解决.

例2　设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,5\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 等于(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{4\}$　　C. $\{1,5\}$　　D. $\{2,5\}$

分析　要求 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，可以分别求出 $\complement_U A$ 及 $\complement_U B$，再求之；也可考虑 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$.

解　∵ $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，∴ $\complement_U(A\cup B)=\varnothing$，

∴ $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$.

∴选 A.

说明　大家可借助 Venn 图来理解摩根定律：

①$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$；

②$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$.

利用好以上性质，解题时可收到事半功倍的效果.

思考　用 Venn 图解上题.

例3　已知全集 $U=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，若 $\complement_U A=\{0\}$，则这样的实数 x 是否存在？若存在，求出 x；若不存在，请说明理由.

分析　假设存在，推出矛盾就不存在，若找出值就存在. 这是解决存在性问题的基本方法.

解　∵ $\complement_U A=\{0\}$，∴ $0\in U$，但 $0\notin A$.

∴ $x^3+3x^2+2x=0$，$x(x+1)(x+2)=0$，∴ $x=0$ 或 -1 或 -2.

当 $x=0$ 时，$|2x-1|=1$，A 中已有元素 1，故舍去；

当 $x=-1$ 时，$|2x-1|=3$，$3\in U$；

当 $x=-2$ 时，$|2x-1|=5$，但 $5\notin U$，故舍去.

∴实数 x 的值存在，它只能是 -1.

思考　存在性问题是探索性、探究性问题的一种情况，假设存在，推出矛盾就不存在；推不出矛盾，就要求出相应的结果.

学习笔记

1. 集合的交、并运算是集合的重要知识，牢记定义，正确区分“且”与“或”的含义，同时应注意与子集知识的综合应用，明确各符号的相互转化，是正确解题的关键，否则易出错.

2. 掌握交集、并集、补集的定义及性质，再借助数形结合思想、分类讨论思想是正确解集合综合题的关键，分类讨论时，要做到不重不漏，否则易出错.

3. 要学会集合语言的等价转化，如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$.

4. 关于补集问题，必须明确全集，全集不同，补集也会不同.

5. 解决集合问题，首先是化简集合，然后可借助于数轴、Venn 图等工具来研究它们之间的运算，最后要检验其确定性、互异性.

6. 掌握集合运算的基本性质.

(1)并集的定义:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$,其关键字"或"表示可以兼有,即它有三层含义:

①$x\in A$ 且 $x\notin B$;

②$x\in A$ 且 $x\in B$;

③$x\notin A$ 且 $x\in B$.

(2)用 $\mathrm{card}(A)$ 表示有限集 A 的元素的个数,则有如下关系:$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

(3)集合的交与并具有下列性质:

①$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$(交换律);

②$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律);

③$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$(分配律);

④$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$,$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$,
$A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$;

⑤$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,
$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

练

挺胸横渡,方显英雄本色。

A 课堂巩固

一、选择题

1. 设 $U=\{0,1,2,3,4\}$,$A=\{0,1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 等于( ).

A. $\{0\}$ B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,4\}$ D. $\{0,1,2,3,4\}$

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$,$M=\{x|x\geqslant 1\}$,$N=\{x|x>5$ 或 $x<0\}$,则 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 等于( ).

A. $\{x|0<x<1\}$ B. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x|0\leqslant x<1\}$ D. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

3. 设 S、T 是两个集合,且 $S\not\subseteq T$,$T\not\subseteq S$,若 $M=S\cap T$,则 $S\cup M$ 等于( ).

A. S B. T C. $\varnothing$ D. M

4. 已知全集 $U=\{0,1,2\}$,且 $\complement_U Q=\{2\}$,则集合 Q 的真子集共有( ).

A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

5. 已知 U 是全集,A、B 是非空集合且 $A\subsetneqq B\subseteq U$,那么下列集合中为空集的是( ).

A. $A\cap(\complement_U B)$ B. $(\complement_U A)\cap B$

C. $A\cap B$ D. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

二、填空题

6. 若集合 A、B 满足 $A\cup B=A\cap B$,则 A,B 的关系是________.

7. 满足条件 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$ 的所有集合 A 的个数是________.

8. 若 $\{3,4,m^2-3m-1\}\cap\{2m,-3\}=\{-3\}$,则 $m=$________.

9. 已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{b,2\}$,$\complement_U A=\{5\}$,则 $a=$________,$b=$________.

三、解答题

10. 已知 $x\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{-3,x^2,x+1\}$,$B=\{x-3,2x-1,x^2+1\}$,如果 $A\cap B=\{-3\}$,求 $A\cup B$.

11. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$,$A\cap B=\{2\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$,求 A 和 B.

B 课后拓展

一、选择题

1. 对于任意两个集合,下列命题中正确的是( ).

A. $(A\cap B)\in A$ B. $(A\cap B)\subseteq B$

C. $(A\cap B)=A$ D. $\varnothing\subsetneqq A\cap B$

2. 设 S、T 是两个非空集合,且它们互不包含,那么 $S\cup(S\cap T)$ 等于( ).

A. $S\cap T$ B. S C. $\varnothing$ D. T

3. 已知 $A=\{y|y=x^2-4x+3,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y|y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cap B$ 等于( ).

A. $\{y|y=-1$ 或 $0\}$

B. $\{x|x=0$ 或 $1\}$

C. $\{(0,-1),(1,0)\}$

D. $\{y|y\geqslant -1\}$

4. 若集合 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{1,x^2\}$,$A\cup B=\{1,3,x\}$,则满足条件的实数 x 的个数是( ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知集合 $M=\{x|y^2=x+1\}$,$P=\{x|y^2=-2(x-3)\}$,那么 $M\cap P$ 等于( ).

A. $\left\{(x,y)\middle|x=\dfrac{5}{3},y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

D. $\{x|x\leqslant 3\}$

二、填空题

6. 已知集合 $M=\{x|x<-3$,或 $x>3\}$,$N=\{x|x<1$,或 $x>4\}$,则 $M\cup N=$________,$M\cap N=$________.

7. 设集合 $A=\{(x,y)|a_1x+b_1y+c_1=0\}$,$B=\{(x,y)|a_2x+b_2y+c_2=0\}$,则方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 的解集是________,方程 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ 的解集是________.