

21 世纪高职高专新概念（财经类）系列教材

总主编 王宗湖

# 财经数学

主编 李少文

副主编 辛志娜 马延辉

对外经济贸易大学出版社

摇(京)新登字 182 号

摇图书在版编目(CIP)数据

摇财经数学/李少文主编. —北京:对外经济贸易大学出版社, 2006

摇(21世纪高职高专新概念(财经类)系列教材)

摇ISBN 7-81078-726-8

摇 I. 财... 摇 II. 李... 摇 III. 经济数学 - 高等学校: 技术学校 - 教材 摇 IV. F224.0

摇中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 099283 号

©摇2006 年摇对外经济贸易大学出版社出版发行

版权所有摇翻印必究

## 财经数学

李少文摇主编

责任编辑: 宋志华

---

对外经济贸易大学出版社

北京市朝阳区惠新东街 10 号摇摇邮政编码: 100029

邮购电话: 010-64492338摇摇发行部电话: 010-64492342

网址: <http://www.uibep.com>摇摇E-mail: uibep@126.com

---

唐山市润丰印务有限公司印装摇新华书店北京发行所发行

成品尺寸: 185mm × 260mm摇摇20.5 印张摇摇511 千字

2006 年 9 月北京第 1 版摇摇2006 年 9 月第 1 次印刷

---

ISBN 7-81078-726-8

印数: 0 001 - 5 000 册摇摇定价: 32.00 元

## 21 世纪高职高专新概念（财经类）系列教材编委会

总主编：王宗湖

副主编：于声涛 魏敏 鲍仕梅

编委：（按姓氏笔划为序）

王勇 马瑞萍 任继文 池小萍 陈国生

严国辉 杨东进 杨振科 张卿 武红

庞鸿藻 姜玉霞 倪荣 黄志平 符海菁

雷震

# 总摇摇序

当今世界，科学技术日新月异，知识经济初见端倪，国力竞争日趋激烈。针对这一知识化、信息化、全球化的时代特征，世界各国正在酝酿进行一场深刻的教育改革，以培养同时代要求相适应的高素质的劳动者和富有创造性的专业人才。

随着我国市场经济体制的逐步完善和对外开放的不断扩大，我国经济将完全融入世界经济体系之中。而教育水平的高低与经济的发展密切相关。作为我国高等教育的全新组成部分，职业教育应确立怎样的培养目标来适应时代要求，已成为人们普遍关心的问题。教育部在关于《面向21世纪教育振兴行动计划》的有关问题的回答中，对高职的培养目标是这样定位的：“高等职业教育应以培养基层和生产第一线技术应用型人才为办学宗旨，建立以基本素质和技术应用能力培养为主线的教学体系……专业课应加强针对性和实用性，实践教学要以培养学生专业应用能力为主……时间可占总课时数的1/3以上，至多可达50%……”可见，高等职业教育的培养目标，主要强调能力的培养和技术的应用，它要求我们的教育能够不断造就基本功扎实、操作能力强、又具有较高知识、技能的复合型、实用型人才。

教材作为“整个教育系统的软件”，它不仅反映着社会发展的要求，同时在某种程度上还直接决定着受教育者的培养质量，因而，世界各国都非常注意教材的开发和建设。但目前，我国职业教育教学和管理模式受传统教育思想和教育模式的影响较深，以能力为本位的教育观念还未能的教学领域完全形成，课程改革和教材开发还远远满足不了形势发展对高职教育的要求。因此，要适应21世纪知识经济时代发展和我国现代化建设的要求，高等职业教育必须加快课程体系改革和教材建设的步伐，建立符合时代特征和具有我国特色的职业教育新思想、新模式、新课程体系。有鉴于此，对外经济贸易大学出版社为适应教育发展的新形势，并努力推动高职高专院校的教材建设，委托我们组织全国职业院校的教师及具有企业工作经验的业务骨干，编写这套高职高专新概念（财经类）系列教材。本系列教材暂包括国际贸易、会计、市场营销、经贸英语、旅游管理、物流管理、电子商务等九大专业76门课程。

为使教材编写尽量适应高职教育的特点及时代发展的新要求，我们在编写过程中，尽可能把最新的研究成果吸收渗透到教材中来，在内容安排、教法选择、编写体例等方面也进行了较多的改革，甚至是新的尝试，使本套丛书具有以下特点：

## 1. 在内容安排上，突出了“能力培养”和“创新教育”，加大了技能训练的比重

本套丛书各册教材，在基础理论讲授之后，每篇均加列“技能训练”专章，通过采用案例分析等形式，引导学生对本篇的重点、难点内容进行分析、讨论、练习和模拟训练；每章结束后针对本章重点内容设计了个案分析、关键词、讨论与思考等项目，以

达到强化学生对经济与管理理论和业务环节处理技巧的掌握。这些新增加的关于“能力培养”和“技能训练”等新内容,约占整本教材篇幅的1/3,基本上达到了国家对职业教育改革的要求。这种编写体例的运用在目前经济类课程的教材中还较少见,希望这种新的尝试能经日后的教学实践验证,成为一种“能力培养”和“创新教育”的有效方法。

## 2. 在编写体例上,积极探索模块教学,使学生容易理清教材的知识体系,迅速系统牢固地掌握知识

本套丛书各册均采用“篇、章、节”的结构,每篇开始之前,均有一段概括性文字,对本篇内容的重点与难点、目的与要求加以说明,使在学习之前能对整篇主要内容有所了解;每章之下又提出了具体的学习目标及应掌握的难点,以便学生明确具体的学习任务。这样,每篇作为教材的大模块,包含着“章”这样的小模块,小模块又通过具体的学习任务的确立映衬着大模块,即使大模块之间篇篇相连,又与小模块环环相扣,组成系统的“知识链”。这种先将一本教材中的相关知识切块“溶解”,最后又串联起来的编写思路及形式,符合人类的分析综合的思维特点,有利于学生在学习过程中迅速而系统地掌握知识。

## 3. 在教学方法上,注意吸收国外流行的教学理念,并尝试教学改革与教法创新

模拟教学、案例教学和启发式教学,源于国外,现在是我国经济专业比较流行和推崇的教学方法。在本套教材的编写过程中,我们注重了上述教学方法的综合运用,旨在增强学生的主动参与意识和创新意识,提高学习的功效。同时,我们还进一步借鉴了培养MBA的教学经验,在本套教材的编写方法上尽量运用提示、启发、引导、讨论和模拟等方法,其目的是使学生运用所学知识在进行初步的分析、综合、比较、分类后,达到将知识、技能抽象概括和具体化,提高学生灵活分析和解决问题的能力。这样,既与国家对于高职教育培养目标相吻合,又适合学生的学习思维特点,并容易激发学生的学习兴趣,所以,较之传统的教学方法有了较大的改革与突破。

## 4. 在学科建设上,积极探索和建立复合型、技能型、实践型的新科目

江泽民同志在第三次全国教育工作会议上指出:“职业教育和成人教育要使学生掌握必要的文化知识的同时,具有熟练的职业技能和适应职业变化的能力。”可见,现代职业教育呼唤复合型、应用型、技能型的新学科的设立。为反映这些要求,我们在每个专业都增设了“综合技能训练”课程,并以此为基础编写了经济管理类各专业实践课的应用教材。该科目在内容上以各专业的主要业务为线索,将骨干核心课程的知识高度浓缩、有机串联。将主干课中没有系统讲授而实际工作中必然牵涉到的知识纳入其中,弥补了原来系列教材的欠缺与不足。同时,该系列教材大量采用模拟教学和案例教学,让学生以“业务员、经济师、总经理”的身份参与学习与训练,独自策划交易,进行经济活动等,刻意营造一种仿真情境,让学生在“训练”中学习,在“情景”中增长才干和积累经验,有效地将知识转变为专业性的技能技巧,提高其解决和处理实际问题的综合能力。总之,各专业“综合技能训练”课程的设立,是按照教育部“要多增加综合课”的要求而设立的新型试验科目,其主要目的是通过运用灵活有趣的模拟训练及案例教学等手法,启发诱导学生的立体思维,全面提高其独立操作经济业务的综合实践能

力。由于是初次尝试，所以希望大家多加关注，并提出指导性的建议。

本套丛书的编写，得到了有关学校领导和学者、教授的大力支持，并引用了有关作者的部分资料，在此一并表示谢意。

本套丛书无论从体例安排到内容设置，从知识点的归纳到教法的运用，都进行了大胆探索和尝试，意欲为我国财经类高职高专教材的编写与探索尽微薄之力，但由于时间和水平有限，疏漏和不足甚至是错误在所难免。希望广大教师、读者多提宝贵意见，以便日后充实与完善。

21 世纪高职高专新概念（财经类）系列教材编委会

2005 年 1 月

# 编写说明

为了满足高职高专加强教学改革和教材建设的需要，按照国家教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，我们组织全国部分高职高专院校多年从事财经类高等数学教学的专家、教授，依据财经类高等数学的具体要求，结合编者在教学改革中的探索和经验，编写了本教材。

本教材在编写过程中，注意做到了以下几点：

## 1. 体现“以应用为目的”的原则

贯彻“数学为体、经济为用”的原则，将学习数学知识与专业课需求紧密联系，与解决实际问题密切结合，做到学以致用。

## 2. 体现“以必需够用为度”的原则

着重讲清概念，淡化理论证明，注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决实际问题能力的培养和数学建模思想的形成。

## 3. 体现“因材施教”的原则

全书力求适合高职高专学生的特点，内容表述深入浅出，文字通俗易懂；例题剪代表性强，解法详细；各章、节均配备了习题，习题类型合理、内容丰富且剪针对性强，书末附有习题参考答案，为学生构建起自主学习的平台。

全书共分三篇十二章。第一篇：一元函数微积分。重点介绍极限、导数、连续、微分、积分等基本概念、计算方法以及在经济学中的应用。第二篇：线性代数与线性规划初步。主要介绍行列式和矩阵的基本概念和基本运算，以及线性方程组解的判定和求法，结合实例讲解投入产出数学模型，介绍线性规划问题的最基本最重要的方法——单纯形法。第三篇：概率论与数理统计基础。主要介绍概率论和数理统计的基本概念、基本理论和基本方法。

本书是高职高专财经类各专业的通用教材，也可以作为其他相近专业的教材和各类在职工作人员的自学用书。

本书由李少文担任主编，辛志娜、马延辉担任副主编。参加本书编写的有：赵淑宇（第一章、第十一章），储卫中（第二章、第十二章），荆庆林（第三章、第四章），李少文（第五章、第六章），辛志娜（第七章），马延辉（第八章、第九章、第十章）。全书由李少文总纂、修改和定稿，最后由王宗湖审定。

在本书的编写过程中，得到了有关领导、专家、学者的帮助和指导，参考了一些同类教材和文献，我们在此一并表示诚挚的谢意。

限于编者的水平，书中疏漏和不妥之处在所难免，企盼读者不吝指正。

编摇摇者

2006年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：[www.ertongbook.com](http://www.ertongbook.com)



# 目 录

---

## 第一篇 一元函数微积分

第一章 函数 .....	(3)
摇摇【学习目标】 .....	(3)
摇摇【重点难点】 .....	(3)
摇摇第一节 函数的概念 .....	(3)
摇摇第二节 初等函数 .....	(9)
摇摇第三节 经济学中常用的函数 .....	(14)
摇摇【关键名词】 .....	(17)
摇摇【综合练习】 .....	(17)
第二章 极限与连续 .....	(20)
摇摇【学习目标】 .....	(20)
摇摇【重点难点】 .....	(20)
摇摇第一节 数列的极限 .....	(20)
摇摇第二节 函数的极限 .....	(23)
摇摇第三节 极限存在准则和两个重要极限 .....	(28)
摇摇第四节 无穷小量和无穷大量 .....	(31)
摇摇第五节 函数的连续性 .....	(34)
摇摇第六节 极限在经济学中的应用 .....	(37)
摇摇【关键名词】 .....	(39)
摇摇【综合练习】 .....	(39)
第三章 导数与微分 .....	(41)
摇摇【学习目标】 .....	(41)
摇摇【重点难点】 .....	(41)
摇摇第一节 导数的概念 .....	(42)

摇第二节摇求导法则与导数基本公式 .....	(49)
摇第三节摇高阶导数 .....	(57)
摇第四节摇函数的微分 .....	(58)
摇摇【关键名词】 .....	(63)
摇摇【综合练习】 .....	(63)
<b>第四章摇中值定理与导数的应用 .....</b>	<b>(65)</b>
摇摇【学习目标】 .....	(65)
摇摇【重点难点】 .....	(65)
摇第一节摇中值定理 .....	(65)
摇第二节摇洛必达法则 .....	(67)
摇第三节摇函数的单调性 .....	(72)
摇第四节摇函数的极值与最值 .....	(74)
摇第五节摇导数在经济分析中的应用 .....	(77)
摇摇【关键名词】 .....	(82)
摇摇【综合练习】 .....	(82)
<b>第五章摇不定积分 .....</b>	<b>(84)</b>
摇摇【学习目标】 .....	(84)
摇摇【重点难点】 .....	(84)
摇第一节摇不定积分的概念与性质 .....	(84)
摇第二节摇换元积分法 .....	(89)
摇第三节摇分部积分法 .....	(96)
摇第四节摇不定积分在经济学中的应用 .....	(98)
摇摇【关键名词】 .....	(101)
摇摇【综合练习】 .....	(101)
<b>第六章摇定积分 .....</b>	<b>(104)</b>
摇摇【学习目标】 .....	(104)
摇摇【重点难点】 .....	(104)
摇第一节摇定积分的概念与性质 .....	(104)
摇第二节摇牛顿-莱布尼兹公式 .....	(110)
摇第三节摇定积分的换元积分法与分部积分法 .....	(114)
摇第四节摇广义积分 .....	(117)
摇第五节摇定积分的应用 .....	(119)
摇摇【关键名词】 .....	(124)
摇摇【综合练习】 .....	(124)

## 第二篇 线性代数与 线性规划初步

第七章 行列式 .....	(129)
摇摇【学习目标】 .....	(129)
摇摇【重点难点】 .....	(129)
摇摇第一节 行列式的概念 .....	(129)
摇摇第二节 行列式的性质 .....	(135)
摇摇第三节 行列式的计算 .....	(138)
摇摇第四节 克莱姆法则 .....	(143)
摇摇【关键名词】 .....	(147)
摇摇【综合练习】 .....	(147)
第八章 矩阵 .....	(150)
摇摇【学习目标】 .....	(150)
摇摇【重点难点】 .....	(150)
摇摇第一节 矩阵的概念与运算 .....	(150)
摇摇第二节 矩阵的初等变换与逆矩阵 .....	(157)
摇摇第三节 矩阵的秩 .....	(163)
摇摇【关键名词】 .....	(166)
摇摇【综合练习】 .....	(166)
第九章 线性方程组 .....	(169)
摇摇【学习目标】 .....	(169)
摇摇【重点难点】 .....	(169)
摇摇第一节 线性方程组的矩阵表示 .....	(169)
摇摇第二节 线性方程组解的判定 .....	(171)
摇摇第三节 解线性方程组 .....	(175)
摇摇第四节 投入产出数学模型 .....	(181)
摇摇【关键名词】 .....	(190)
摇摇【综合练习】 .....	(190)
第十章 线性规划初步 .....	(194)
摇摇【学习目标】 .....	(194)
摇摇【重点难点】 .....	(194)
摇摇第一节 线性规划问题的数学模型 .....	(194)

摇第二节摇线性规划问题的单纯形法 .....	(202)
摇摇【关键名词】 .....	(211)
摇摇【综合练习】 .....	(211)

## 第三篇摇概率论与 数理统计基础

第十一章摇概率论基础 .....	(217)
摇摇【学习目标】 .....	(217)
摇摇【重点难点】 .....	(217)
摇第一节摇随机事件 .....	(218)
摇第二节摇事件的概率 .....	(222)
摇第三节摇条件概率与乘法公式 .....	(226)
摇第四节摇事件的独立性 .....	(229)
摇第五节摇随机变量及其分布 .....	(231)
摇第六节摇随机变量的数字特征 .....	(243)
摇摇【关键名词】 .....	(247)
摇摇【综合练习】 .....	(247)
第十二章摇数理统计初步 .....	(250)
摇摇【学习目标】 .....	(250)
摇摇【重点难点】 .....	(250)
摇第一节摇简单随机样本 .....	(250)
摇第二节摇参数估计 .....	(255)
摇第三节摇参数的假设检验 .....	(262)
摇摇【关键名词】 .....	(267)
摇摇【综合练习】 .....	(267)
附表 A摇泊松分布数值表 .....	(270)
附表 B摇标准正态分布数值表 .....	(274)
附表 C摇 $\chi^2$ 分布上侧分位数表 .....	(276)
附表 D摇 $t$ 分布上侧分位数表 .....	(280)
附表 E摇 $F$ 分布上侧分位数表 .....	(282)
习题参考答案 .....	(292)
参考文献 .....	(312)

# 第一篇 一元函数微积分

在经济学研究中,微积分是最早被引进的数学方法之一.应用微积分的知识对经济与管理中的实际问题进行理论分析,已成为经济学研究的基本方法.著名的边际分析和弹性分析就是以微积分为基础的.因此,学好微积分内容,不仅对学习后继课程是必不可少的,而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也很有必要.本篇主要阐述微积分的基本内容和基本方法.重点介绍极限、导数、连续、微分、积分等基本概念与计算方法,并通过实例解释了一些主要概念的经济意义.通过本篇的学习,使学生理解微积分的基本概念,掌握微积分的基本计算方法,培养学生基本运算和分析问题、解决问题的能力,为以后各篇的学习打下基础.

# 第一章

## 摇摇函数摇摇数

### 课前准备

#### 【学习目标】

理解函数、复合函数、基本初等函数、初等函数、分段函数的概念;掌握函数的几个特性;熟悉基本初等函数的图像和性质;学会函数的复合与分解;掌握经济学中常用的函数,并学会经济分析中如何建立相应的函数关系.

#### 【重点难点】

1. 函数的几个特性,基本初等函数的图像和性质;
2. 复合函数的概念及其应用;
3. 经济学中常用的函数.

### 教学内容

函数是近代数学的基本概念之一,也是高等数学研究的主要对象.在科学技术和经济领域中,许多数量关系都可以用函数来表达.本章在初等数学的基础上,进一步研究函数的概念与基本性质,同时介绍经济学中几个常用的函数,为学习以后各章奠定必要的基础.

## 第一节 摇摇函数的概念

### 一、函数定义

在许多实际问题中,往往出现多个变量,且它们是相互联系、相互制约并按一定的对应规律变化的.

**例 1** 圆的面积  $S$  与它的半径  $r$  之间的关系由公式

$$S = \pi r^2, (r > 0)$$

给定. 其中,  $\pi$  是常量,  $r$  和  $S$  是变量. 当  $r$  在区间  $(0, +\infty)$  上任意取定一个数值时, 由上式计算就得到惟一确定的  $S$  值.

**例 2** 某人把钱存入银行的一年定期整存整取, 年利率为 2.25%. 则利息  $R$  与存款金额  $m$  的关系可由式子

$$R = m \cdot 2.25\%$$

确定. 其中, 2.25% 是常量,  $m$  和  $R$  是变量. 当  $m$  在区间  $(0, +\infty)$  上任意取定一个数值时, 由上式计算就得到惟一确定的  $R$  值.

**定义** 设  $D$  是一个非空数集,  $x$  和  $y$  是两个变量, 若有一个对应法则  $f$ , 使得每一个  $x \in D$ , 都有惟一确定的实数  $y$  与之对应, 则称  $f$  为定义在  $D$  上的一个函数关系, 称变量  $y$  是变量  $x$  的函数. 记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量.

集合  $D$  称为函数的定义域, 也可以记作  $D(f)$ . 它是自变量  $x$  的取值范围, 是使函数  $y = f(x)$  有意义的一个非空数集.

对于  $x_0 \in D$  所对应的  $y$  值, 称为当  $x = x_0$  时函数  $y = f(x)$  的函数值, 记作  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}$ , 并称  $f(x)$  在点  $x_0$  处有定义. 当  $x$  取遍数集  $D$  中的所有数值时, 就得到对应的全体函数值的集合  $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ , 称为函数  $y = f(x)$  的值域, 记作  $Z$  或  $Z(f)$ .

由函数定义可以看出, 定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素. 因此, 两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应法则都相同.

**例 3** 求函数  $y = \frac{2x+1}{\lg(3x-2)}$  的定义域.

解 为使函数  $f(x)$  有意义, 必须有

$$\begin{cases} 3x-2 > 0 \\ \lg(3x-2) \neq 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 3x-2 \neq 1 \end{cases}$$

即

$$x > \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 1$$

因此,  $y = \frac{2x+1}{\lg(3x-2)}$  的定义域为  $(\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$

**例 4** 判断  $y = x$  与  $y = \frac{x^2}{x}$  是不是相同的函数关系.

解  $y = x$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ , 而  $y = \frac{x^2}{x}$ , 化简得

$$y = x(x \neq 0) \text{ 的定义域是 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

因此, 虽然这两个函数在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的值是相同的, 但由于它们的定义域不同, 因而是两个不同的函数(见图 1-1 与图 1-2).

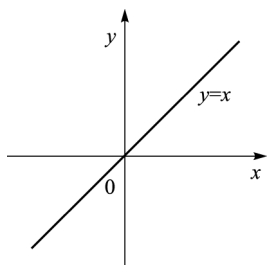


图 1-1

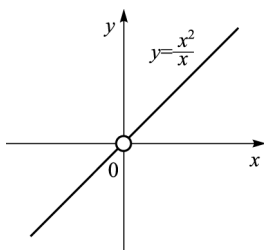


图 1-2

**例 5** 若  $f(x) = x^2 + 1$ , 求  $f(2), f(a), f(x+1), f(f(x))$ .

**解**  $f(2) = 2^2 + 1 = 5, f(a) = a^2 + 1$

$f(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$

$f(f(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

## 二、函数的表示法

常用的函数表示法有解析法、列表法和图像法.

### 1. 解析法

用数学式子表示变量之间函数关系的方法,称为解析法或公式法.

例如,  $y = \frac{1}{x(x-1)} + \sqrt{4-x^2}$ , 定义域为  $D(f) = [-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2]$ .

### 2. 列表法

用列表的形式表示变量之间函数关系的方法,称为列表法或表格法.

例如,人民币储蓄整存整取的存款期限与存款利率如表 1-1 所示.

表 1-1 人民币储蓄整存整取的存款期限与存款利率表

存款期限	三个月	六个月	一年	二年	三年	五年
年息 (%)	1.71	1.98	2.25	2.70	3.24	3.70

这个表格清楚地给出了存款利率与存款期限的对应关系.

### 3. 图像法

用几何图形表示变量之间函数关系的方法,称为图像法.

图 1-3 是用温度自动记录仪描绘的某天温度随时间变化的图像,它形象地给出了温度随时间变化的函数关系.

用解析法表示函数,便于理论分析和计算;列表法使用方便,一目了然;用图像法表示函数,形象直观,易看到变量  $y$  随  $x$  变化而变化的趋势.函数的三种表示法各有优缺点,应根据实际需要选择使用.

**例 6** 某超市实行会员购物累积奖励制度,购物满 1 000 元返利 2%,满 2 000 元返利 2.5%,满 5 000 元返利 3%. 则购物金额  $x$ (元)与返利金额  $y$ (元)的关系是

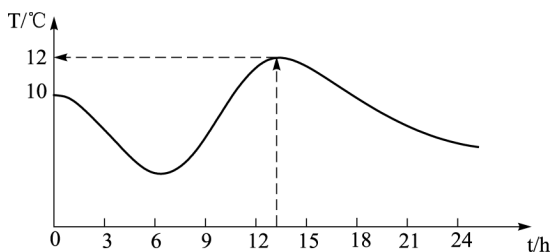


图 1-3

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1\,000 \\ 2\%x, & 1\,000 \leq x < 2\,000 \\ 2.5\%x, & 2\,000 \leq x < 5\,000 \\ 3\%x, & x \geq 5\,000 \end{cases}$$

像上述这种在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同的式子表示的函数,通常称为分段函数.

有些函数,在其定义域内具有不同的表达式,例如

$$(1) y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (2) y = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数. 它们的图像分别见图 1-4 和图 1-5.

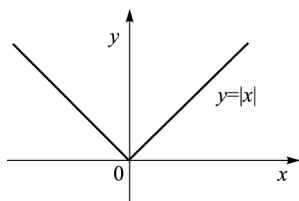


图 1-4

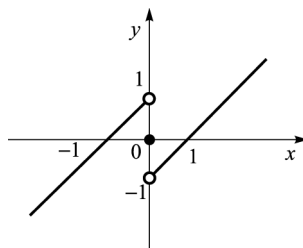


图 1-5

**注意** 分段函数是用几个数学式子合起来表示一个函数,而不是表示几个函数,在实际应用中常常用到这种表示形式.

**例 7** 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ , 求函数的定义域, 并求函数值  $f(-1)$ ,

$f(0), f(2)$ .

**解** 这是分段函数,分段函数的定义域是取各段函数自变量取值范围的并集,即  $[-2, 0) \cup [0, 1] \cup (1, 3]$ , 故定义域是  $[-2, 3]$ .

因为  $-1 \in [-2, 0)$ , 所以  $f(-1) = (-1)^2 = 1$ ,

因为  $0 \in [0, 1]$ , 所以  $f(0) = 2$ ,

因为  $2 \in (1, 3]$ , 所以  $f(2) = 1 + 2 = 3$ .

### 三、函数的几种特性

#### 1. 函数的有界性

**定义** 设函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果存在一个正数  $M$ , 使得对于所有的  $x \in I$ , 有  $|f(x)| \leq M$

成立, 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有界. 如果这样的正数  $M$  不存在, 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上无界.

例如, 函数  $y = \sin x$ , 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内总有  $|\sin x| \leq 1$ , 因此  $y = \sin x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内有界.

又如, 函数  $y = \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  内无界, 但在区间  $[1, +\infty)$  上,  $0 < y \leq 1$ , 因此  $y = \frac{1}{x}$  在区间  $[1, +\infty)$  上有界(如图 1-6).

因此, 在讨论函数  $y=f(x)$  的有界性时, 须指明自变量的取值范围.

#### 2. 函数的单调性

**定义** 设函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果对于任意的  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

(1)  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上单调增加, 称  $I$  为单调增加区间;

(2)  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上单调减少, 称  $I$  为单调减少区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 单调增加区间与单调减少区间统称为函数  $f(x)$  的单调区间.

**例 8** 证明: 函数  $y = 2x^2 + 1$  在区间  $(-\infty, 0)$  上是单调减少函数.

**证** 任取  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1^2 + 1) - (2x_2^2 + 1) = 2(x_1^2 - x_2^2) = 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

由于

$$x_1, x_2 \in (-\infty, 0), \text{ 且 } x_1 < x_2$$

所以

$$x_1 + x_2 < 0, x_1 - x_2 < 0$$

于是

$$f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$$

即

$$f(x_1) > f(x_2)$$

因此, 函数  $y = 2x^2 + 1$  在区间  $(-\infty, 0)$  上是单调减少函数.

#### 3. 函数的奇偶性

**定义** 设函数  $y=f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称(即若  $x \in D$ , 则必有  $-x \in D$ ),

(1) 如果对任意的  $x \in D$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $y=f(x)$  为偶函数;

(2) 如果对任意的  $x \in D$  都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $y=f(x)$  为奇函数.

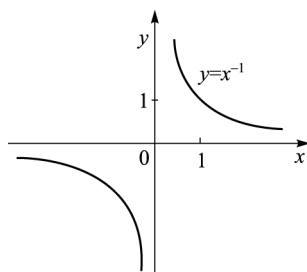


图 1-6