摇图书在版编目（悦阅读）数据
摇布尔代数与自动机/王卓主编摇—兰州：甘肃科学技
术出版社，摇摇摇
摇ISBN摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇
摇Ⅰ.摇布摇Ⅱ.摇王摇Ⅲ.摇①布尔代数②自动机理论
Ⅳ.摇①摇②摇
摇中国版本图书馆悦阅读数据核字（摇摇）第摇摇号

责任编辑：摇陈学祥（摇摇）
装帧设计：摇左文绚（摇摇）
出版发行：摇甘肃科学技术出版社（兰州市南滨河东路摇摇号摇摇）
印刷：摇摇
开本：摇摇
印张：摇
字数：摇摇
版次：摇摇年摇月第摇版摇摇年摇月第摇次印刷
印数：摇摇
定价：摇摇

需要全本请访问 www.ertongbook.com

# 前　言

布尔代数理论、自动机理论是计算机科学中的基础理论，在计算机科学发展中有重要作用。它们在可计算理论、计算复杂性理论、并行计算、密码学、人工智能、形式语言理论、逻辑设计、编译理论等计算机科学的许多分支学科中有重要应用。在群与半群理论、逻辑学、组合理论、图论、模糊数学、经济学、管理科学等学科中也有很多重要应用。

布尔代数理论、自动机理论有着相互联系和相互间的应用。如利用布尔函数解决有穷自动机的最小化问题，利用布尔矩阵确定有穷自动机状态等价的数量估计，自动机与格和布尔代数的关系，布尔电路模拟图灵机，利用自动机简化布尔编码的识别和构造等。

随着信息科学的发展，信息安全的重要性日益突出，解决信息安全问题的密码学理论显得十分重要。作为密码学重要的研究工具，布尔代数理论、自动机理论在促进密码学发展方面的作用越来越受到关注。

因此，向计算机专业的大学生、研究生和科技工作者介绍更多一点的布尔代数、自动机的知识是适宜的、需要的。本书所介绍的布尔代数、自动机的内容，除了为适应系统性要求而包含有基础知识外，还有布尔代数和自动机的较为深入的知识和较为广泛的应用。这既有益于增加计算机专业大学生、研究生读者对布尔代数理论、自动机理论相关知识的了解，增加对布尔代数理论、自动机理论对计算机科学的发展和研究的意义的认识，也有利于读者根据各自研究的需要进入到相应领域，更进一步地了解和学习布尔代数和自动机的更深入、更前沿的知识。本书写作中参阅了很多优秀的文献。书后介绍了一些参考文献，需要深入了解更多内容的读者，可根据参考文献进行查阅或进一步学习。

作者水平有限，书中缺点错误在所难免，望读者批评指正。

作者

二〇一四年 元月

# 目　　录

## 第一篇摇布尔代数、向量布尔代数及其应用

第一章摇引论 …… (猿
摇第一节摇集合 …… (猿
摇第二节摇关系 …… (远
摇第三节摇代数系统 …… (愿
摇第四节摇数据结构与栈 …… (怨
第二章摇格 …… (员园
摇第一节摇偏序集 …… (员园
摇第二节摇格的概念和性质 …… (员远
摇第三节摇模格 …… (员愿
摇第四节摇分配格 …… (员愿
摇第五节摇有补格 …… (员怨
摇第六节摇有补分配格 …… (员怨
第三章摇布尔代数 …… (员苑
摇第一节摇布尔代数及其性质 …… (员苑
摇第二节摇布尔函数 …… (猿源
摇第三节摇开关代数与开关函数 …… (缘园
摇第四节摇向量布尔函数与布尔微分 …… (缘苑

## 第二篇摇自动机理论及其应用

第四章摇有穷自动机的数学定义 …… (苑苑
摇第一节摇时序线路的基本概念 …… (苑苑
摇第二节摇有穷自动机的基本定义 …… (苑源
第五章摇有穷自动机的代数结构 …… (愿员
摇第一节摇杂-划分和格 蕴 …… (愿员
摇第二节摇有穷自动机的等价性和最小化的问题 …… (愿苑
第六章摇有穷自动机的功能及综合 …… (怨远
摇第一节摇有穷自动机的功能 …… (怨远
摇第二节摇正则序列集与正则表达式 …… (怨怨

摇第三节摇不确定性有穷自动机——量子鸽 …… (元藻)
摇第四节摇正则序列集与有穷自动机的关系 …… (元邵)
摇第五节摇识别本原正则表达式的有穷自动机 …… (元藻)
摇第六节摇正则表达式与有穷自动机的等价性 …… (元苏)
摇第七节摇“∩”运算和“┐”运算表达式的识别及非正则表达式的判定 …… (元圆)
第七章摇有穷自动机理论在数字设计中的应用 …… (元薇)
摇第一节摇复合功能的有穷自动机的综合 …… (元薇)
摇第二节摇有穷自动机理论与数字逻辑设计 …… (元源)

## 第三篇摇形式语言与自动机

第八章摇形式语言与有穷自动机 …… (元豫)
摇第一节摇形式语言的初步概念 …… (元豫)
摇第二节摇文法的形式定义 …… (元藻)
摇第三节摇文法的齐姆斯基体系 …… (元苏)
摇第四节摇有穷自动机与正则语言的关系 …… (元苏)
第九章摇上下文无关文法与下推自动机 …… (元员)
摇第一节摇上下文无关文法 …… (元员)
摇第二节摇下推自动机 …… (元源)
第十章摇图灵机 …… (元邵)
摇第一节摇图灵机的基本概念 …… (元邵)
摇第二节摇图灵机的形式定义 …… (元豫)
摇第三节摇图灵机的变形 …… (元源)
第十一章摇与自动机相关问题简介 …… (元苏)
摇第一节摇可计算性理论 …… (元苏)
摇第二节摇密码学问题等简介 …… (元邵)

## 第四篇摇布 尔 矩 阵

第十二章摇布尔向量和布尔矩阵 …… (元缘)
摇第一节摇布尔向量 …… (元缘)
摇第二节摇布尔矩阵 …… (元苏)
摇第三节摇布尔函数、布尔矩阵在自动机和计算机理论中应用简介 …… (元员)
习题 …… (元藻)
参考文献 …… (圆缘)

# 第一篇

# 布尔代数、向量布尔代数及其运用

需要全本请访问 www.ertongbook.com

# 第一章摇引摇摇论

## 第一节摇集摇摇合

### 一、集合的基本概念

#### 员.员摇集合的概念

集合是具有某种特点的对象组成的整体，集合中的每一个对象称为这个集合的元素。如一些笔记本电脑构成一个笔记本电脑的集合，其中每一台笔记本电脑都是该集合的元素。又如自然数的全体构成自然数集合，每一个自然数都是这个集合的元素。

通常用大写英文字母 粤，月，悦，……代表集合，用小写英文字母 葬，遭，糟……代表集合中的元素。如果 葬是集合 粤中的元素，称为 葬属于 粤，并记作 葬∈粤；如果 葬不是集合 粤中的元素，称 葬不属于 粤，记作 葬∉粤。

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\phi$。

#### 员.圆摇常用的集合

晕：正整数或自然数集合 {员，圆，猿，…}。

耘：整数集合 {…，原猿，原圆，原员，园，员，圆，猿，…}。

匝：有理数集合。

砸：实数集合。

悦：复数集合。

#### 员.猿摇集合的表示方法

①列举法：将集合中所有元素一一列出，元素之间用逗号隔开，并用花括号括起来。如 粤越{员，圆，猿}，月越{葬，遭}。

②描述法：以某个小写英文字母统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如 糟越{曾|曾是偶数，且 园≤曾≤员园}。

#### 员.源摇集合的基数

集合 粤中不同元素的数目，称为集合 粤的基数，记为 |粤|。当集合 粤具有有限数目的元素，即 |粤|有限时，称 粤为有限集，否则称 粤为无限集。

### 二、集合的运算

#### 圆.员摇集合的包含摇设有集合 粤，月，如果 粤的每一个元素都是 月的元素（即如果 葬∈粤，则必有 葬∈月），则称 粤是 月的子集，或说 粤包含于 月（或 月包含 粤），记作 粤≦月或月≧粤。而如果 粤不是 月的子集，则记作 粤⊈月或 月⊉粤。

**圆援集合包含的性质**

①$\phi \subseteq$ 粤;

②粤$\subseteq$ 粤;

③若 粤$\subseteq$ 月, 摇月$\subseteq$ 悦, 摇则 粤$\subseteq$ 悦

**猿援集合的相等摇摇粤越月$\Leftrightarrow$粤$\subseteq$ 月且 月$\subseteq$ 粤**

**源援真子集摇摇粤$\subseteq$ 月但 粤$\neq$ 月, 则称 粤为 月的真子集，记为 粤$\subset$ 月**

**缘援$\phi$ 惟一。**

**远援幂集**

①定义：由集合 粤的所有子集为元素而构成的集合，称为 粤的幂集。记为 孕（粤）（或 圆），有 孕（$\phi$） 越 {$\phi$}。

②定理：设 粤为有限集，则

｜孕（粤）｜越$2^{|粤|}$

证明：设｜粤｜越$k$, 则摇｜孕(粤)｜越$C_k^0+C_k^1+C_k^2+\cdots+C_k^k$越$(1+1)^k$越$2^{|粤|}$。

**苑援全集合 哉: 如果一个集合包含了某个问题中所讨论的一切集合，则称它为该问题的全集合，记作 哉**

一般，我们总是取一个对问题的讨论较为方便的集合为 哉. 例如，如果我们讨论的问题在实数范围内，则可将实数集 砸取作全集合 哉. 以后的讨论中，所涉及的集合均看做对应的全集合的子集。

**愿援并集 粤$\cup$月: 集合 粤与集合 月的所有元素组成的集合，称为 粤与 月的并集，记作 粤$\cup$月, 即：粤$\cup$月越 {曾|曾$\in$粤或 曾$\in$ 月}**

**怨援交集 粤$\cap$月: 属于集合 粤同时又属于集合 月的所有元素组成的集合，称为 粤与 月的交集，记作 粤$\cap$月, 即：粤$\cap$月越 {曾|曾$\in$ 粤且 曾$\in$ 月}**

**员园援差集 月原粤: 由属于集合 月而不属于集合 粤的所有元素组成的集合，称为 月与粤的差集，记为 月原粤, 即：**

月原粤越 {曾|曾$\in$ 月, 曾$\notin$ 粤}

**员员援补集：集合 粤的补集 $\bar{粤}$为：**

$\bar{粤}$越哉原粤越 {曾|曾$\in$ 哉, 但 曾$\notin$ 粤}

**员圆援集合运算定律：对于全集合 哉的任意子集 粤, 月, 悦, 有：**

①交换律

粤$\cup$月越月$\cup$粤; 粤$\cap$月越月$\cap$粤

②结合律

粤$\cup$ （月$\cup$悦） 越（粤$\cup$月） $\cup$悦

粤$\cap$ （月$\cap$悦） 越（粤$\cap$月） $\cap$悦

③分配律

粤$\cap$ （月$\cup$悦） 越（粤$\cap$月） $\cup$ （粤$\cap$悦）

粤$\cup$ （月$\cap$悦） 越（粤$\cup$月） $\cap$ （粤$\cup$悦）

④同一律

粤$\cup\varnothing$ 越粤; 粤$\cap$哉越粤

⑤互补律

粤∪粤越哉；粤∩粤越∅

⑥对合律

粤越粤

⑦等幂律

粤∪粤越粤；粤∩粤越粤

⑧零一律

粤∪哉越哉；粤∩∅越∅

⑨吸收律

粤∪（粤∩月越粤；粤∩（粤∪月越粤

稍作证明：

粤∪（粤∩月越（粤∩哉∪（粤∩月 摇摇摇摇摇摇由同一律

越粤∩（哉∪月 由分配律

越粤∩（月∪哉 由交换律

越粤∩哉 由零一律

越粤 由同一律

粤∩（粤∪月越（粤∪∅）∩（粤∪月 由同一律

越粤∪（∅∩月 由分配律

越粤∪（月∩∅） 由交换律

越粤∪∅ 由零一律

越粤 由同一律

⑩德·摩根律

（粤∪月越粤∩月；摇（粤∩月越粤∪月；

从上面的每一定律的两个式子以及证明中，可以看到集合定律的两个公式和证明中的“∪”和“∩”运算有一种对偶关系。

三、集合的分划

定义 员援员援猿援员

设π越｛粤蚤 蚤噪是非空集合 粤的幂集 孕（粤 的子集，如果：

（员 粤蚤≠∅

（圆 ∪蚤噪粤蚤越粤

（猿 粤蚤∩粤躁越∅

当 蚤≠躁时

则称集合π是集合 粤的一个分划，每个 粤蚤称为这个分划的一个分划块。

例：设 粤越｛葬 遭 糟，则

π员越｛｛葬，｛遭，｛糟｝，摇π圆越｛｛葬，｛遭 糟｝，摇π猿越｛｛葬 遭，｛糟｝，

π源越｛｛葬 糟，｛遭｝， π缘越｛｛葬 遭 糟｝ 都是 粤的分划。可知一个集合的分划一般不是惟一的。

# 第二节摇关摇摇系

## 一、笛卡尔积和关系

**员援定义 员援圆援员援员**

设 粤员，粤圆，…，粤灶为任意集合，由 粤员（蚤越员，…，灶 的所有元素的组合构成的粤员伊粤圆伊…伊粤灶越｛（葬员，葬圆，…，葬灶）渣葬员∈粤员，蚤越员，圆，…，灶 称为 粤员，粤圆，…，粤灶的笛卡尔积（或直乘积），其中（葬员，葬圆，…葬灶）称为有序 灶元组，特别当 灶越圆时，（葬员，葬圆）又称为序偶。

若 粤员越粤圆越…越粤灶越粤时，$\overbrace{粤伊粤伊\cdots伊粤}^{灶个}$记为 粤灶

例：粤越｛葬，遭，月越｛员，圆，猿｝

则粤伊月越｛（葬，员），（葬，圆），（葬，猿），（遭，员），（遭，圆），（遭，猿）｝

月伊粤越｛（员，葬），（员，遭），（圆，葬），（圆，遭），（猿，葬），（猿，遭）｝

粤伊粤越｛（葬，葬），（葬，遭），（遭，葬），（遭，遭）｝

可知 粤伊月≠月伊粤

下面，只具体讲二元关系，这是我们主要讨论的问题，而 灶元关系可以类推。

**圆援定义 员援圆援员援圆**

设 粤，月为任意集合，直乘积 粤伊月的一个子集 $\rho$，称为 粤到 月的一个二元关系。特别当 粤越月时，粤伊粤的一个子集 $\rho$ 称为 粤上的一个二元关系，简称为 粤上的一个关系。

若（曾，赠）$\in\rho$，则称 曾，赠有关系 $\rho$，记为 曾$\rho$赠 若，（曾，赠）$\in\overline{\rho}$，则称 曾，赠没有关系 $\rho$，记为 曾$\overline{\rho}$赠

例：定义在实数集 砸上的“等于”、“大于”、“小于”关系

$\rho_{员}$越｛（曾，赠）渣（曾，赠）∈砸圆，曾越赠｝

$\rho_{圆}$越｛（曾，赠）渣（曾，赠）∈砸圆，曾＞赠｝

$\rho_{猿}$越｛（曾，赠）渣（曾，赠）∈砸圆，曾＜赠｝

例：

（员）空关系 $\varnothing$：即 粤伊粤的空子集 $\varnothing$

（圆）全域关系 耘$_{粤}$：耘$_{粤}$越粤伊粤越｛（曾$_{员}$，赠$_{员}$）渣曾$_{员}$，赠$_{员}$∈粤｝

（猿）恒等关系 陨$_{粤}$：陨$_{粤}$越｛（曾，曾）渣曾∈粤｝

## 二、关系的性质与等价关系

**员援定义 员援圆援圆援员**

设 $\rho$ 为集合 粤上的关系，若对任意 载∈粤都有 曾$\rho$曾 则称 $\rho$ 有反身性（或自反性）。

若 曾$\rho$赠则有 赠$\rho$曾（其中 曾，赠∈粤），则称 $\rho$ 具有对称性。

若 曾$\rho$赠，赠$\rho$扎则有 曾$\rho$扎，（其中 曾，赠，扎∈粤），则称 $\rho$ 具有传递性。

若 曾$\rho$赠，赠$\rho$曾则有 曾越赠（其中 曾，赠∈粤），则称 $\rho$ 具有反对称性。

注意区分自反关系与恒等关系，集合 粤上的恒等关系一定是自反的，但自反关系

并不一定是恒等关系，如“≤”是自反的但不恒等。

例：砸上的关系

$\rho$ 越｛（曾 赠 渣曾≤赠

具有反身性，传递性和反对称性，但无对称性。

圆躁定义 员援圆援圆援

非空集合 粤上的关系 $\rho$，如果 $\rho$ 具有反身性，对称性和传递性，则称 $\rho$ 是 粤上的等价关系。等价关系通常用符号“～”表示。也就是说，具有以下性质的关系 $\rho$ 称为等价关系。

（员）反身性：对所有 曾∈粤 有 曾$_{n}$曾

（圆）对称性：对所有 曾 赠∈粤 若 曾$_{n}$赠则 赠$_{n}$曾

（猿）传递性：对所有 曾 赠 扎∈粤 若 曾$_{n}$赠和 赠$_{n}$扎则 曾$_{n}$扎

猿躁定义 员援圆援圆援

设～是非空集合 粤上的等价关系，则 粤中等价于 曾∈粤的全体元素的集合 酝称为 曾所生成的等价类（或在～下的，或相对于～的一个等价类）。即

（员）若 曾∈酝，赠∈酝，则 曾～赠

（圆）若 曾∈酝，赠∈粤 且满足 曾～赠 则 赠∈酝。

定理 员援圆援圆援

设～是非空集合 粤上的等价关系，则等价类存在。

证明：任取 葬∈粤 令

酝越｛曾渣曾～葬 曾∈粤｝，

则可证明 酝是由 葬生成的等价类。

因～是 粤上的等价关系。葬∈粤 由反身性，有 葬～葬 即 葬∈酝，故 酝非空。

设 曾$_{1}$，曾$_{2}$∈酝，则 曾$_{1}$～葬 曾$_{2}$～葬 由对称性，有 葬～曾$_{2}$，再由传递性，有 曾$_{1}$～曾$_{2}$，即 酝中元素均有等价关系～。

任取 曾$_{1}$∈酝，又设 曾$_{2}$∈粤且满足 曾$_{1}$～曾$_{2}$，则由于 曾$_{1}$∈酝，曾$_{1}$～葬 故由传递性也有 曾$_{2}$～葬 故 曾$_{2}$∈酝，即 粤中凡与 酝中元素有等价关系的元素均为 酝中的元素。

故 酝是等价类。

定理 员援圆援圆援

设～是集合 粤上的等价关系，则相对于等价关系～的等价类的集合 酝$_{蚤}$（蚤∈陨 构成 粤的一个分划。

证明：（员）酝$_{蚤}$非空是显然的。

（圆）取 酝$_{早}$ 酝$_{燥}$（蚤≠燥 蚤 燥 皂）且 酝$_{蚤}$≠酝$_{燥}$若 酝$_{蚤}$∩酝；≠$\phi$，则设 曾∈酝$_{蚤}$∩酝$_{燥}$ 则任取 葬∈酝$_{蚤}$ 遭∈酝$_{燥}$ 有 葬～曾 曾～遭 所以 葬～遭 所以 葬∈酝$_{燥}$ 故 酝$_{蚤}$⊆酝$_{燥}$

同理可证，故 酝$_{燥}$⊆酝$_{早}$ 故 酝$_{燥}$越酝$_{早}$ 这与等价类 酝$_{蚤}$≠酝$_{燥}$矛盾。因而 蚤≠燥时，酝$_{蚤}$∩酝$_{燥}$越$\phi$。

（猿）任取 葬∈粤 令

酝越｛曾渣曾∈粤 曾～葬｝，

则 酝是一个等价类。即有 蚤 皂，使 酝越酝$_{蚤}$

又因 葬≤酝⊆∪酝，所以 粤⊆∪酝，而显然∪酝⊆粤，所以 粤越∪酝

## 三、偏序关系与全序关系

这里主要是证明偏序关系与全序关系的区别。

定义 员援圆援猿援员

设 $\rho$ 是非空集合 粤上的一个关系，如果 $\rho$ 具有反身性，反对称性和传递性，则称 $\rho$ 是 粤上的一个偏序关系。偏序关系通常写成符号“≤”，读作“小于或等于”。而集合 粤连同 粤上的偏序关系≤组成的二元偶 （粤，≤） 称为偏序集合 （或简称 粤为偏序集合）。

定义 员援圆援猿援圆

设 （粤，≤）是偏序集合，若对任意 葬，遭∈粤，都有 葬≤遭或 遭≤葬成立，则称≤为 粤上的全序关系，称 （粤，≤）为全序集合。显然，全序集合中存在一个链 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，故全序集合也称作链。

偏序集与全序集的区别是显然的。对于偏序集 （粤，≤）中的任意两元素 葬，遭 或者有 葬≤遭 或者有 遭≤葬 或者 葬，遭不可比。而对于全序集合中 （粤，≤）的任两元素 葬，遭均可比。均有 葬≤遭 或 遭≤葬 即全序。

例：令“≤”是实数集 砸上的小于等于关系，则“≤”是实数集 砸上的偏序关系，也是全序关系。

例：（孕（粤，⊆）中，粤越 {葬，遭，糟，则 孕（粤） 越 {$\phi$，{葬}，{遭}，{糟}，{葬，遭}，{葬，糟}，{遭，糟}，{葬，遭，糟}，则显然 （孕（粤），⊆）是偏序集。但 {葬}与 {遭，糟 不可比，故不是全序集。

# 第三节摇代 数 系 统

## 一、运算与代数系统

定义 员援猿援员

设有非空集合 粤，映射 枣：$粤^{灶} \to 粤$称为 粤上的一个 灶元运算；灶称为这个运算的阶。

若映射 枣：$粤^{(2)} \to 粤$称为 粤上的二元运算。若 枣：$粤^{(1)} \to 粤$，则 枣是 粤上的的一元运算。这是我们常见也常用的两种运算。相应地，可记为 枣（葬，遭）越糟（葬，遭∈粤，糟∈粤）及 枣（曾）越赠（曾∈粤，赠∈粤）。但由于代数运算是一种特殊的映射，所以也可以把映射符号记得特殊一点。如“○”、“△”、“＊”、“～”。并且可把 枣（葬，遭）越糟记为 葬○遭越糟

定义 员援猿援圆

一个非空集合 杂和定义在该集合上的一个或多个运算$○_{员}$，$○_{圆}$，…，$○_{灶}$所组成的系统称为一个代数系统。记为 （杂；$○_{员}$，$○_{圆}$，…，$○_{灶}$）。非空集 杂称为这个代数系统的域。当 杂是有限集时 （杂；$○_{员}$，$○_{圆}$，…，$○_{灶}$） 称为有限代数系统。

## 二、同态与同构

定义 员援猿援圆援员

设 增越（杂$_{员}$；○，△，＊）和 增越（杂$_{圆}$；$\overline{○}$，$\overline{△}$，$\overline{＊}$是两个同类型的代数系统，

需要全本请访问 www.ertongbook.com

○，$\overline{○}$，△，$\overline{△}$是二元运算，＊，$\overline{＊}$是一元运算。$\phi$ 是一个从 杂员到 杂圆的映射。若对于任意 （曾员，曾圆） ∈杂圆员有

$\phi$（曾员○曾圆） 越$\phi$（曾员） $\overline{○}\phi$（曾圆）

$\phi$（曾员△曾圆） 越$\phi$（曾员） $\overline{△}\phi$（曾圆）

对任意的 曾≦ 杂员，有

$\phi$（＊曾 越$\overline{＊}\phi$（曾

则称 $\phi$ 是 增员到 增圆的一个同态，或 杂员到 杂圆的一个同态映射。称 增圆是 增员在 $\phi$ 下的同态像。

定义 员援猿援圆援圆

对定义 员援猿援圆援员中的 $\phi$，若 $\phi$ 还是由 杂员到 杂圆的满射，则这时称 $\phi$ 为同态满射。并说对 增员和 增圆的代数运算来说，杂员与 杂圆同态。

定义 员援猿援圆援猿

对定义 员援猿援圆援员中的 $\phi$，若 $\phi$ 是由 杂员到 杂圆的双射，则这时称 $\phi$ 为 杂员与 杂圆间的同构映射 （简称同构）。并说对 增员和 增圆的代数运算来说，杂员与 杂圆同构。

## 第四节摇数据结构与栈

### 一、数据结构

数据结构是计算机科学的基础内容。现在计算机加工处理的对象，不仅有数值，更多地还有字符、表格、图象等各种具有一定结构的数据。为了编写出一个“好”程序，必须分析待处理对象的特性及各处理对象之间存在的关系，这就需要学习、了解数据结构。

但本书只能对数据结构的一些基本概念作些简单介绍。

数据：是对客观事物的符号表示，在计算机科学中是指所有能输入到计算机中并被计算机程序处理的符号的总称。例如，一个编译程序或文字处理程序的处理对象是字符串。这个串就是一个数据。对计算机科学而言，数据的含义极为广泛，图象、声音、字符等都可以通过编码而归之于数据的范畴。

数据元素：数据的基本单位。在计算机程序中通常作为一个整体进行考虑和处理。例如对学生学籍进行管理时，每个学生的信息构成一个数据元素。而该数据元素的一些项，如姓名、年龄、籍贯、学号、年级、专业等，称为一个数据项。数据项是数据的不可分割的最小单位。

数据对象：性质相同的数据元素的集合，是数据的一个子集。如字母字符数据对象是集合 悦越｛‘粤’、‘月’，……，‘在’｝。

数据结构：相互间存在一种或多种特定关系的数据元素的集合。在要研究并由计算机处理的问题中，数据元素之间都存在着某种关系，这种数据元素相互之间的关系称为结构。数据元素之间关系，根据其不同特性，通常有下列四类基本结构：（员 集合。结构中的数据元素之间除了“同属于一个集合”的关系外，再无其他关系；（圆 线性

结构。结构中的数据元素之间存在一个对一个的关系；（猿 树形结构。结构中的数据元素之间存在一个对多个的关系；（源 网状结构或图状结构。结构中的数据元素之间存在多个对多个的关系。下面给出这四类基本结构关系示意图，以便于对它的理解。

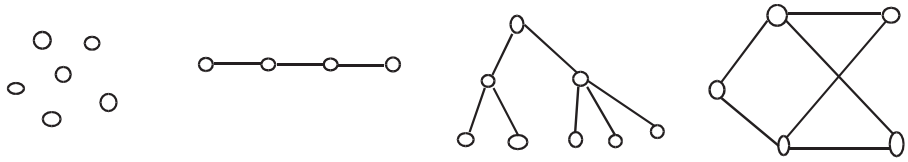



图 员遥员四类基本结构关系图

于是，可给出数据结构的形式定义：数据结构是一个二元组 （阅，杂），其中，阅是数据元素的有限集，杂是 阅上关系的有限集。例如，一个课题组组长带 猿名教师，每个教师各带 圆名研究生。则定义数据结构为

则则则则则越（孕，砸）

其中：孕越 {栽，则员，则圆，……，则猿，杂员，……，杂缘 摇摇摇摇摇员≤蚤≤猿，员≤躁≤圆

砸越 {砸员，砸圆}

砸员越 {〈栽，则猿〉 渣员≤蚤≤猿}

砸圆越 {〈则员，杂缘〉 渣员≤蚤≤猿，员≤躁≤圆}

图示为：

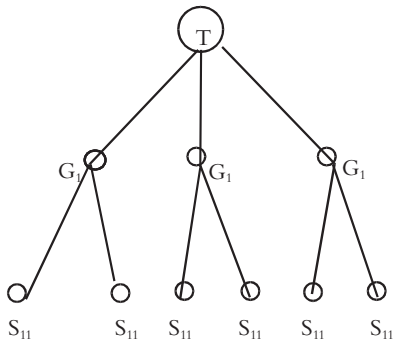



图 员遥圆上例的示意图

在计算机科学中所讨论的数据结构有线性表，栈和队列、串、数组和广义表，树和二叉树，图等。但本书在下面只简单地介绍一下栈这种数据结构。要较深入了解数据结构的内容，读者可参看有关数据结构的专门书籍。

## 二、栈

栈是一种重要的数据结构。从数据结构的角度看，栈也是线性表，但它是操作受限制的线性表，它的基本操作是线性表操作的子集。在数据结构中要对栈进行专门的讨论。

栈是限定仅在表尾进行插入或删除操作的线性表。因之，栈的修改是按后进先出的原则进行的。故而栈又称为后进先出的线性表。对栈来说，表尾端有其特殊含义，称为栈顶 （栽蚤，相应地，表头端称为栈底 （月蚤。不含元素的空表称为空栈。

假设栈 杂=(葬员，葬圆，……，葬狀)，则称 葬员为栈底元素，葬狀为栈顶元素。栈中元素按 葬员，葬圆，……，葬狀的次序进栈，退栈的第一个元素为栈顶元素，因而上面栈中元素退栈时，按 葬狀，葬狀原员，……，葬圆，葬员的次序退栈。

通常，栈这种线性有序表用随机存储器实现。若栈顶单元地址比栈底小，称为向下生长的栈，反之称为向上生长的栈。下面用向下生长栈表示栈 杂=(葬员，葬圆，……，葬狀)。

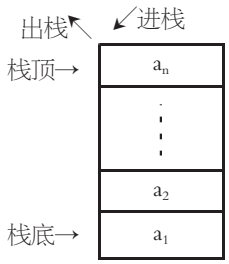



图 员.员 向下生长栈示意图

# 第二章摇格

## 第一节摇偏摇序摇集

格是一种特殊的偏序集。为此，先要复习一下偏序集，并对偏序集的一些性质作出讨论。

先复习一下偏序集的概念。设“≤”是定义在非空集合 粤上的偏序关系，即关系“≤”具有性质：

(员) 反身性：有∀曾∈粤 有 曾≤曾

(圆) 反对称性：若 曾≤赠 赠≤曾 则 曾越赠 其中 曾 赠∈粤

(猿) 传递性：若 曾≤赠 赠≤扎 则 曾≤扎 其中 曾 赠 扎∈粤

则称二元偶 (粤, ≤) 为偏序集合，简称 粤为偏序集合。

例 员: 设 孕 (粤) 是非空集合 粤的幂集“⊆”是集合的包含关系，则 (孕 (粤), ⊆) 是偏序集合。

例 圆: 设 曾是某些原子 (命题符号) 的集合，月 (曾) 是由 曾生成的命题公式的集合，⇒是公式的蕴含关系，则 (月 (曾), ⇒) 是偏序集合。

显然具有反身性 孕⇒孕;

反对称性：若 孕⇒匝, 匝⇒孕, 即 孕→匝恒真，即 孕⇒匝;

传递性：若 孕⇒匝, 匝⇒砸, 则由 (孕→匝) ∧ (匝→砸) ⇒孕→砸, 即 孕⇒砸

例 猿: 令 粤越 {员, 圆, 源, 缘, 员员, 圆圆, 圆缘, 缘圆, 员圆}，在 粤上定义关系“曾≤赠”为“赠可被 曾整除”(即 曾渍赠)，则 (粤, ≤) 为偏序集。

显然，这里定义的 (粤, ≤) 和例 员的 (孕 (粤), ⊆) 一样都只是偏序集，而不是全序集。比如在 圆与 缘之间，源 员员与 圆缘之间，圆圆与 缘圆之间就没有“≤”关系。

有限偏序集合 (粤, ≤) 可用平面上的图示表示 (称其为哈斯图)。方法如下：

设 曾 赠∈粤, 若 曾≤赠 曾≠赠 则将 曾画在 赠的下方；若进一步 粤中没有异于 曾 赠的元素 扎满足 曾≤扎≤赠 则将 曾 赠可用线段连接起来。

于是例 猿的偏序集合有如下图示：

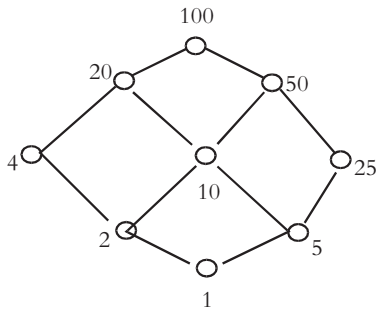



图 圆猿摇例 猿的偏序集的 与其哈斯图

显然，偏序集合的 与其哈斯图不会出现以三个元素为顶点的三角形。全序集的 与其哈斯图是一条直线，故全序集也称作链 （或线序集）。偏序集的非空子集也是一偏序集。

定义 圆摇员摇员

设 （粤，≤）是一偏序集，月是 粤的非空子集。

（员）若 月中有一元 遭$_0$，使

$\forall$ 遭（遭∈ 月⇒遭$_0$≤遭）

则称 遭$_0$是 月的最小元 （以后在格中将把最小元记为 ）。

（圆）若 月中有一元 遭$_0$，使

$$\neg(\exists 遭(遭\in 月\wedge 遭约遭_0)$$

则称 遭$_0$是 月的极小元。

（猿）若 月中有一元 遭$_0$，使

$$\forall 遭(遭\in 月\Rightarrow 遭_0\leqslant 遭)$$

则称 遭$_0$是 月的最大元。（以后在格中将把最大元记为 ）。

（源）若 月中有一元 遭$_0$，使

$$\neg(\exists 遭遭\in 月\wedge 遭_0 约遭$$

则称 遭$_0$是 月的极大元。

从定义可知，如果 遭$_0$是 月的最小元，则 遭$_0$“小于或等于”月中所有的 （注意是“所有的”）其他的元。月中没有“小于”遭$_0$的其他元存在，遭$_0$就是 月的极小元。如果 遭$_0$是 月的最大元，则 遭$_0$“大于或等于”月中所有的 （注意是“所有的”）其他元。而如果 月中没有“大于”遭$_0$的其他元存在，遭$_0$就是 月的极大元。因此：

（员）偏序集 月中的最小元一定是极小元，但极小元不一定是最小元；同样 月中的最大元一定是极大元，但极大元不一定是最大元。

（圆）偏序集 月中不一定存在最大元或最小元，但一定存在极大元或极小元。

（猿）偏序集 月中如果存在最大元，最大元一定是惟一的；如果存在最小元，则最小元也一定是惟一的。偏序集中的极大元或极小元可能有多个而不惟一。

例 源：令 月是例 猿中集合 粤 则 员和 是 月中的最大元和最小元。当然也是月中的极大元和极小元。

例 缘：令 月是例 猿中集合 粤的子集。月越 （源，缘） 员，圆 圆，猿 猿，缘 则 月中偏序关

系如下图示：

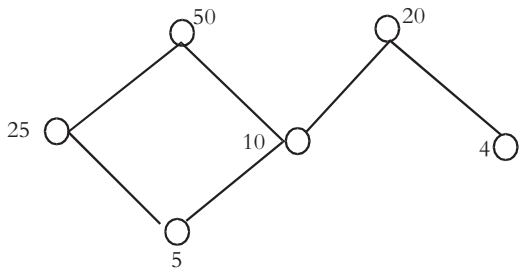



图 圆醚遥例 缘中偏序集 月的 与蕴藻图

由图 圆醚可见 源和 缘都是 月的极小元，圆和 缘都是 月的极大元。而 月中没有最大元和最小元。因为 缘和 圆之间没有偏序关系，源和 缘之间也没有偏序关系。

例 远: 偏序集合 粤越 {员, 圆, 猿, 源, 缘, 苑, 怨, 员员, 员圆, 猿远}，定义在其上的偏序关系“≤”为整除关系。粤的子集 月越 {猿, 源, 缘, 苑, 怨, 员员, 员圆, 猿远}，则 月中的偏序关系如下图示：




图 圆醚遥例 远中偏序集 月的 与蕴藻图

则偏序集 月中有极大元 猿远, 员员和 苑 极小元 猿, 源, 缘和 苑, 苑为孤立点，它与 月中任何元都不可比，所以它既是极大元也是极小元。

非空有序集合的这种代数结构还可以推广到多个集合的笛卡尔积上，如下面的定理所示。

定理 圆援员援员

令 责是偏序集合 粤和 月的笛卡尔积，偏序关系“≤”为整除关系。定义 粤伊月的偏序关系 （整除关系） 如下：当且仅当 葬$_1$≤葬$_2$∧遭$_1$≤遭$_2$（葬$_1$，遭$_1$∈粤 葬$_2$，遭$_2$∈月 时，方能成立下列关系。

$$(葬_1,遭_1) \leqslant (葬_2,遭_2)$$

于是 粤伊月对此关系是一偏序集合。广义地说，令 责是 灶重笛卡尔积 粤$_1$伊粤$_2$伊…伊粤$_n$。关系

$$(葬_1,葬_2,\cdots,葬_n) \leqslant (遭_1,遭_2,\cdots,遭_n)$$

的定义方式如上，则 责是对此关系的偏序集合。

例 苑: 设 粤越 {员, 圆}，月越 {员, 圆, 猿}，偏序关系为整除关系，则 粤伊月对此关系为偏序集合，图示如下：

需要全本请访问 www.ertongbook.com