



北京市东城区高三年级综合练习(一)

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 48 分)

参考公式:

①如果事件 A, B 互斥,那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$

②如果事件 A, B 相互独立,那么 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

③如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

④球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$ (其中 R 表示球的半径)

⑤球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (其中 R 表示球的半径)

一、选择题 本大题共 12 个小题,每小题 4 分,共 48 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1. 设全集 U, A, B 是 U 的子集,若 $A \cap B = \emptyset$, 则集合 $\{A, B\}$ 是 ()

粤 A $A \cap B = \emptyset$ 月 B $A \cup B = U$

悦 C $A \cap B = \emptyset$ 阅 D $A \cup B = U$

2. 设全集 U, A, B 是 U 的子集,若 $A \cap B = \emptyset$, 则集合 $\{A, B\}$ 是 ()

粤 A $A \cap B = \emptyset$ 月 B $A \cup B = U$

悦 C $A \cap B = \emptyset$ 阅 D $A \cup B = U$

3. 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的定义域为 ()

粤 A $(-\infty, +\infty)$ 月 B $[0, +\infty)$ 悦 C $(-\infty, 0]$ 阅 D $(-\infty, 0]$

4. 复数 $(1+i)^2$ 的虚部是 ()

粤 A 1 月 B 2 悦 C 3 阅 D 4

5. 已知 $\pi \approx 3.14$, 则 $\frac{1}{\pi}$ 的近似值为 ()

粤 A $\frac{1}{\pi}$ 月 B $\frac{1}{\pi}$ 悦 C $\frac{1}{\pi}$ 阅 D $\frac{1}{\pi}$

第 II 卷(非选择题 共 100 分)

二、填空题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.把答案填在题中横线上

1. 已知 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中,含 x 项的系数为 $\frac{5}{2}$,所有项系数的和为 $\frac{3}{2}$. 则 $n =$ _____.

2. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线的斜率为 $-\frac{1}{2}$,切线方程为 _____.

3. 假设要考察某公司生产的 500 克袋装牛奶的质量是否达标,现从 500 袋牛奶中抽取 50 袋进行检验.利用随机数表抽取样本时,先将 500 袋牛奶按 001,002,...,499,500 进行编号,如果从随机数表第 1 行第 7 列的数开始向右读,请你依次写出最先检测的 5 袋牛奶的编号 _____.

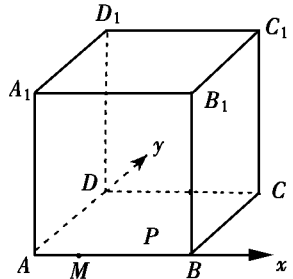
下面摘取了随机数表第 1 行至第 5 行:

84461 02895 26887 18707 11234 91243 20008 10320 53854 10010 52368 64168 14979 83949 54942 54421 76074 68896 31463 95969 32779 43270 77328 27081 33207 98343 30978 37867 54497 14885 32951 17951 97737 98436 71741 31375 36969 32739 46123 78992 49545 54124 22445 24556 35112 21123 32809 42812 90919 93778 14147 01426 02895 26887 18707 11234 91243 20008 10320 53854 10010 52368 64168 14979 83949 54942 54421 76074 68896 31463 95969 32779 43270 77328 27081 33207 98343 30978 37867 54497 14885 32951 17951 97737 98436 71741 31375 36969 32739 46123 78992 49545 54124 22445 24556 35112 21123 32809 42812 90919 93778 14147 01426

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$,则 $\frac{b}{a}$ 的值为 _____.

5. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,则该球的体积为 _____.

(理)如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 P 在棱 AB 上,且 $AP = \frac{1}{3}$,点 Q 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上,且动点 Q 到直线 A_1D_1 的距离的平方与 Q 到点 P 的距离的平方的差为 1.在 xy 坐标系中,动点 Q 的轨迹方程是 _____.



6. 一种计算装置,有一数据入口 x 和一个运算出口 y ,执行某种运算程序:

(1) 当从 x 口输入自然数 n 时,从 y 口得到实数 $\frac{n}{2}$,记为 $f(n)$;

(2) 当从 x 口输入自然数 $n > 1$ 时,在 y 口得到的结果 $f(n)$ 是前一结果

$f(n-1)$ 的 $\frac{1}{n}$ 倍.

当从 x 口输入 1 时,从 y 口得到 _____;要想从 y 口得到 $\frac{1}{10}$,则应从 x 口输入自然数 _____.

三、解答题 本大题共 4 个小题,共 40 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

已知向量 $\vec{a} = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$, $\vec{b} = (\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})$, 定义函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ 求:

(I) 函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 函数 $f(x)$ 的单调减区间;

(III)(理)画出函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ 的图像,由图像研究并写出 $f(x)$ 的对称轴和对称中心

(本题满分 12 分)

一种电路控制器在出厂时每 100 件一等品装成一箱,工人在装箱时不小心把两件二等品和两件一等品装入了一箱.为了找出该箱中的二等品,对该箱中的产品逐一取出进行测试.

(I)求前两次取出的都是二等品的概率;

(II)求前三次取出全部二等品的概率;

(III)(理)用随机变量 ξ 表示第二个二等品被取出时共取出的件数,求 ξ 的分布列及数学期望.

题号 本题满分 题分)

(文)已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围

(理)已知 $a \in \mathbb{R}$, 研究函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 的单调区间

题本小题满分 12 分)

(文)已知 O 为坐标原点,点 A 、 B 的坐标分别为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$,点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$

(I)求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(II)过 A 点做直线与 C 相交于 M 、 N 两点,且 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AN}$,求直线 MN 的方程

(理)已知 O 为坐标原点,点 A 、 B 的坐标分别为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$,点 P 运动时满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$,且 $\lambda^2 + \mu^2 = 1$

(I)求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(II)设 M 、 N 是 C 上两点,若 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{ON}$,求直线 MN 的方程

本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(I) 求 a_2, a_3 的值;

(II) 证明当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $\sqrt{\frac{1}{n}} < a_n < \sqrt{\frac{1}{n-1}}$



北京市西城区高三抽样测试(一)

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 100 分)

参考公式:

如果事件 A 与 B 互斥,那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$

如果事件 A 与 B 相互独立,那么 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

一、选择题 本大题共 10 小题,每小题 10 分,共 100 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_3 = 4$, 则 $a_5 =$ ()

- A. 16
- B. 8
- C. 4
- D. 2

2. 与直线 $x - y + 1 = 0$ 垂直的直线的倾斜角为 ()

- A. 45°
- B. 135°
- C. 150°
- D. 120°

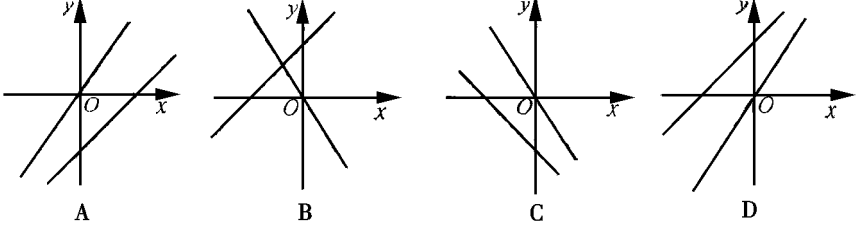
3. 函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 的反函数是 ()

- A. $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$
- B. $y = \cos(x)$
- C. $y = \sin(x)$
- D. $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\frac{a^2 + b^2}{c^2} =$ ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

5. 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x^2 - y^2 = 1$ 的曲线可能是下列图形中的 ()



6. 设等比数列 $\{a_n\}$ 为 $1, 2, 4, 8, \dots$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $\frac{S_4}{S_2} =$ ()

粤

月

悦

阅

缘已知皂灶为非零实数,则“灶跃皂”是“皂灶跃皂灶”的 ()

粤充分不必要条件

月必要不充分条件

悦必要条件

阅既不充分也不必要条件

远援文)下列命题中正确的是 ()

粤若直线造/平面配,则直线造的垂线必平行于平面配

月若直线造与平面配相交,则有且只有一个平面经过造与平面配垂直

悦若直线葬遭/平面配,葬遭相交,且直线造葬造遭,则造配

阅若直线葬/平面配,直线遭葬,则遭配

(理)设曾赠满足约束条件 { 曾赠 <= 猿, 赠 <= 圆曾, 赠 >= 园, 则目标函数挫越圆曾赠的最大值是 ()

粤猿

月源

悦缘

阅苑

苑援文)同远理)

(理)某商场宣传在节假日对顾客购物实行一定的优惠,商场规定:

①如一次购物不超过圆元,不予以折扣;

②如一次购物超过圆元但不超过缘元,按标价予九折优惠;

③如一次购物超过缘元,其中缘元予九折优惠,超过缘元的部分给予八五折优惠;

某人两次去购物,分别付款员元和源元,如果他只去一次购买同样的商品,则应付款

()

粤源元

月源元

悦缘元

阅源元

愿援文)同苑理)

(理)已知四个命题:

①若直线造/平面alpha,则直线造的垂线必平行于平面alpha;

②若直线造与平面alpha相交,则有且只有一个平面经过造与平面alpha垂直;

③若一个三棱锥每两个相邻侧面所成的角都相等,则这个三棱锥是正三棱锥;

④若四棱柱的任意两条对角线都相交且互相平分,则这个四棱柱为平行六面体

其中正确的命题是

()

粤①

月②

悦③

阅④

第II卷(非选择题 共员园分)

二、填空题 本大题共远小题,每小题缘分,共猿分,把答案填在题中横线上

怨援文)函数赠越/遭曾原圆的定义域是_____援

(理)复数(员原蚤)(员垣蚤)在复平面中所对应的点到原点的距离是_____援

员园援文)设集合粤越(曾,赠)遭越葬葬,月越(曾,赠)遭越葬葬,若粤交月越空集,则实数葬

的取值范围是_____援

(理)已知二面角 α 的平面角是 θ 直线 l 与 α 则直线 l 与平面 α 所成角的大小为_____援

(文)同 (理)

(理)在 $(a+x)^n$ 的展开中 x^k 的系数是_____ ,如果展开式中第 r 项和第 k 项的二项式系数相等,则 r 等于_____援

(文)同 (理)

(理)已知向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 θ , 则向量 \vec{a} 的坐标是_____,将向量 \vec{a} 按逆时针方向旋转 θ 得到向量 \vec{a}' , 则向量 \vec{a}' 的坐标是_____援

(文)同 (理)

(理)双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为_____ ,若直线 $ax + by = c$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的交点在以原点为中心,边长为 $2a$ 且各边分别平行于两坐标轴的正方形内,则实数 c 的取值范围是_____援

(文)同 (理)

(理)函数 $f(x)$ 是定义在无限集合 M 上的函数,并且满足对于任意的 $x \in M, f(x) \in M, f(f(x)) = x, \dots, f(f(\dots f(x))) = x$ ($n \geq 1$) 援

①若 $f(x) = \frac{a-x}{b}$, 则 a, b 满足_____ ;

②试写出满足下面条件的一个函数 $f(x)$: 存在 $x \in M$, 使得由 $f(x), f(f(x)), \dots, f(f(\dots f(x))) = x$ 组成的集合有且仅有两个元素 这样的函数可以是 $f(x) =$ _____ 援 (只需写出一个满足条件的函数)

三、解答题 本大题 远小题,共 愿分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤 (文)本小题满分 愿分)

(文)在三角形 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 为三个内角, $\sin A = \frac{1}{2}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(I)若 $\angle C$ 为钝角,求 $\angle A$;

(II)若 $\sin A \sin B = \frac{1}{4}$ 恒成立,求实数 a 的取值范围 援

(理)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 为三个内角, $\sin A = \frac{1}{2}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(I)若 $\angle C$ 为钝角,求 $\angle A$;

(II)若 $\sin A \sin B = \frac{1}{4}$ 恒成立,求实数 a 的取值范围 援

员援文)(本小题满分 5分)

在学校的科技活动中,有六件科技作品在展台上排成一排展出援

(I)求作品甲不在两端的概率;

(II)求作品甲、乙相邻的概率援

(理)(本小题满分 5分)

从 远名男同学和 源名女同学中随机选出 猿名同学参加一项竞技测试,每位同学通过测试的概率为 园苑试求:

(I)选出的三位同学中至少有一名女同学的概率;

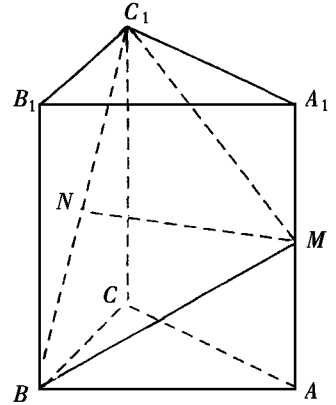
(II)选出的三位同学中同学甲被选中并且通过测试的概率;

(III)设选出的三位同学中男同学的人数为 ξ ,求 ξ 概率分布和数学期望援

（本题满分 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ， $AC=BC=CC_1$ ， M 是 AA_1 的中点， N 是 BC 的中点。

- (I) 求证： $BN \parallel$ 平面 AMC_1 ；
- (II) (文) 求二面角 C_1-AM-C 的大小；
- (理) 求点 N 到平面 AMC_1 的距离；
- (III) (理) 同 (II) (文)

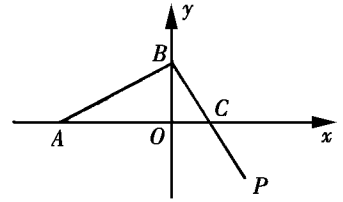


题源本小题满分 12 分)

(文)如图,已知 $A(1,0)$, $B(0,2)$, 月,悦两点分别在 x 轴和 y 轴上运动,并且满足 $\vec{AM} \cdot \vec{BN} = 0$
 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 0$

(I)求动点 M 的轨迹方程;

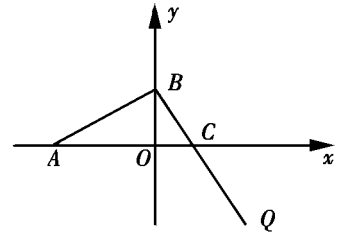
(II)设过点 M 的直线与点 M 的轨迹交于 P, Q 两点, $A(1,0)$, 求直线 AP, AQ 的斜率之和



(理)如图,已知 $A(1,0)$, $B(0,2)$, 月,悦两点分别在 x 轴和 y 轴上运动,并且满足 $\vec{AM} \cdot \vec{BN} = 0$
 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 0$

(I)求动点 M 的轨迹方程;

(II)设过点 M 的直线与点 M 的轨迹交于 P, Q 两点, $A(1,0)$, 求直线 AP, AQ 的斜率之和



题(本小题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + 2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(I) 求 a_n 及数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(II) 计算 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$;

(III) 求证: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2}$

题(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ ($x > 0$)

(I) 若 $f(x) = 0$ 有两个根 x_1, x_2 , ($x_1 < x_2$) 的中点作与 x 轴垂直的直线, 此直线与函数 $f(x)$ 的图像交于点 $P(x_0, y_0)$, 求证: 函数 $f(x)$ 在点 P 处的切线过点 $(x_1, 0)$;

(II) 若 $f(x) > 0$, 且当 $x \in [1, 2]$ 时 $f(x) > \frac{1}{x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围

（本小题满分 12 分）

（文）同（理）

（理）曾轴上有一列点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ ，已知当 $n \geq 1$ 时，点 A_n 是把线段 $A_{n-1}A_n$ 作 n 等分的分点中最靠近 A_{n-1} 的点，设线段 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ 的长度分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，其中 $a_n > 0$ 。

（I）写出 a_n 和 a_{n+1} （ $n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$ ）的表达式；

（II）证明： $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \dots > a_{2n} > \frac{1}{2} a_n$ ；

（III）设点 $B_n(x_n, a_n)$ （ $n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$ ），在这些点中是否存在两个点同时在函数 $y = \frac{1}{x}$ （ $x > 0$ ）

的图像上，如果存在，请求出点的坐标；如果不存在，请说明理由。



数 学

参考公式：

如果事件 粤 月互斥,那么

$$P(粤垣月)越P(粤)垣P(月)$$

如果事件 粤 月相互独立,那么

$$P(粤月)越P(粤)·P(月)$$

如果事件 粤在一次试验中发生的概率是 孕,那么 灶次独立重复试验中恰好发生 噪次的概率

$$P(粤越噪)越C_{灶}^{噪}P^{噪}(1-P)^{灶-噪}$$

球的表面积公式 杂越原砸^圆

球的体积公式 灾越^源灾_源砸^圆

其中 砸表示球的半径

一、选择题 本大题共 愿小题,每小题 缘分,共 源分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

猿援文)函数 赠越^员曾^圆的定义域是 ()

粤援原员,垣肆) 月援原员,园

悦援原员,垣肆) 阅援原员,园

(理)复数 拙越^员垣蚤^圆所对应的点在 ()

粤援第一象限 月援第二象限

悦援第三象限 阅援第四象限

圆援下列函数中周期为 圆的函数是 ()

粤援曾越圆曾^圆 月援曾越^圆曾^圆曾

悦援曾越^圆曾^圆 阅援曾越^圆曾^圆曾

猿援若(猿曾^圆垣原曾)的展开式中含有常数项(非零),则正整数 灶的可能值是 ()

粤援 肆 月援 圆 悦援 源 阅援 猿

源援文)若命题 壳曾越圆且 赠越猿则 责: ()

粤援曾≠圆或 赠≠猿 月援曾≠圆且 赠≠猿

悦援曾越圆或 赠越猿 阅援曾≠圆或 赠越猿

(理)若双曲线^曾原^曾越员皂≠园的一条准线与抛物线 赠越愿曾的准线重合,则双曲线的离