恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社 恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

全国重点中学一线骨干教师编写
丛书主编 方 可

高一数学（上）

www.hengqian.com

北京出版社出版集团 北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

丛书主编　方　可
本册主编　杨　晖
撰 稿 人　张　琪　郑宗桥　王向奇
　　　　　杨　晖

高一数学（上）

北京出版社出版集团
北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

超级学练考
高一数学(上)
(学生用书)
丛书主编　方 可
*
北京出版社出版集团
北京教育出版社 出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码：100011
网　址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
西安新华印刷厂印刷
*
880×1230 16开本　9.25印张　271 000字
2006年6月第3版　2006年6月第1次印刷
ISBN 7-5303-3330-5
G·3256 定价：12.50元
(质量投诉电话：029-82027917　010-58572245　010-58572393)

主编寄语

授人以鱼，还是授人以渔

以网络为载体的e时代，向中学教育提出了许多问题：1.什么样的教育理念最好？2.怎样及时应对教材多样化、考卷多元化的局面？3.老师怎样教，学生怎样学，才最有效果？……我们策划《超级学练考》的初衷，就是为了解决师生目前遇到的以上困惑——让广大学生在较短的时间内学得多，记得牢，练得精。

《超级学练考》丛书作为同步类新型教辅，主要为进课堂编写（也可作为学生自读类用书），其突出特点在于：

一、渗透先进的教育理念，体现教师的主导作用和学生的主体地位，立足以学生发展为中心，注重学生学习方式及思维能力的培养。

二、“学”、“练”、“考”有机结合、环环相扣：“学”以节（课）为单位，归纳、细梳所要学习的核心内容；“练”按梯度分组设题，逐级提升学生的解题能力；“考”设置多种类型试卷，全方位挖掘和诠释考点，目的在于让学生“考”后而知不足。

三、“疑难点解析”、“典例归类”、“学习笔记”等栏目设计新颖、科学、实用，有如名师从旁指导，求知更加轻松。

四、题解分离，便于思考；详解单订，便于验证。

五、书网互动，增值无限。师生在使用本丛书时，可锁定**www.hengqian.com**进行信息查询、资源下载、在线辅导等，作为本书读者免费享受这些增值服务。

相信这样的一套好书，定会给您的艰辛求学带来意想不到的实惠和无穷的轻松；实现我们既授人以鱼，更授人以渔的愿景！

丛书主编　方可

目 录

第 1 章　集合与简易逻辑

第 2 章　函　数

Contents

(参考答案活页装订,随书赠送)

第1章 集合与简易逻辑

Chapjixueliankao

1.1 集合

学 总结、模仿，创新，这是内化知识，创新运用的基础。

预习探路

1. 如何对集合的概念进行描述性的说明？

提示　集合是数学中最原始的不定义的概念，只能给出描述性说明：某些指定的对象集在一起就成为一个集合，组成集合的对象叫做元素。

集合是一个确定的整体，因此对集合也这样描述：具有某种属性的对象的全体组成一个集合。

2. 元素与集合的关系用什么符号表示？

提示　元素与集合的关系分为属于与不属于两种：元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；元素 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$。如：$2\in \mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin \mathbf{N}$。

3. 集合中的元素有哪些特性？

提示　确定性、互异性、无序性。确定性指元素 a 要么在集合 A 中，要么不在集合 A 中，这两种情况一定会出现一种；互异性指集合中的元素互不相同；无序性指集合中的元素没有前后顺序的区别。

4. 什么是有限集、无限集和空集？

提示　由有限个元素构成的集合称为有限集，由无限个元素构成的集合称为无限集，不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，空集含有 0 个元素。如 $\{1,2,3\}$ 是有限集，自然数集是无限集，$\{x\in \mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$ 是空集。

5. 集合有哪几种表示方法？

提示　列举法、描述法和图示法。

列举法——把集合的元素一一列举出来，并写在大括号内。

描述法——把集合的元素所具有的属性叙述出来。

图示法——一条封闭的曲线所围成的区域。

列举法通常适用于元素个数较少或规律明显的集合，如 $\{1,3,5,7,\cdots\}$，$\{-3,-1,0,1,2\}$；描述法通常适用于能写出元素共有属性的集合，又分为文字描述法和符号描述法，如 {四大发明}、$\{(x,y)\mid x<0$ 且 $y>0\}$；图示法主要用于直观表示和分析。

疑难点解析

1. 要熟记四个常用数集 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 的含义。

2. 符号“$\in$”和“$\notin$”表示的是元素与集合的关系，对于任意给定的元素 a 与集合 A，在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 之间必然有而且只有一种成立。

3. 本节课的重难点是学会用适当的方法来表示一些简单的集合，在使用描述法表示集合时要弄清代表元素的意义。如 $\{y\mid y=x^2\}$ 和 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$ 表示的分别是数集 $\{y\mid y\geqslant 0\}$ 和由抛物线 $y=x^2$ 上所有点构成的点集。再如 $\{(1,2)\}$ 和 $\{(2,1)\}$ 是不同的点集，不能写成 $\{1,2\}$。

典例归类

一、关于集合概念的问题

例 1　考查下列每组对象能否构成一个集合。

(1)所有的好人；

(2)平面上到原点的距离等于 1 的点的全体；

(3)方程 $x^2-a=0$ 在实数内的解；

(4)正三角形的全体；

(5)著名的科学家；

(6)$\sqrt{2}$ 的近似值。

分析　本题主要对集合的概念进行考查。(1)“所有的好人”无明确的标准，对于某个人是好是坏无法客观判定，因此(1)不能构成集合；类似(5)(6)也不能构成集合。(2)“平面上到原点的距离等于 1 的点的全体”即是以原点为圆心，1 为半径的圆，可以构成一个集合，一个点是否为其元素，就看它是否为该圆上的点，要么在圆上，要么不在圆上，两者必居其一且仅居其一。类似(3)(4)也可以构成集合。

解　能构成集合的有(2)、(3)、(4)；不能构成集合的有(1)、(5)、(6)。

说明　判断是否构成集合的本题中，注重集合元素的确定性。

思考　“使 $|x-2|$ 很小的 x 的值”能构成集合吗？

提示：不能。因为很小没有明确的标准。

二、关于集合的表示法的问题

例 2　用列举法表示下列集合。

(1)$A=\left\{x\mid \dfrac{6}{2-x}\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{Z}\right\}$

(2)$B=\{y\mid y=-x^2+6, x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}\}$

(3)$C=\{(x,y)\mid y=-x^2+6, x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}\}$

解 (1)要使 $x\in \mathbf{Z}$，$\frac{6}{2-x}\in \mathbf{Z}$，故 $|2-x|$ 必是 6 的约数，当 $x=-4,-1,0,1,3,4,5,8$ 时，$|2-x|$ 是 6 的约数，$\therefore A=\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$.

(2)由 $y=-x^2+6$，$x\in \mathbf{N}$，$y\in \mathbf{N}$ 知 $0\leqslant y\leqslant 6$，$\therefore$ 当 $x=0,1,2$ 时，$y=6,5,2$ 符合题意，$\therefore B=\{2,5,6\}$.

(3)点 (x,y) 满足 $y=-x^2+6$，x、$y\in \mathbf{N}$，

则有 $\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$，

$\therefore C=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$.

说明 解答此题的关键是准确地理解描述法表示的集合中元素的意义，这里特别要注意集合(2)与(3)的区别，集合 B 中的元素 y 是自然数，它必须满足的条件实际上是 $y=-x^2+6$，$x\in \mathbf{N}$ 的函数值的取值范围，集合 C 中的元素是点，这些点必须满足两个条件：①它是抛物线 $y=-x^2+6$ 上的点；②这些点的横坐标与纵坐标都是自然数.

思考 你能用列举法表示方程组 $\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}$ 的解集吗？

解：由 $\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}$ 表示的集合是 $\{(3,-1)\}$.

三、关于元素与集合的关系问题

例 3 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1)1 ________ $\mathbf{N}$，0 ________ $\mathbf{N}$，-3 ________ $\mathbf{Q}$，0.5 ________ $\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}$ ________ $\mathbf{R}$；

(2)$2\sqrt{3}$ ________ $\{x|x<\sqrt{11}\}$，$3\sqrt{2}$ ________ $\{x|x>4\}$，$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ________ $\{x|x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(3)3 ________ $\{x|x=n^2+1,n\in \mathbf{N}\}$，5 ________ $\{x|x=n^2+1,n\in \mathbf{N}\}$.

分析 看判断的对象是否满足集合中元素的特性即是否化成其中元素的形式.

解 (1)$\in$；$\in$；$\in$；$\notin$；$\in$

(2)$\because 2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$，$\therefore 2\sqrt{3}\notin\{x|x<\sqrt{11}\}$；

$\because 3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$，$\therefore 3\sqrt{2}\in\{x|x>4\}$；

$\because (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}<(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{5}\in\{x|x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$.

(3)令 $n^2+1=3$，$n=\pm\sqrt{2}\notin \mathbf{N}$；令 $n^2+1=5$，$n=\pm 2$，$2\in \mathbf{N}$. 故填 $\notin$；$\in$.

说明 确定元素是否在集合中，要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定，是使用“$\in$”，否使用“$\notin$”.

思考 $A=\{2,4\}$，$B=\{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$，$A$ 与 B 的关系如何？

解：虽然 A 本身是一个集合，但相对 B 来讲，A 是 B 的一个元素，故 $A\in B$.

四、关于集合中元素特性的问题

例 4 求集合 $\{x,1,x^2-x\}$ 中的元素 x 所满足的条件.

分析 集合中的元素必须满足互异性，因此，x 的取值不能使集合中三个元素有相等的情况.

解 据互异性有 $\begin{cases}x\neq 1\\x^2-x\neq 1\\x^2-x\neq x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\x\neq 0\\x\neq 2\end{cases}$

所以元素 x 应满足的条件是 $x\neq 0,1,2,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

说明 考查集合中元素的特性时，互异性是检验集合是否正确的重要依据，在解题时易被忽略，应引起重视.

思考 要使 $\{x,x^2-x,x^3-3x\}$ 表示一个集合，求 x 应满足的条件？

解：由 $\begin{cases}x\neq x^2-x\\x^2-x\neq x^3-3x\\x^3-3x\neq x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq 2\\x\neq -1\\x\neq -2\end{cases}$

所以当 $x\neq 0,-2,-1,2$ 时，$\{x,x^2-x,x^3-3x\}$ 能表示一个集合.

学习笔记

1. 集合有列举法、描述法、图示法三种表示方法. 在具体使用时，应根据题目的条件选定，一般以简明、方便为原则，描述法则是使用最广泛的集合表示方法.

2. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性，特别强调互异性，它是检验集合表示是否正确的重要依据.

3. 符号 $\in$ 与 $\notin$ 是表示元素与集合间的关系，一般不能用来表示集合与集合间的关系，但当集合作为元素出现在另一集合时，要用“$\in$”符号，如 $\{a\}\in\{\{a\},\{b\}\}$.

练

挹海横流，方显英雄本色。

A 课堂巩固

1. 下列命题中，正确的有 ( )

①集合 $\mathbf{N}$ 中最小的正数是 1；

②$-a\notin \mathbf{N}$，则 $a\in \mathbf{N}$；

③$x^2-6x+9=0$ 的解集是 $\{3,3\}$；

④$\{4,3,2\}$ 与 $\{3,2,4\}$ 是两个不同的集合.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. 下列各组对象能构成集合的是 ( )

①难解的题目；②直角坐标平面内第四象限的一些点；③方程 $x^2-3=0$ 在实数集内的解；④很多个多项式.

A. ③　　B. ①③

C. ②④　　D. ①②④

3. 集合 $\{x|(x^2-1)(x^2+1)=0\}$ 用列举法表示为________.

4. 已知 $A=\{x|ax^2-3x+2=0,a\in \mathbf{R}\}$，若 A 中元素至多只有一个，则 a 的取值范围是________.

5. 用适当的方法表示下列各集合：

(1)所有非负偶数组成的集合；

(2)x^2-9 的一次因式组成的集合；

(3)方程 $(x-1)(x-2)(x^2-5)=0$ 的解组成的集合.

(4)直角坐标系内第三象限的点组成的集合.

6. 若集合 $A=\{x|x^2+ax+b=x\}$ 中仅有一个元素 a，求 a、b 的值.

B 课后拓展

1. 已知集合 $A=\{y|y=-1+x-2x^2, x\in \mathbf{R}\}$，若 $y\in A$，则有 ( )

A. $y>-\frac{7}{8}$ B. $y\geqslant-\frac{7}{8}$

C. $y<-\frac{7}{8}$ D. $y\leqslant-\frac{7}{8}$

2. 已知集合 $M=$ {大于 -2 且小于 1 的实数}，则下列关系正确的是 ( )

A. $\sqrt{5}\in M$ B. $0\notin M$

C. $1\in M$ D. $-\frac{\pi}{2}\in M$

3. 下列四个命题中，正确的个数是 ( )

①$\{\varnothing\}$是空集；②$\{0\}$是空集；③若 $a\in\mathbf{N}$，则 $-a\notin\mathbf{N}$；④$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2x+1=0\}$是二元集.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 已知集合 $S=\{a,b,c\}$ 中的三个元素是$\triangle ABC$ 的三边长，那么$\triangle ABC$ 一定不是 ( )

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

5. 含有三个实数的集合既可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，又可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2005}+b^{2006}$ 的值为________.

6. 用描述法表示集合 $A=\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\}$ 为________.

7. 若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，求实数 a 的值.

8. 设 S 是满足下列两个条件的数组成的集合：①S 内不含 1；②若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$.

(1)若 $2\in S$，则 S 中必有其他两个数，求出这两个数；

(2)若 $a\in S$，求证：$\left(1-\frac{1}{a}\right)\in S$.

C 考题演练

1. 设 x,y,z 都是非零实数，则用列举法将 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xz}{|xz|}+\frac{yz}{|yz|}+\frac{xyz}{|xyz|}$所有可能的值组成的集合表示为________.

2. 若不等式 $-6<ax+2<6$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$，则实数 a 的值为 ( )

A. 8 B. 2 C. -4 D. -8

3. 设 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2-1,a^2+1\}$，求实数 a 的值.

4. 集合 $A=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$B=\{|a+3|,2\}$. 已知 $5\in A$，$5\notin B$，则 $a=$________.

5. (2005 年湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

1.2 子集、全集、补集

学

总结、概括，创新，这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 具备什么条件能说明集合 A 是集合 B 的子集？

提示 对于集合 A、B，如果 A 中每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. 即任意 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则 $A\subseteq B$. 当 A 不是 B 的子集时，记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

2. 一个集合 A 是另一个集合 B 的真子集，则 A、B 应满足的条件是什么？

提示 对于两个集合 A 与 B，如果$A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我

们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）. 例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c\}$，则有 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$），读作"A 真包含于 B"（或"B 真包含 A"），它们的关系如图 1－2－1 所示.

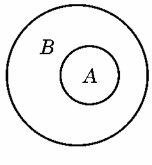


图 1－2－1

3. 什么是集合相等？

提示　对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么我们就说集合 A 等于集合 B，读作 A 等于 B.

集合 $A=B$ 实质是"$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$"，这个实质为我们提供了证明集合相等的方法.

4. 空集具有哪些性质？

提示　(1)空集是一切集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；(2)空集是一切非空集合的真子集. 设 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subsetneqq A$.

5. 补集的含义是什么？

提示　设 S 是全集，$A\subseteq S$. 由所有属于 S 但不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 在 S 中的补集. 记 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$ 且 $x\notin A\}$.

说明　(1)补集是以全集为前提建立的，而全集是相对于所要研究的问题而言的一个概念；只要包含所研究问题的全体元素的集合都可作全集，是相对的人为规定概念，不能理解为最大的集合.

(2)在谈补集时，一定要清楚是在哪个全集下的补集，对不同的全集同一个集合的补集也是不同的. 如：

若 $U=\{1,2,3,4\}$，$S=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$，则 $A\subseteq U$ 且 $A\subseteq S$，但是 $\complement_U A=\{4\}$，而 $\complement_S A=\{4,5\}$，即 $\complement_U A\neq\complement_S A$.

(3)要注意 A 一定是 S 的子集（即 $A\subseteq S$）方可有 $\complement_S A$ 概念，如图 1－2－2 所示.

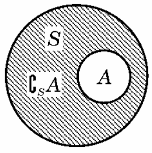


图 1－2－2

疑难点解析

1. 子集概念的理解.

(1)子集的概念是由讨论集合与集合间的关系引出的，两个集合 A 与 B 之间的关系如下：

$$\begin{cases} A\subseteq B\begin{cases} A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A \\ A\neq B\Rightarrow A\subsetneqq B \end{cases} \\ A\nsubseteq B \end{cases}$$

其中记号 $A\nsubseteq B$（或 $B\nsupseteq A$）表示集合 A 不包含于集合 B（或集合 B 不包含集合 A）.

(2)子集具有以下性质：

①$A\subseteq A$，即任何一个集合都是它本身的子集.

②如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，那么 $A=B$.

③如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

④如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

(3)有限集合的子集个数：

①n 个元素的集合有 2^n 个子集.

②n 个元素的集合有 2^n-1 个真子集.

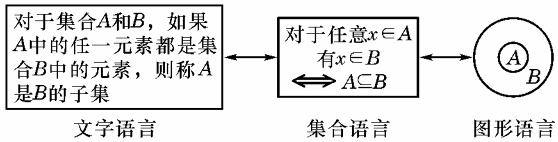
③n 个元素的集合有 2^n-1 个非空子集.

④n 个元素的集合有 2^n-2 个非空真子集.

2. 正确判断元素与集合、集合与集合之间的关系.

元素与集合的关系是属于与不属于的关系，集合与集合之间的关系是包含、真包含、相等的关系，要按照定义仔细区别.

3. 理解三种语言——文字语言、集合语言、图形语言以及它们之间的转换，如子集定义：



4. 补集是相对全集而言的，并且建立在子集的基础上，补集具有以下性质：

$\complement_U A\subseteq U$；$\complement_U(\complement_U A)=A$；$\complement_U U=\varnothing$；$\complement_U\varnothing=U$.

典例归类

一、关于集合符号的正确使用问题

例 1　判定下列集合之间的关系，用适当的符号表示它们的关系.

(1)$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2n,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x$ 是偶数$\}$；

(2)$A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是正方形$\}$；

(3)$A=\{x\in\mathbf{R}\mid y=\sqrt{x-2},y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\in\mathbf{R}\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$；

(4)$A=\{x\mid x$ 是奇数$\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x=4n\pm1,n\in\mathbf{Z}\}$.

分析　本题考查集合间的关系，尤其是集合的相等关系以及真子集关系，分清集合的含义、元素，有助于更好地解题.

解　(1)$\because A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，$B=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\}$，$\therefore A\subsetneqq B$.

(2)$\because$ 正方形一定是平行四边形，$\therefore A\supsetneqq B$.

(3)使 $y=\sqrt{x-2}$，$y\in\mathbf{R}$ 有意义的 x 值为 $x\geqslant2$，故 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant2\}$.

又对 $x\in\mathbf{R}$，有 $y=x^2\geqslant0$，$\therefore B=\{y\in\mathbf{R}\mid y\geqslant0\}$. $\therefore A\subsetneqq B$.

(4)对于任一 B 中的元素 x，都有 $x\in A$，$\therefore B\subseteq A$. 另一方面，对于 A 中任一元素 $y=2n-1(n\in\mathbf{Z})$，当 n 为偶数，即 $n=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时，则 $2n-1=4m-1\in B$；当 n 为奇数，即 $n=2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，则 $2n-1=4m+1\in B$，故有 $A\subseteq B$. $\therefore A=B$.

说明　两个集合的关系存在着包含、相等或不包含等情况，其中包含情况要注意是否真包含，而集合相等往往应从正反两个方面予以说明. 了解一些常见集合的不同表现形式可以使我们更好地研究问题.

思考　$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 之间应该用什么关系符号？

提示：用"$\in$"或"$\subsetneqq$"都对. 这是因为元素与集合间的关系是相对的，本题中 $\varnothing$ 既可以看作一个集合，由空集性质可知它是非空集合 $\{\varnothing\}$ 的真子集，同时它也可以看成是以空集

为元素的集合$\{\varnothing\}$中的元素，因此$\in$与$\subsetneqq$都对.

二、关于两集合关系的判定问题

例 2 集合$A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}\}$，下列关系中正确的是 ( )

A. $A\subsetneqq B$ B. $B\subsetneqq A$

C. $A=B$ D. $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$

解 对任意$a\in A$，则$a=n^2+1=n^2+4n+4-4n-8+5=(n+2)^2-4(n+2)+5$. $\because n\in\mathbf{N}$，$n+2\in\mathbf{N}$，$\therefore a\in B$，即A中任一元素都是B的元素，$\therefore A\subseteq B$.

又对任意的$b\in B$，则$b=k^2-4k+5=(k-2)^2+1$，$\because k\in\mathbf{N}$，$\therefore |k-2|\in\mathbf{N}$，$\therefore b\in A$，即$B$中每一个元素都在$A$中，$\therefore B\subseteq A$，故$A=B$，选 C.

说明 (1)要证明$A=B$，必须证$A\subseteq B$且$B\subseteq A$.

(2)要证$A\subsetneqq B$，只要证$A\subseteq B$. 在B中取一个元素不属于A即可.

思考 集合$A=\{x|x=2m,m\in\mathbf{Z}\}$与集合$B=\{x|x=4n,n\in\mathbf{Z}\}$具有什么关系？

提示：具有$B\subsetneqq A$关系. 设$x\in B$，则$x=4n=2\cdot 2n(n\in\mathbf{Z})$. $\because 2n\in\mathbf{Z}$，$\therefore x\in A$，即$B\subseteq A$. 但$2=2\times 1\in A$，$2\notin B$，$\therefore B\subsetneqq A$.

三、关于子集个数的问题

例 3 求满足条件$\{x|x^2+1=0\}\subsetneqq M\subseteq\{x|x^2-1=0\}$的集合$M$的个数.

分析 M是集合$\{x|x^2-1=0\}$的子集，又$\{x|x^2+1=0\}$是空集，它是M的真子集，$\therefore M$不空问题转化为求$\{x|x^2-1=0\}$的非空子集的个数.

解 $\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$，其非空子集为$\{-1\}$、$\{1\}$、$\{-1,1\}$，所以满足条件$\{x|x^2+1=0\}\subsetneqq M\subseteq\{x|x^2-1=0\}$的集合$M$共有 3 个.

说明 含n个元素的非空子集个数为2^n-1.

思考 已知$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则满足上述条件的集合A共有多少个？

解：这里$A\subseteq B$且$A\subseteq C$，故A是由B、C的公共元素 0，2，4 构成集合的子集，有$\varnothing$，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{0,2\}$，$\{0,4\}$，$\{2,4\}$，$\{0,2,4\}$，共 8 个.

四、已知包含关系求参数范围的问题

例 4 已知集合$P=\{x|x^2+x-6=0\}$，$Q=\{x|ax+1=0\}$，满足$Q\subsetneqq P$，求a所取的一切值.

分析 $Q\subsetneqq P$，Q中含有的元素可能是 0 个或 1 个，含 1 个元素时，必然是P中的元素.

解 $P=\{x|(x-2)(x+3)=0\}=\{-3,2\}$，当$a=0$时，$Q=\varnothing$，故$Q\subsetneqq P$成立；当$a\neq 0$时，$Q=\{x|ax+1=0\}=\left\{-\frac{1}{a}\right\}$，要使$-\frac{1}{a}=2$或$-\frac{1}{a}=-3$，则$a=-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$.

综上所述，$a=0,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

说明 此类题目所给的条件中含有参数，一般需分类讨论. 本题易漏掉$a=0$，$ax+1=0$无解，即Q为空集的情况，在讨论集合问题时，不要漏掉$\varnothing$.

思考 设$A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，且$B\subsetneqq A$，求a的值.

解：$\because B\subsetneqq A$，$\therefore a^2-a+1=3$或$a^2-a+1=a$，解得$a=-1$或$a=2$或$a=1$. 经检验，当$a=1$时，与A中元素互异性矛盾，$\therefore a=-1$或$a=2$.

例 5 已知$A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|x<a\}$.

(1)若$B\subseteq A$，求a的取值范围；

(2)若$A\subseteq B$，求a的取值范围；

(3)若$\complement_{\mathbf{R}}A\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}B$，求$a$的取值范围.

分析 紧扣子集、全集、补集定义，利用数轴、数形结合解出a的取值范围.

解 (1)因为$B\subseteq A$，B是A的子集，如图 1-2-3 所示，可得$a\leqslant 3$.

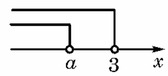


图 1-2-3

(2)因为$A\subseteq B$，A是B的子集，如图 1-2-4 所示，可得$a\geqslant 3$.

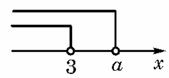


图 1-2-4

(3)因$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\geqslant 3\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\geqslant a\}$，$\complement_{\mathbf{R}}A\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}B$，所以$\complement_{\mathbf{R}}A$是$\complement_{\mathbf{R}}B$的真子集，如图 1-2-5 所示，可得$a<3$.

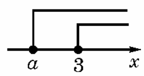


图 1-2-5

说明 (1)这类问题应注意数形结合，以形定数，相得益彰.

(2)要注意验证端点的值，做到准确无误.

思考 已知$M=\{x|x>0\}$，$N=\{x|x>a\}$，若$\complement_{\mathbf{R}}M\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}N$，求$a$的取值范围.

提示：由$\complement_{\mathbf{R}}M\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}N$，$\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|x\leqslant 0\}$，$\complement_{\mathbf{R}}N=\{x|x\leqslant a\}$，可得$a>0$.

学习笔记

1. 理解子集、真子集的概念，正确运用有关的术语、符号和图示方法；正确区分术语“包含于”与“包含”以及符号“$\subseteq$”与“$\subsetneqq$”的不同意义.

2. 掌握子集的有关性质：(1)$\varnothing\subseteq A$(空集是任何集合的子集，当然也是空集的子集，且是任何非空集合的真子集)；(2)$A\subseteq A$(任何非空集合A都有两个特殊的子集$\varnothing$、A)；(3)传递性：若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$；(4)相等：若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则$A=B$(即相等的两个集合的元素完全相同.)

3. 能写出有限集的所有子集. 一般地，若非空的有限集A中有n个元素，则A有2^n个子集，2^n-1个真子集，2^n-1个非空子集，2^n-2个非空真子集.

4. 数学中经常用封闭曲线的内部来表示集合，它称为维恩图(维恩是指英国逻辑学家 John Venn，1834—1923). 维恩图可以帮助我们直观地理解集合间的各种关系.

5. 要对给定集合S中子集A的补集的正确书写熟练掌握，它的记号为$\complement_S A=\{x|x\in S$且$x\notin A\}$.

练

沧海横流，方显英雄本色。

A 课堂巩固

1. 下列命题正确的是 （　　）

A. 任何一个集合必有两个或两个以上的子集

B. 任何一个集合必有一个真子集

C. 如果 $A\subseteq B$，那么凡是元素不属于 B，则必不属于 A

D. 空集不是空集的子集

2. 有集合 $M=\{x|x=\frac{n}{3},n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{n}{6},n\in\mathbf{Z}\}$，则 （　　）

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M=N$　　D. M、N 无公共元素

3. 已知全集 U，M、N 是 U 的非空子集，若 $\complement_U M\supseteq N$，则有 （　　）

A. $M\subseteq\complement_U N$　　B. $M\subsetneqq\complement_U N$

C. $\complement_U M=\complement_U N$　　D. $M=N$

4. 有六个关系为：① $\varnothing\subsetneqq\{0\}$；② $\varnothing=\{0\}$；③ $0=\varnothing$；④ $0\in\{0\}$；⑤ $0\in\varnothing$；⑥ $\varnothing\subseteq\varnothing$. 其中正确的有 （　　）

A. 1 个　　B. 6 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. 设 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{y}{x}=1\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|y=x\}$，则 A ____ B.

6. 设 $U=\{x|1<x<7\}$，$A=\{x|2\leqslant x<5\}$，$B=\{x|3\leqslant x<7\}$，则 $\complement_U A=$________，$\complement_U B=$________.

7. 已知 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x,y 的值.

B 课后拓展

1. 满足 $\{1\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4\}$ 的集合有 （　　）

A. 5 个　　B. 6 个

C. 7 个　　D. 8 个

2. 下列集合中，只有一个子集的集合是 （　　）

A. $\{x|x^2\leqslant 0\}$　　B. $\{x|x^3\leqslant 0\}$

C. $\{x|x^2<0\}$　　D. $\{x|x^3<0\}$

3. 已知 $U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$P=\{x|-1\leqslant x<3\}$，则有 （　　）

A. $\complement_U M=N$　　B. $\complement_U N=P$

C. $\complement_U M\supseteq P$　　D. $M\supseteq P$

4. 给出下列命题：

① $\complement_U A=\{x|x\notin A\}$；② $\complement_U\varnothing=U$；

③若 $S=\{$三角形$\}$，$A=\{$钝角三角形$\}$，则 $\complement_S A=\{$锐角三角形$\}$；

④若 $U=\{1,2,3\}$，$A=\{2,3,4\}$，则 $\complement_U A=\{1\}$.

其中正确命题的序号是________.

5. 已知全集 $U=\{2,3,a^2-2a-3\}$，$A=\{2,|a-7|\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则实数 a 的值是____________.

6. 已知集合 $A=\{x|x=14m+36n,m、n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，求证：$A=B$.

7. 设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 组成的集合.

8. 若 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|2m-1\leqslant x\leqslant m+1\}$，当 $B\subseteq A$ 时，求实数 m 的取值范围.

C 考题演练

1. (2005 年北京文)设集合 $M=\{x|x>1\}$，$P=\{x|x^2>1\}$，则下列关系中正确的是 （　　）

A. $M=P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M\subsetneqq P$　　D. $M\cup P=\mathbf{R}$

2. (2005 年天津文)集合 $A=\{x|0\leqslant x<3$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 （　　）

A. 16　　B. 8　　C. 7　　D. 4

3. (2004 年湖北)设 A、B 为两个集合，有下列四个命题：① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$. 其中真命题的序号是________.（把符合要求的命题序号都填上）

1.3　交集、并集

学

总结、模仿、创新，这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 交集与并集的含义是什么？

提示　设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 和 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的并集；由 A、B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集.

2. 在 $A\cup B$ 的定义中对关键字“或”的理解.

提示　这里的“或”表示可以兼有. 它有三层含义：① $x\in A$ 且 $x\notin B$；② $x\in A$ 且 $x\in B$；③ $x\notin A$ 且 $x\in B$.

3. “交”与“并”各有哪些性质？

提示 (1)$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$.
$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup B=B\cup A$.
(2)$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$,$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.
(3)$A\cup\complement_U A=U$,$A\cap\complement_U A=\varnothing$,$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$,$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$.

疑难点解析

1.对于 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$,$A\cap B$ 中的任意一个元素都是 A 与 B 的公共元素,集合 $A\cap B$ 包含了所有 A、B 的公共元素,当 A、B 没有公共元素时,$A\cap B=\varnothing$.

2.对于 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$,不是将 A 中所有元素和 B 中所有元素拼凑构成的.当 A、B 有相同元素时,在并集中按互异性原则只计算一个.

3.集合的交集、并集、补集综合运算具有以下性质:

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,用维恩图表示如图 1-3-1 所示.

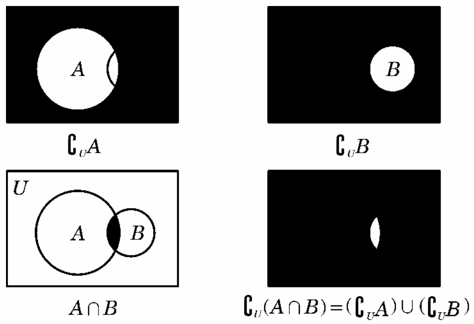


图 1-3-1

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,用维恩图表示如图 1-3-2 所示.

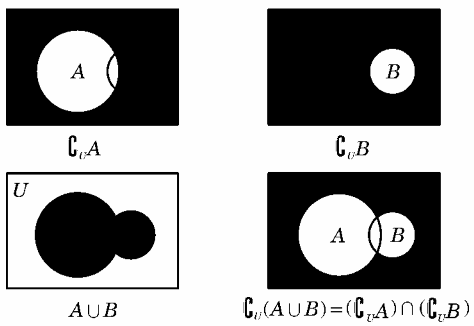


图 1-3-2

例 1 设全集为 U,求证:$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

证明 ①任取 $x\in\complement_U(A\cup B)$,则 $x\in U$,且 $x\notin A\cup B$,即 $x\in U$,$x\notin A$ 且 $x\notin B$.

$\therefore$ $x\in\complement_U A$ 且 $x\in\complement_U B$,

$\therefore$ $x\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,

$\therefore$ $\complement_U(A\cup B)\subseteq(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

②任取 $x\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,则 $x\in\complement_U A$ 且 $x\in\complement_U B$.

$\therefore$ $x\in U$,$x\notin A$ 且 $x\in U$,$x\notin B$.

故 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\notin A\cup B$.

$\therefore$ $x\in\complement_U(A\cup B)$,

$\therefore$ $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)\subseteq\complement_U(A\cup B)$.

综上所述:$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

思考 你能自己找出 $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 的证明方法吗?

4.重视维恩图在解题中的作用.

例 2 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,若 $A\cup B=U$,$A\cap B\neq\varnothing$,且 $A\cap\complement_U B=\{1,2\}$.试求满足上述条件的集合 A、B.

解 $\because$ $A\cap\complement_U B=\{1,2\}$,

$\therefore$ $1\in A$,$2\in A$,且 $1\notin B$,$2\notin B$,由维恩图(图 1-3-3)得

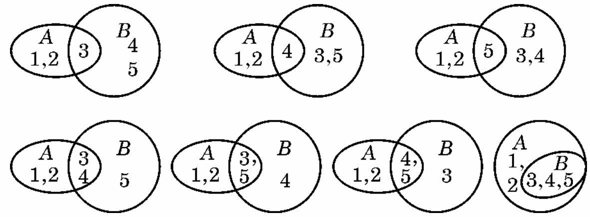


图 1-3-3

共 7 种情况.

即 $\begin{cases}A=\{1,2,3\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,4\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,5\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,3,4\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,3,5\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,4,5\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A=\{1,2,3,4,5\}\\B=\{3,4,5\}\end{cases}$.

典例归类

一、关于交集、并集的运算

例 1 已知集合 $M=\{x\mid y^2=x+1\}$,$N=\{x\mid y^2=-2(x-3)\}$,那么 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\{(x,y)|x=\frac{5}{3},y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\}$

B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

D. $\{x|x\leqslant 3\}$

分析 识别 M、N 两个集合中元素的属性,是求 $M\cap N$ 的关键.

解 方法 1:直接法.$M=\{x|y^2=x+1\}=\{x|x=y^2-1\}=\{x|x\geqslant-1\}$,

$N=\{x|y^2=-2(x-3)\}=\{x|x=-\frac{1}{2}y^2+3\}=\{x|x\leqslant 3\}$.

$\therefore M\cap N=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,应选 C.

方法 2:排除法.$\because M\cap N$ 中的元素是 x 而不是 (x,y),$\therefore$ 排除 A.比较 B 与 C,取 $x=-1$.$\because(-1)\in M$ 且 $(-1)\in\mathbf{N}$,$\therefore(-1)\in M\cap N$.$\therefore$ 排除 B.比较 C、D,取 $x=-2$.$\because(-2)\notin M$.$\therefore$ 排除 D.$\therefore$ 应选 C.

> **说明** 直接法主要揭示描述出的集合元素属性,从而利用交集定义求解;排除法主要对选项采用特殊值检验逐一排除达到快速求解,适合于选择题求解.

思考　满足$\{1,2\}\cup P=\{1,2,3,4\}$的集合$P$有______.

提示:填4个.$\{3,4\}$,$\{3,4,1\}$,$\{3,4,2\}$,$\{3,4,1,2\}$.

例2　已知$x\in\mathbf{R}$,集合$A=\{-3,x^2,x+1\}$,$B=\{x-3,2x-1,x^2+1\}$,如果$A\cap B=\{-3\}$,求$A\cup B$.

分析　既要考虑$-3\in B$,又要考虑集合$A\cap B$中只有元素-3,不能少也不能多.

解　$\because A\cap B=\{-3\}$,$\therefore -3\in B$.又$x^2+1\neq-3$,

$\therefore x-3=-3$或$2x-1=-3$.若$x-3=-3$,则$x=0$,$A=\{0,1,-3\}$,$B=\{-3,-1,1\}$,$A\cap B=\{1,-3\}$与已知矛盾.

若$2x-1=-3$,则$x=-1$,$A=\{-3,1,0\}$,$B=\{-3,-4,2\}$,$A\cap B=\{-3\}$满足已知,$\therefore A\cup B=\{-3,1,0,-4,2\}$.

说明　本题关键在于由$A\cap B=\{-3\}$来确定实数x,进而确定A、B,解题时要注意题目中的各种可能,并进行检验.

思考　已知$U=\{1,2,3,4,5\}$,$A\cap B=\{2\}$,$(\complement_U A)\cap B=\{1,4\}$,则$\complement_U B=$________.

提示:填$\{3,5\}$.用维恩图解题.

二、关于参数的问题

例3　设$A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若$A\cup B=A$,求实数$a$的值.

分析　$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

解　$A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{0,-4\}$,$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A\Rightarrow B=\varnothing$或$B=\{0\}$或$B=\{-4\}$或$B=\{0,-4\}$.

①当$B=\varnothing$时,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0\Rightarrow a<-1$;

②当$B=\{0\}$时,即方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$有两个相等的实数根且为零.

$\therefore \begin{cases}2(a+1)=0,\\ a^2-1=0\end{cases}\Rightarrow a=-1$;

③当$B=\{-4\}$时,即方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$有两个相等的实数根且为-4,

$\therefore \begin{cases}-2(a+1)=-8,\\ a^2-1=16\end{cases}$无解;

④当$B=\{-4,0\}$时,由根与系数的关系得

$\begin{cases}-2(a+1)=-4,\\ a^2-1=0\end{cases}\Rightarrow a=1$.

综上所述,$a\leqslant-1$或$a=1$.

说明　(1)由$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$是本题的关键.

(2)由$A=\{0,-4\}$,$B\subseteq A$分B为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{-4\}$,$\{0,-4\}$四种情况讨论,从而求出a.

思考　已知$A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$B=\{x\mid mx+1=0\}$,且$A\cup B=A$,求m的取值构成的集合.

提示:$A=\{2,-3\}$,$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

$m=0$时,$B=\varnothing$,满足$B\subseteq A$;$m\neq0$时,$B=\left\{-\frac{1}{m}\right\}$,

$\therefore \left\{-\frac{1}{m}\right\}\subseteq\{2,-3\}$,

$\therefore m$取值构成的集合为$\left\{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.

例4　已知$A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$.

(1)若$A\cap B=A\cup B$,求a的值;

(2)若$\varnothing\subsetneqq A\cap B$,$A\cap C=\varnothing$,求$a$的值.

解　(1)$B=\{2,3\}$,$C=\{2,-4\}$,$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$,于是2,3是方程$x^2-ax+a^2-19=0$的两根,

$\therefore \begin{cases}2+3=a,\\ 2\times3=a^2-19\end{cases}\Rightarrow a=5$.

(2)$\varnothing\subsetneqq A\cap B$,$A\cap C=\varnothing$,$\therefore A\cap B\neq\varnothing$,$\therefore 3\in A$,$2\notin A$,$-4\notin A$,$3^2-3a+a^2-19=0\Rightarrow a=5$或$a=-2$.

当$a=5$时,$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$,此时$A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$,矛盾;

当$a=-2$时,$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$满足题意,$\therefore a=-2$.

说明　(1)将$A\cap B=A\cup B$转化为$A=B$是解本题的突破口,证明如下:$A\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$;$B\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq A\Rightarrow B\subseteq A$,从而$A=B$.

(2)$\varnothing\subsetneqq A\cap B\Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$,关键是抓住空集这个特殊集合的意义和性质.

思考　已知$A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$,$B=\{x\mid x<-1$或$x>5\}$,若$A\cup B=B$,求$a$的取值范围.

解:$\because A\cup B=B$,$\therefore A\subseteq B$,结合数轴可知$a+3<-1$或$a>5$,即$a<-4$或$a>4$.

故a的取值范围是$\{a\mid a<-4$或$a>4\}$.

例5　集合$U=\{x\mid x\leqslant10$,且$x\in\mathbf{N}^*\}$,$A\subsetneqq U$,$B\subsetneqq U$,且$A\cap B=\{4,5\}$,$(\complement_U B)\cap A=\{1,2,3\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6,7,8\}$,求集合$A$和$B$.

分析　(1)本题中已知条件较多,所求明确,一般可采取从已知入手推出所求,首先应将已知条件转化到明显与所求相关的条件,然后从所有条件的综合中找出所求,如方法1.

(2)此题也可以采用数形结合的方法求解,即用维恩图将已知条件在图中标出,找出所求,如方法2.

解　方法1:①$\because A\cap B=\{4,5\}$,$\therefore 4\in A$,$5\in A$,$4\in B$,$5\in B$.

②$\because(\complement_U B)\cap A=\{1,2,3\}$,$\therefore 1\in A$,$2\in A$,$3\in A$,$1\notin B$,$2\notin B$,$3\notin B$.

③$\because(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6,7,8\}$,$\therefore 6,7,8$都不属于$A$,也不属于$B$.

$\because U=\{x\mid x\leqslant10$,且$x\in\mathbf{N}^*\}$,$\therefore 9,10$不知所属.

由②、③可知,9,10均不属于$\complement_U B$.

$\therefore 9\in B$,$10\in B$.

综上所述,$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{4,5,9,10\}$.

方法2:如图1-3-4所示,$\because A\cap B=\{4,5\}$,$\therefore$将4,5写在$A\cap B$中对应处.

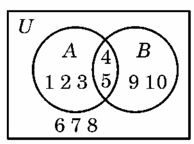


图1-3-4

$\because(\complement_U B)\cap A=\{1,2,3\}$,$\therefore$将1,2,3写在$A$中.

$\because (\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6,7,8\}$，$\therefore$ 将 6,7,8 写在 U 中 A、B 之外.

$\because (\complement_U B)\cap A$ 与 $(\complement_U B)\cap(\complement_U A)$ 中均无 9,10，$\therefore$ 9,10 在 B 中.

故 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,9,10\}$

说明 图解法较易推理判断.

学习笔记

1. 正确理解交集、并集的意义，能正确运用交集、并集的符号，$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

2. 结合维恩图，掌握交集的性质.

(1) $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(3) $A\cap B=B\cap A$.

(4) $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

3. 结合维恩图，掌握并集的性质.

(1) $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

(2) $A\subseteq(A\cup B)$，$B\subseteq(A\cup B)$，$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$，$A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$.

(3) $A\cup B=B\cup A$.

(4) 若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$.

4. 会求两个集合的交集、并集，对于数集，可借助数轴来完成.

5. (x,y) 作为集合的代表元素时，既可以看作点的坐标，又可以看作二元一次方程的一个解.

练

狠狗横流，方显英雄本色.

A 课堂巩固

1. 设 $U=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 等于 (　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$N=\{x\mid x>5$ 或 $x<0\}$，则 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 等于 (　　)

A. $\{x\mid 0<x<1\}$　　B. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　D. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

3. 在图 1-3-5 中，阴影部分可用集合 M、P 表示为 (　　)

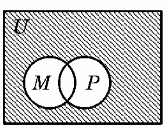


图 1-3-5

A. $M\cap P$　　B. $M\cup P$

C. $(\complement_U M)\cap(\complement_U P)$　　D. $(\complement_U M)\cup(\complement_U P)$

4. 在下列命题中，与命题 $A\subseteq B$ 等价的是 (　　)

①$A\cap B=A$；②$A\cup B=B$；③$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$；④$(\complement_U A)\cup B=U$.

A. ①②　　B. ①②③

C. ②③④　　D. ①②③④

5. 设 $A=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$，$B=\{x\mid x^2-px+15=0\}$，又 $A\cup B=\{2,3,5\}$，$A\cap B=\{3\}$，则 $p=$______，$q=$______.

6. 已知集合 $A=\{2,3,a^2+4a+2\}$，$B=\{0,7,2-a,a^2+4a-2\}$，且 $A\cap B=\{3,7\}$，求集合 B.

B 课后拓展

1. 对于任意两个集合，下列命题中正确的是 (　　)

A. $(A\cap B)\in A$　　B. $(A\cap B)\subseteq B$

C. $(A\cap B)=A$　　D. $\varnothing\subsetneqq A\cap B$

2. 设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，则 $A\cap B$ 等于 (　　)

A. $\{x=1$ 或 $y=2\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{(1,2)\}$　　D. $(1,2)$

3. 设 $M=\{x\mid x^2+px-3=0\}$，$N=\{x\mid x^3-qx^2+rx=0\}$，$S=\{p,q,r\}$，且 $M\cap N=\{-3\}$，$M\cup N=\{-2,-3,0,1\}$，则 S 等于 (　　)

A. $\{-2,5,-6\}$　　B. $\{2,5,6\}$

C. $\{5,-2,6\}$　　D. $\{2,-5,6\}$

4. 设集合 $A=\{(x,y)\mid a_1x+b_1y+c_1=0\}$，$B=\{(x,y)\mid a_2x+b_2y+c_2=0\}$，则方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 的解集是________，方程 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ 的解集是________.

5. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=ax+2\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，则 $a=$________.

6. 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

7.某班有 50 人,学校开了甲、乙、丙三门选修课,选修甲这门课的有 38 人,选修乙的有 35 人,选修丙的有 31 人,兼修甲、乙的有 29 人,兼修甲、丙的有 28 人,兼修乙、丙的有 26 人,甲、乙、丙三门均选的有 24 人.问:此班级中三门均未选的有多少人?

8.已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$,$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cup B=A$,$A\cap C=C$,求 a,m 的值.

C 考题演练

1.(2005 年全国Ⅰ)设 I 为全集,S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集,且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断正确的是 ( )

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

2.(2005 年全国Ⅱ)已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$,$N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$,则 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

B. $\{x\mid -4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

C. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

D. $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

3.(2005 年江苏)设集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{2,3,4\}$,则 $(A\cap B)\cup C$ 等于 ( )

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

4.(2005 年浙江文)设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$P=\{1,2,3,4,5\}$.$Q=\{3,4,5,6,7\}$,则 $P\cap(\complement_U Q)$ 等于 ( )

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4,5\}$

C. $\{1,2,6,7\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

5.(2005 年广东)若集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$,$N=\{x\mid x^2-3x=0\}$,则 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\{3\}$　　B. $\{0\}$

C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,3\}$

6.(2005 年江西)设集合 $I=\{x\mid |x|<3,x\in\mathbf{Z}\}$,$A=\{1,2\}$,$B=\{-2,-1,2\}$,则 $A\cup(\complement_I B)$ 等于 ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

1.4　含绝对值的不等式解法

学

总结、模仿、创新,这是内化知识、创新运用的基础.

预习探路

1.初中已学过的不等式的三条性质是什么?

提示　(1)若 $a>b$,则 $a+c>b+c$;

(2)若 $a>b,c>0$,则 $ac>bc$;

(3)若 $a>b,c<0$,则 $ac<bc$.

不等式的上述 3 条性质是解不等式的基础.

2.如何理解绝对值的意义?

提示　$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$

几何意义:在数轴上设点 P 的坐标为 a,$|a|$ 表示点 P 到原点的距离.

绝对值的性质:

①$|a|=|-a|$;

②$|ab|=|a||b|$;

③$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$;

④$|a+b|\leqslant|a|+|b|$(当且仅当 $ab\geqslant 0$ 时有 $|a+b|=|a|+|b|$);

⑤$|a-b|\geqslant||a|-|b||$(当且仅当 $ab\leqslant 0$ 时 $|a-b|=||a|-|b||$).

3.含绝对值的不等式有哪几种类型,其解法分别是什么?

提示　(1)不等式 $|x|<a$ 型.

若 $a\leqslant 0$,则解集为 $\varnothing$;若 $a>0$,则解集为 $\{x\mid -a<x<a\}$.其几何意义是不等式 $|x|<a(a>0)$ 表示数轴上到原点的距离小于 a 的点的集合,如图 1-4-1 所示.

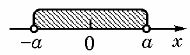


图 1-4-1

(2)不等式 $|x|>a$ 型.

若 $a<0$,则解集为 $\mathbf{R}$;若 $a\geqslant 0$,则解集为 $\{x\mid x>a$ 或 $x<-a\}$.其几何意义是不等式 $|x|>a(a>0)$ 表示数轴上到原点的距离大于 a 的点的集合,如图 1-4-2 所示.

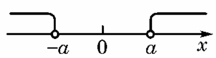


图 1-4-2

(3)不等式 $|ax+b|<c(c>0)$ 型.

首先化 a,使 $a>0$,把 $ax+b$ 视为一个整体,化为 $|x|<c$ 型,即解 $-c<ax+b<c$ 即可.

(4)不等式 $|ax+b|>c(c>0)$ 型.

转化为解 $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$ 即可.

(5) $c<|ax+b|<d$ 型.

其解法是转化为不等式组 $\begin{cases}|ax+b|>c & ①\\ |ax+b|<d & ②\end{cases}$

将①②分别解出,取交集即可.

疑难点解析

1. 解含绝对值的不等式的核心是将绝对值符号脱掉,转化为不含绝对值的不等式进行求解.

2. 在解含绝对值的不等式时,要注意转化过程中的等价性.

3. 本节知识要求对数形结合、分类讨论、方程和化归的数学思想方法重点理解.

4. 本节课的难点是含参不等式和有两个以上绝对值的不等式的解法.

典例归类

一、关于含一个绝对值的不等式的解法

例1 解不等式:(1) $|2x-3|>5$;(2) $1<|3x+4|\leqslant 6$.

分析 本题考查绝对值不等式的基本类型 $|ax+b|>c$ $(c>0)$ 和 $c<|ax+b|\leqslant d$. 注意解法有多样性.

解 (1)方法1:依绝对值的定义,原不等式可化为:

$\begin{cases}2x-3\geqslant 0\\ 2x-3>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-3<0\\ -(2x-3)>5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2}\\ x>4\end{cases}$ 或

$\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x>4$ 或 $x<-1$.

∴ 原不等式的解集为 $\{x|x>4$ 或 $x<-1\}$.

方法2:原不等式可化为 $2x-3>5$ 或 $2x-3<-5\Rightarrow x>4$ 或 $x<-1$,∴ 原不等式的解集为 $\{x|x>4$ 或 $x<-1\}$.

(2)原不等式可化为 $\begin{cases}|3x+4|\leqslant 6\\ |3x+4|>1\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}-6\leqslant 3x+4\leqslant 6\\ 3x+4>1 \text{ 或 } 3x+4<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{10}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ x>-1 \text{ 或 } x<-\frac{5}{3}\end{cases}$

∴ 原不等式的解集为

$\left\{x\middle|-\frac{10}{3}\leqslant x<-\frac{5}{3}\text{ 或 }-1<x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$.

> **说明** 对只含一个绝对值的不等式用方法2比较简捷;第(2)题也可依绝对值的几何意义来解,即 $1<|3x+4|\leqslant 6\Leftrightarrow -6\leqslant 3x+4<-1$ 或 $1<3x+4\leqslant 6\Leftrightarrow -\frac{10}{3}\leqslant x<-\frac{5}{3}$ 或 $-1<x\leqslant\frac{2}{3}$,即解集为 $\left\{x\middle|-\frac{10}{3}\leqslant x<-\frac{5}{3}\text{ 或 }-1<x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$.

思考 如何解不等式 $|ax+3|<2(a\neq 0)$.

分析:从类型上可以归为 $|ax+b|<c(c>0)$ 型不等式,但需注意去掉绝对值符号后,还要注意对 x 前的系数 a 进行讨论.

解:原不等式可化为 $-2<ax+3<2$,即 $-5<ax<-1$.

当 $a>0$ 时,解集为 $\left\{x\middle|-\frac{5}{a}<x<-\frac{1}{a}\right\}$;

当 $a<0$ 时,解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{a}<x<-\frac{5}{a}\right\}$.

二、关于含多个绝对值的不等式的解法

例2 解不等式:(1) $|2x-1|<|x-1|$;(2) $|x+2|+|x-3|\leqslant 12$.

分析 如何去掉绝对值符号是解本题的关键.

解 (1)方法1:$|2x-1|<|x-1|$ 两边平方得 $(2x-1)^2<(x-1)^2$,$3x^2-2x<0$,$x(3x-2)<0\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ 3x-2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ 3x-2>0\end{cases}\Rightarrow 0<x<\frac{2}{3}$,即解集为 $\left\{x\middle|0<x<\frac{2}{3}\right\}$.

> **说明** 这里两边平方时,只有两边均为非负数才能平方,否则就不等价,理论依据是 $|a|<|b|\Leftrightarrow a^2<b^2$.

方法2:令 $2x-1=0$,得 $x=\frac{1}{2}$;令 $x-1=0$,得 $x=1$.

$x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 把数轴分成三段,

原不等式可化为

$\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ 1-2x<1-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ 2x-1<1-x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1\\ 2x-1<x-1\end{cases}$,

解得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$ 或 $x\in\varnothing$,

∴原不等式的解集为 $\left\{x\middle|0<x<\frac{2}{3}\right\}$.

> **说明** "{"内求交,"或"求并,不要混淆.

(2)令 $x+2=0$,得 $x=-2$;令 $x-3=0$,得 $x=3$. -2,3 把数轴分成三段:$x<-2$,$-2\leqslant x\leqslant 3$,$x>3$,原不等式可化为

$\begin{cases}x<-2\\ -(x+2)+3-x\leqslant 12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ x+2+3-x\leqslant 12\end{cases}$ 或

$\begin{cases}x>3\\ x+2+x-3\leqslant 12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-2\\ x\geqslant-\frac{11}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ 5\leqslant 12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>3\\ x\leqslant\frac{13}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$-\frac{11}{2}\leqslant x<-2$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 或 $3<x\leqslant\frac{13}{2}$,将上述结果求并集得原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{11}{2}\leqslant x\leqslant\frac{13}{2}\right\}$.

> **说明** 上述解法称为零点分段讨论法,分段讨论后,要将各段结果求并集.

思考 如何解不等式 $|x-5|-|2x+3|<1$.

解:仍用零点分段法.

令 $x-5=0$,$2x+3=0$,得 $x=5$,$-\frac{3}{2}$.

$x=-\frac{3}{2}$ 和 $x=5$ 把数轴分成三段,

原不等式可化为

$\begin{cases}x\leqslant-\frac{3}{2}\\ -(x-5)-[-(2x+3)]<1\end{cases}$ 或

$\begin{cases}-\frac{3}{2}<x\leqslant 5\\ -(x-5)-(2x+3)<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>5\\ (x-5)-(2x+3)<1\end{cases}$,