

第六章 万有引力定律

§1 行星的运动 万有引力定律 引力常量的测定

知识梳理

1、行星的运动

开普勒三大定律

(1)所有的行星围绕太阳运动的轨道都是椭圆,太阳处在所有椭圆的一个焦点上;

(2)对每个行星而言,太阳和行星的连线在相等的时间内扫过相等的面积;

(3)所有行星轨道的半长轴的三次方跟公转周期的二次方的比值都相等,即 $R^3/T^2 = k$

2、万有引力定律

自然界中任何两个物体都是相互吸引的,引力的大小跟这两个物体的质量的乘积成正比,跟它们的距离的二次方成反比。

用公式表示为 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$,

引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

3、引力常量的测定

英国的卡文迪许利用扭秤装置在实验室里较为准确地测定了引力常量,证明了万有引力的实际存在,使万有引力能够实际应用,进而测出天体的质量。卡文迪许被称为“第一个称出地球的人”。

4、物体的重力随高度而变化的规律

物体的重力近似等于地球对物体的引力,即近似等于 $G \frac{Mm}{(R+h)^2}$,物体受的重力随高度 h 的增大而减小。

5、重力加速度 g 随离地面高度 h 的变化规律

$g = \frac{F}{m} = G \frac{M}{(R+h)^2}$,重力加速度 g 随高度的增加而减小。

重点难点

1、开普勒第三定律

开普勒第三定律不仅适用于绕太阳运行的行星系统,也适用于绕某一中心天体运动的天体系统。例如,所有地球的卫星(包括月球和人造卫星)都应满足 $R^3/T^2 = k$

2、万有引力定律

万有引力定律应用于两质点之间或可以看成

质点的两物体之间,其中“ r ”为两质点间的距离或两个质量分布均匀的对称球体的球心间距离。例如两天体之间相距遥远时,考虑天体之间的距离就可不考虑天体的大小和形状。计算人与地球之间的万有引力,引力公式中的“ r ”为人与地心之间的距离。任何两个物体之间都存在相互作用的万有引力,物体间相互作用的引力是一对作用力和反作用力。在通常情况下,万有引力非常小,只有在质量巨大的星球间或天体与天体附近物体间,才有实际意义。

3、引力恒量的测定

“引力恒量的测定”这一部分是学习中的难点。实验中采用将微小形变加以放大的方法。利用金属丝的扭转变形使较微小力的作用效果较易显示,通过 T 形架使四个球产生的引力矩在同一水平面,便于计算。应用平面镜转过 θ 角,反射光线转过 2θ 角起到扭转角度放大的作用,便于观察和测量。通过以上方法,微小引力能够通过扭转力矩测量出来,进而测出引力常量。

4、物体在星球表面的重力等于星球对它的万有引力,得 $mg = G \frac{mM}{R^2}$ (R 为星球半径, M 为星球质量),则在星球表面物体的重力加速度 $g = G \frac{M}{R^2}$,它的变形公式为 $gR^2 = GM$,该公式在近几年的高考中经常出现,应加以重视。

5、地面上物体重力的变化

重力是由于地球的吸引而使物体受到的力。地球上的物体都随地球一起自转,需要向心力。物体受到的地球引力可分解为两个分力:向心力和重力。越靠近赤道,物体随地球自转所需的向心力越大,物体的重力越小,所以万有引力和重力是有区别的,引力的范畴更大。

6、重力和重力加速度随高度 h 而变化的规律

在地面附近,高度 $h \approx 0$ 。可以认为物体受到的重力近似等于地球对物体的引力。因此随着高度的增加,物体受到的重力和重力加速度都将减少。

例题分析

【例1】月球环绕地球运动的轨道半径约为地球

半径的 60 倍,运行周期约为 27 天.能否利用开普勒定律算出,在赤道平面内离地面多大高度人造地球卫星可以随地球一起转动,就象停留在空中一样?(设地球半径为 $R_0 = 6.4 \times 10^3 \text{ km}$)

解析 人造卫星和月球均绕地球运行,它们的开普勒恒量 k 相等.

设人造地球卫星运行轨道半径为 R ,周期为 T .根据开普勒第三定律,有 $R^3 T^2 = k$

设月球的轨道半径为 $R' = 60R_0$,周期为 T' ,同样也有 $R'^3 T'^2 = k$

$$\text{则有 } \frac{R^3}{T^2} = \frac{R'^3}{T'^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2}{T'^2} R'^3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2 \times (60R_0)^3} = 6.67R_0$$

人造卫星距地面的高度为

$$H = R - R_0 = 6.67R_0 - R_0 = 5.67R_0 = 3.63 \times 10^4 \text{ km}$$

【例 2】如图 6-1-1 所示, r 大于两球的半径,但两球半径不能忽略,球的质量分布均匀,大小分别为 m_1 与 m_2 ,则两球之间的万有引力大小为

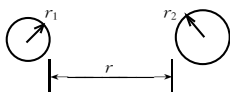


图 6-1-1

- A. $G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ B. $G \frac{m_1 m_2}{r_1^2}$
C. $G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$ D. $G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2 + r_3)^2}$

解析 由于球半径不能忽略,则两球心间的距离为 $r + r_1 + r_2$,由万有引力定律可得答案为 D

【例 3】地球和月球的质量之比为 81:1,半径之比为 4:1,求地球和月球表面的重力加速度之比.

解析 设星球的质量为 M ,星球的半径为 R ,物体在星球表面的重力等于星球对它的万有引力,得 $mg = G \frac{mM}{R^2}$,则在星球表面物体的重力加速度

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

$$\text{所以 } \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 81 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$$

【例 4】以下说法正确的是

- A. 质量为 m 的物体在地球上任何地方其重力均相等
B. 把质量为 m 的物体从地面移到高空,其重力变小
C. 同一物体在赤道处的重力比在两极处重力大

D. 同一物体在任何地方其质量是相同的

解析 地球上的物体都随地球一起自转,需要向心力.物体受到的地球引力可分解为两个分力:向心力和重力.越靠近赤道,物体随地球自转所需的向心力越大,物体的重力越小. A、C 错误.随着高度的增加,物体受到的重力 $mg' = G \frac{mM}{(R+h)^2}$ 将减少. B 正确.质量是物质的属性,与物体所处的位置无关. D 正确.

思维拓展

【例 5】在半径为 R 质量为 M 的均匀铅球内挖去一个直径为 R 的球形空腔,空腔与表面相切.在两球心的连线的延长线上距铅球中心为 d 处,另有一质量为 m 的小球,如图 6-1-2 所示,试求挖去空腔的铅球对小球的万有引力.

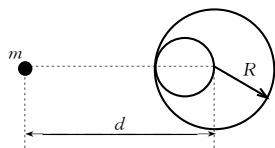


图 6-1-2

分析 这类问题与求带有空腔的物体的重心问题相类似.一般先求出不带空腔物体的引力(在求重心的问题中应为重力,下同),再求出空腔部分物体的引力,然后求出两者之差即为所求的引力.

解析 若铅球无空腔,则其对小球的引力为

$$F_1 = G \frac{Mm}{d^2}$$

$$\text{由 } M = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \text{ 可知}$$

空腔所在处的铅球的质量为

$$M' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 M = \frac{M}{8}$$

其对小球的引力为

$$F_2 = G \frac{M'm}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = G \frac{Mm}{2 \left(2d - R\right)^2}$$

则带空腔的铅球对小球 m 的引力为

$$F = F_1 - F_2 = GMm \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2 \left(2d - R\right)^2} \right]$$

说明 在解答本题时绝对不能采用以下方法,即先求出去掉空腔部分以后剩下的部分的重心位置(本题中,重心位于原球心右边 $R/4$ 处),然后求剩下部分的质量(本题中为 $7M/8$),然后再按照两个质量分别为 m 和 $7M/8$ 相距为 $(d + R/4)$ 的质

点来处理.原因是不能把只适用于质点的万有引力公式随意用在一般物体上.

能力训练

- 第一次通过实验比较准确地测量出引力常量的科学家是 ()
A. 英国的牛顿 B. 意大利的伽利略
C. 德国的勒维列 D. 英国的卡文迪许
- 对于万有引力定律的数学表达式 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, 下列说法正确的是 ()
A. 公式中 G 为引力常数, 是人为规定的
B. r 趋近于零时, 万有引力趋近于无穷大
C. 物体 m_1 、 m_2 受到的万有引力总是大小相等的, 与 m_1 、 m_2 是否相等无关
D. 物体 m_1 、 m_2 受到的万有引力总是大小相等、方向相反, 是一对平衡力
- 设想把质量为 m 的物体放在地心, 这时它受到的地球对它的万有引力为 ()
A. 零 B. mg
C. 无穷大 D. 无法确定
- 关于引力恒量 G , 下列说法正确的是 ()
A. 在国际单位制中, G 的数值等于两个质量均为 1 kg 的物体相距 1 m 时的相互吸引力
B. 在国际单位制中, G 的单位是 $\text{N} \cdot \text{kg}^2 / \text{m}^2$
C. 在不同的星球上, G 的数值不一样

- D. 在地球上不同的地方, G 的数值一样
- 地球半径为 R , 地面处的重力加速度为 g , 那么在离地面高度为 h 处的重力加速度应为 ()
A. $\frac{h^2}{(R+h)^2} g$ B. $\frac{R^2}{(R+h)^2} g$
C. $\frac{h}{R+h} g$ D. $\frac{R}{R+h} g$
 - 两行星质量分别为 m_1 、 m_2 , 绕太阳运行的轨道半长轴分别是 R_1 和 R_2 , 则它们的公转周期之比为 _____
 - 已知地球与月球中心间距离为 $60R$ (R 为地球半径), 而地球质量为月球质量的 81 倍, 则地球、月球之间引力为零的点与月球中心的距离为 _____ R
 - 已知地球半径约为 $6.4 \times 10^3 \text{ km}$, 且假设月球绕地球的运动可以看成匀速圆周运动, 则可以估算出月球到地心的距离为多少? (保留一位有效数字)

§2 万有引力定律在天文学中的应用

知识梳理

1. 天体质量的计算

把行星 (或卫星) 绕天体 (或行星) 的运动看作圆周运动, 其向心力由万有引力提供, 可以根据观测的行星 (或卫星) 运动的情况 (如距离、公转周期等), 算出中心天体 (太阳或行星) 的质量.

$$\text{即 } F_{\text{向}} = m\omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r, F_{\text{引}} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$F_{\text{引}} = F_{\text{向}} \text{ 所以, 中心天体的质量为 } M = G \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

2. 发现未知天体

海王星和冥王星的发现就是应用万有引力定律的辉煌成就.

重点难点

应用天体受到的万有引力提供其运转的向心力

这条规律时, 应注意: 万有引力定律的公式

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ 中, } r \text{ 为两天体之间的距离. 向心力公式}$$

$$F_{\text{向}} = m \frac{v^2}{r} \text{ 中, } r \text{ 为天体做圆周运动时的轨道半径. 有些情况下这两者是不相等的.}$$

例题分析

例 1 已知某行星绕太阳运动的轨道半径为 r , 周期为 T , 太阳的半径为 R , 万有引力恒量为 G , 求太阳的平均密度为.

解析 行星绕太阳做圆周运动, 向心力由万有引力提供. 设太阳的质量为 M , 则

$$F = m\omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = G \frac{mM}{r^2} \text{ 太阳的质量为}$$

$$M = G \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$\text{太阳的体积为 } V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{所以太阳的密度为 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{3\pi r^3}{GT^2 R^3}$$

【说明】本题解答中应注意的问题是,不能将太阳的半径 R 与行星绕太阳运动的轨道半径 r 混淆。

当匀速圆周运动的物体绕星球表面运行时, $r \approx R$ 则 $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$, 仅测出运转周期 T , 就可以求出星球的平均密度。

【例 2】如图 6-2-1 所示, 两颗靠得很近的恒星称为

双星, 这两颗星必须各以一定速率绕某一中心转动才不至于因万有引力作用而吸引在一起。已知双星的质量分别为 m_1 和 m_2 相距为 L , 万有引力恒量为 G 。求 (1) 双星转动的中心位置; (2) 转动周期。

【分析】这两颗星受的万有引力是相等的, 但它们的运转轨道的半径并不相等, 若 m_1 的轨道半径为 x 则 m_2 的为 $L-x$ 这一点应注意。

【解】双星做匀速圆周运动时所需向心力由它们之间的万有引力提供。

$$\text{对 } m_1 \text{ 有 } G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$$

$$\text{对 } m_2 \text{ 有 } G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (L-x)$$

$$\text{由上二式可解得 } x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L, \text{ 周期}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

【例 3】一颗行星上一昼夜的时间为 6 h, 弹簧测力计在此行星赤道上称某物体重力比在两极小 10%, 则此行星平均密度是多少? ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$)

【分析】物体在两极处所受重力, 是行星对它的万有引力。物体在赤道上用弹簧测力计称得的是视重, 此时物体要随行星一起自转, 做圆周运动。物体做圆周运动的向心力是行星引力 (实重) 和弹簧测力计拉力 (视重) 的合力, 即 $F_{\text{向}} = G_0 - G_{\text{视}}$ 。根据牛顿第二定律和匀速圆周运动的知识列方程求解。

$$\text{【解】物体在两极处所受的重力为 } G_0 = G \frac{Mm}{R^2}$$

$$\text{物体在赤道上做圆周运动, 有 } G_0 - G_{\text{视}} = mR \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\text{因为 } G_{\text{视}} = G_0 \cdot 90\%,$$

$$\text{所以, 由前三式得 } \frac{1}{10} G \frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

$$\text{行星的密度 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{30\pi}{GT^2}, \text{ 代入数据得}$$

$$\rho = 3.03 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

思维拓展

【例 4】假设宇宙间有三个质量均为 m 的天体, 其天体中心恰位于边长为 L 的等边三角形的三个顶点 A、B、C 上, 如图 6-2-2 甲所示。如果不考虑其他天体对它们的引力, 这三个天体要保持图中的稳定结构, 角速度应为多少?

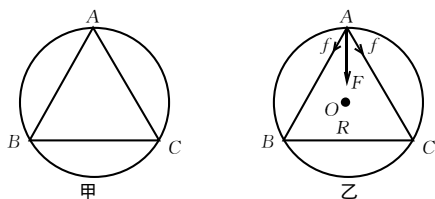


图 6-2-2

【解析】三天体要保持图中的稳定结构, 需以同样的角速度绕三角形的中心做圆周运动。每个天体受到的向心力是另两个天体对该天体引力的合力, 由 6-2-2 乙可得

$$\text{向心力 } F_{\text{向}} = F = 2f \cos 30^\circ = 2 \frac{GM^2}{L^2} \cos 30^\circ$$

$$\text{旋转半径 } R = \frac{L}{2 \cos 30^\circ}$$

$$\text{根据向心力公式 } F_{\text{向}} = M\omega^2 R, \text{ 可得}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{\text{向}}}{MR}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{3GM}{L}}$$

【点拨】在此问题中, 轨道半径与天体间的距离并不相等。

能力训练

1. 下列说法中正确的是 ()

- A. 海王星和冥王星是人们依据万有引力定律计算的轨道而发现的
- B. 天王星是人们依据万有引力定律计算的轨道而发现的
- C. 天王星的运行轨道偏离根据万有引力定律计算出来的轨道, 其原因是由于天王星受到轨道外其他行星的引力作用
- D. 以上说法都不对

2. 一卫星绕一行星做圆周运动, 卫星离行星表面很近。如果已经测量出该卫星的轨道半径和运行周期, 则可以估算出 ()

- A. 行星的质量
- B. 行星的平均密度
- C. 卫星的质量
- D. 行星表面附近的重力加速度

3. 设想人类开发月球,不断地把月球上的矿藏运到地球上,假定经过长时间的开采后,地球仍可看成均匀球体,月球仍沿开采前的圆轨道绕地球运动,则与开采前相比 ()

A. 地球与月球间的万有引力将变大
B. 地球与月球间的万有引力将变小
C. 月球绕地球运动的周期将变长
D. 月球绕地球运动的周期将变短

4. 如图 6-2-3 所示, A、B 两个行星绕同一恒星 O 做圆周运动, 旋转方向相同, A 行星的周期为 T_1 , 角速度为 ω_1 , 线速度为 v_1 , 半径为 r_1 ; B 行星的周期为 T_2 , 角速度为 ω_2 , 线速度为 v_2 , 半径为 r_2 ; 某时刻

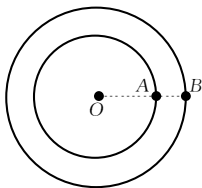


图 6-2-3

两行星相距最近, 则下列关系中正确的应是 ()

A. $T_1 < T_2$, $v_1 > v_2$
B. $T_1 > T_2$, $\omega_1 > \omega_2$
C. 经 $t = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$, 两行星第二次相距最近
D. 经 $t = \frac{T_1 T_2}{2(T_2 - T_1)}$, 两行星第一次相距最近

5. 试证明对于地球所有卫星 (包括月球) 来说, $R^3 T^{-2}$ 是一恒量, 其中 R 为卫星的轨道半径, T 为卫星的运行周期.

7. 宇航员在月球上自高 h 处以初速度 v_0 水平抛出一小球, 测出水平射程为 L (月面平坦), 已知月球半径为 R , 万有引力恒量为 G , 试求出月球的质量

8. 某行星的昼夜时间 $T = 6 \text{ h}$, 若弹簧测力计在其“赤道”上比在其“两极”处测同一物体的重力时读数小 16%, 现设想该行星自转角速度加快到某一值, 以使其“赤道”上的物体会自动飘起来, 试求这样的自转周期的值.

6. 太阳距银河系中心约 25000 光年, 太阳绕银河系中心运动的轨道可视为圆, 运动的周期约为 1.7×10^8 年. 太阳光射到地球上历时 500 s. 由此可估算出银河系质量为太阳质量的多少倍. (取 2 位有效数字)

§3 人造卫星 宇宙速度

知识梳理

1. 卫星的运转速度、角速度、周期与半径的关系

设 r 为卫星的轨道半径

(1) 由 $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$ 得 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, 即 r 越大, v 越小.

(2) 由 $G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r$ 得 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$, 即 r 越大, ω 越小

(3) 由 $G \frac{Mm}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$ 得 $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$, 即 r 越大, T 越长

2. 地球同步卫星

运转周期与地球自转周期相同 ($T = 24 \text{ h}$). 所有地球同步卫星的轨道平面均在赤道平面内, 且运行速度和轨道半径均相同.

推导: 由 $G \frac{Mm}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$ 得 $r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$ 因为 T 恒定, 所以 r 恒定. 代入数据得 轨道半径

$$r = 3.6 \times 10^4 \text{ km}$$

3. 宇宙速度

(1) 第一宇宙速度 (环绕速度) 7.9 km/s 是地球卫星的最小发射速度, 也是卫星绕地球做圆周运动的最大速度. 可近似认为是卫星绕地球表面运动的速度. 轨道半径近似为地球半径.

导出①: 当卫星在地球附近运行时, $r \approx R$, 由 $G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$ 得 $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ (R 为地球半径) 代入数据得 $v = 7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$

导出②: 当卫星在地球附近运行时, $r \approx R$, 且 $F_{\text{引}} = mg$, 由 $mg = m \frac{v^2}{R}$ 得 $v = \sqrt{gR}$, 代入数据得 $v = 7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$

(2) 第二宇宙速度: 11.2 km/s . 使物体脱离地球引力, 成为太阳系人造行星 (或飞向其他行星) 的最小发射速度.

(3) 第三宇宙速度: 16.7 km/s . 使物体脱离太阳引力, 飞到太阳系以外的宇宙空间去的最小发射速度.

重点难点

1. 做匀速圆周运动的人造卫星, 轨道半径均是以为圆心. 例如, 卫星离地面的高度为地球半径的 3

倍, 则其轨道半径为地球半径的 4 倍.

2. 人造卫星的轨道半径发生变化时, 其线速度、角速度均会发生变化.

3. 地球同步卫星只能定点

于赤道上空某一固定圆轨道上. 如图 6-3-1 所示, 假设卫星是在除赤道平面以外的任一条轨道上运转, 卫星受到地球引力 $F_{\text{引}}$, 它可以分解为两个力 $F_{\text{向}}$ 和 F_1 , 在 F_1 的作用下, 卫星会向赤道平面漂移, 从而无法定点. 若卫星轨道在赤道平面内, 则卫星做圆周运动所需的向心力 $F_{\text{向}}$ 的方向和受到的地球引力 $F_{\text{引}}$ 的方向相同, 不会使卫星发生漂移. 所以地球同步卫星只能定点于赤道上空某一固定圆轨道上.

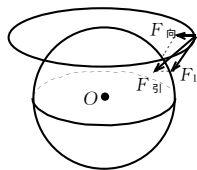


图 6-3-1

4. 卫星的发射速度与运行速度的关系

卫星绕地球做匀速圆周运动时, 其线速度大小为 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, 轨道半径 r 增大, 线速度 (即运行速度) 减小. 而将卫星发射到越高的轨道上, 所需克服地球引力做的功越多, 则发射速度就越大. 因此第一宇宙速度 7.9 km/s 是地球卫星的最小发射速度, 也是卫星绕地球做圆周运动的最大速度. 当发射速度大于 7.9 km/s 而小于 11.2 km/s 时, 卫星将绕地球做椭圆运动.

例题分析

例 1 人造卫星环绕地球运行的速率 $v = \sqrt{gR^2/r}$, 其中 g 为地面处的重力加速度, R 为地球半径, r 为卫星离地球中心的距离, 下面哪些说法是正确的 ()

- A. 从公式可见, 运行速度与轨道半径的平方根成正比
- B. 从公式可见, 把卫星发射到越远的地方越容易
- C. 上面运行速度的表达式是错误的
- D. 以上说法都是错误的

解析 卫星环绕地球运行时, $F_{\text{引}} = F_{\text{向}}$, 所以,

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (m \text{ 为卫星质量, } M \text{ 为地球质量}), \text{ 速度}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

对地球表面的物体,有 $G \frac{Mm}{R^2} = mg$ (m 为物体质量),所以 $GM = gR^2$. 因此 $v = \sqrt{gR^2/r}$.

由此可知 A 是错的. 离地面越高,发射卫星克服地球引力做的功越多,因此越不容易发射,所以 B 错, C 错,只有选 D.

【例 2】两个质量分别为 m_1 和 m_2 的人造卫星,分别绕地球做匀速圆周运动,若它们的轨道半径分别为 R_1 和 R_2 ,则它们的运行周期之比 T_1/T_2 为

A. $(R_2/R_1)^{3/2}$ B. $(R_1/R_2)^{3/2}$

C. $\frac{m_1}{m_2} (\frac{R_1}{R_2})^3$ D. $\frac{m_2}{m_1} (\frac{R_2}{R_1})^3$

【解析】由人造卫星的周期公式 $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$ 可知,卫星的运转周期与卫星的质量 m 无关,因此只有答案 B 是正确的.

【例 3】下列说法正确的是 ()

- A. 地球同步卫星和地球自转同步,因此同步卫星的高度和速度是一定的
B. 地球同步卫星的角速度虽被确定,但高度和速度可以选择,高度增加,速度增大,高度降低速度减小
C. 地球同步卫星只能定点于赤道上空,相对地面静止不动
D. 以上都不对

【解析】地球同步卫星相对于地面是不动的,定点于赤道上空某一位置,高度恒定. 因此,正确答案为 A、C.

思维拓展

【例 4】经过用天文望远镜长期观测,人们在宇宙中已经发现了许多双星系统. 通过对它们的研究,使我们对宇宙中物质的存在形式和分布情况有了较深刻地认识. 双星系统由两个星体构成,其中每个星体的线度都远小于两星体之间的距离. 一般双星系统距离其他星体都很遥远,可以当作孤立系统来处理.

现根据对某双星系统的光学测量确定:该双星系统中每个星体的质量都是 M ,两者相距 L ,它们正围绕着两者连线的中点做圆周运动.

(1)试计算该双星系统的运动周期

(2)实验观测到的运动周期为 $T_{\text{观测}}$,且 $T_{\text{观测}}/T_{\text{计算}} = 1/\sqrt{N}$ ($N > 1$) 为了解释 $T_{\text{观测}}$ 与 $T_{\text{计算}}$ 不同,目前有一种流行的理论认为,在宇宙中可能存在着一种望远镜观测不到的暗物质. 作为一种简化模型,我们假定在以这两个星体连线为直径的球体内均

匀分布着这种暗物质. 若不考虑其他暗物质的影响,请根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度.

【分析】双星结构模型如图

6-3-2 所示. 由于每个星体的线度都远小于两星体间的距离,满足万有引力定律使用的条件;双星系统作为孤立系统处理,它们做圆周运动的向心力均来源于系统内的万有引力,由此可计算出 $T_{\text{计算}}$. 又由题设条件知 $T_{\text{观测}} < T_{\text{计算}}$,说明双星系统中受到的向心力大于本身的引力,所以它还受到其他指向中心的作用力. 这一作用力应来源于均匀分布的暗物质. 均匀分布在球体内的暗物质对双星系统的作用与一质量与球内暗物质相等、位于中心点 O 处的质点的作用相同. 此时双星做圆周运动的向心力为双星之间的万有引力和位于中心点 O 处等效暗物质的质点 M' 对双星的万有引力之和,由此可算出 M' ,即可求暗物质的密度.

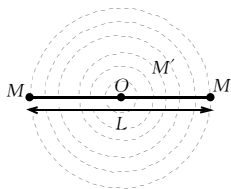


图 6-3-2

【解】(1)双星均绕它们连线的中点做圆周运动,由 $F_{\text{向}} = F_{\text{引}}$ 得

$$M \frac{4\pi^2}{T_{\text{计算}}^2} \times \frac{L}{2} = G \frac{M^2}{L^2}, \text{ 所以 } T_{\text{计算}} = \pi L \sqrt{\frac{2L}{GM}} \quad \text{①}$$

(2)根据观测结果,星体的运动周期

$$T_{\text{观测}} = \frac{1}{\sqrt{N}} T_{\text{计算}} < T_{\text{计算}}$$

这种差异是由双星内均匀分布的暗物质引起的. 均匀分布在球体内的暗物质对双星系统的作用与一质量与球内暗物质相等、位于中心点 O 处的质点的作用相同,则有

$$M \left(\frac{2\pi}{T_{\text{观测}}} \right)^2 \cdot \frac{L}{2} = \frac{GM^2}{L^2} + G \frac{MM'}{(\frac{L}{2})^2}$$

$$\text{则: } T_{\text{观测}} = \pi L \sqrt{\frac{2L}{G(M+4M')}} \quad \text{②}$$

$$\text{由①②两式及 } \frac{T_{\text{观测}}}{T_{\text{计算}}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\text{可得: } M' = \frac{N-1}{4} M$$

设所求暗物质密度为 ρ , 则有

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \rho = \frac{N-1}{4} M$$

$$\text{暗物质密度为 } \rho = \frac{3(N-1)M}{2\pi L^3}$$

【说明】本题考查万有引力定律及其应用. 解答过程中把以双星连线为直径的球体内均匀分布的暗物

质等效为位于连线中心的同质量的质点来处理是关键.这是一种等效的思维方式,有助于简化物理模型,使问题明朗化.

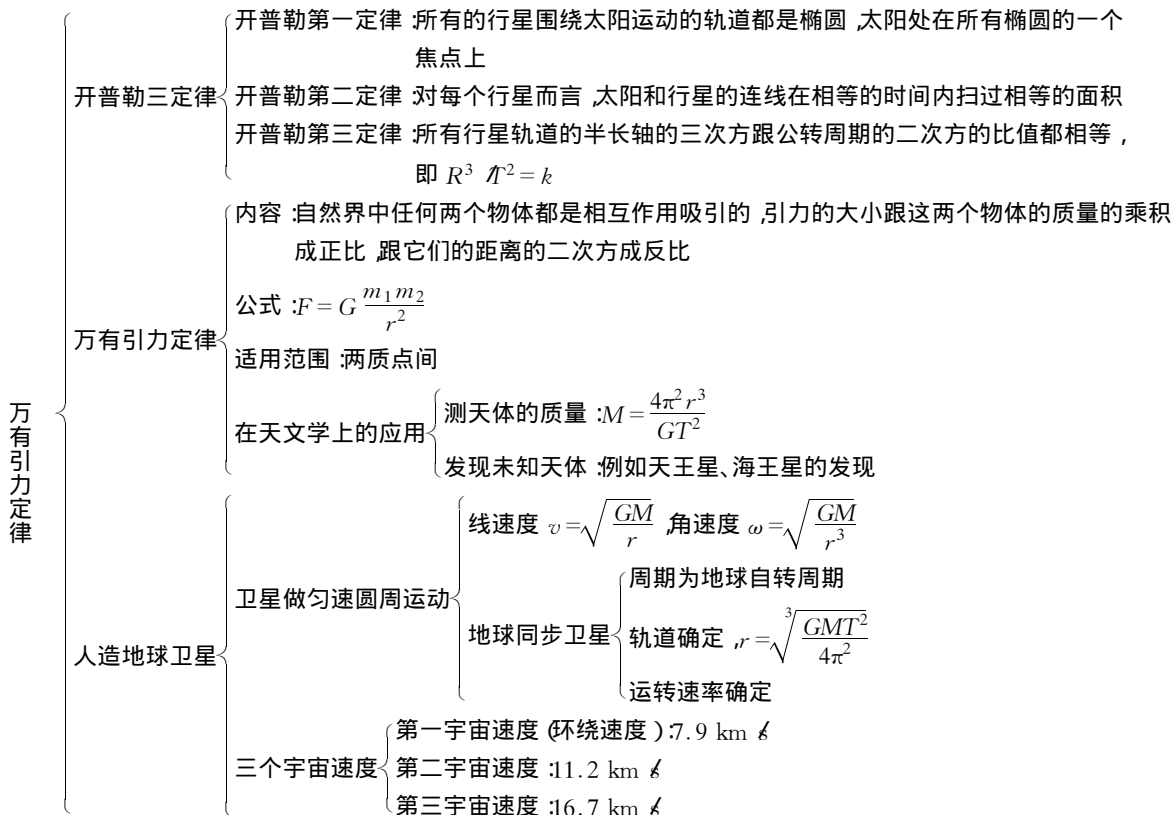
能力训练

- 关于第一宇宙速度,下列说法中正确的是 ()
 - 它是人造卫星绕地球飞行的最小速度
 - 它是近地圆形轨道上人造卫星的运行速度
 - 它是能使卫星进入近地圆形轨道的最小发射速度
 - 它是卫星在椭圆轨道上运行时在近地点的速度
- 人造卫星以地心为圆心做匀速圆周运动,它的速率、周期跟它的轨道半径的关系是 ()
 - 半径越大,速率越大,周期越大
 - 半径越大,速率越小,周期越小
 - 半径越大,速率越小,周期越大
 - 半径越大,速率越大,周期越小
- 地球同步卫星到地心的距离可用求出 $r^3 = \frac{a^2 b^2 c}{4\pi^2}$, 已知式中 a 的单位是 m , b 的单位是 s , c 的单位是 m/s^2 , 则 ()
 - a 是地球半径, b 是地球自转周期, c 是地球表面处的重力加速度
 - a 是地球半径, b 是同步卫星绕地心运动的周期, c 是同步卫星的加速度
 - a 是赤道周长, b 是地球自转周期, c 是同步卫星的加速度
 - a 是地球半径, b 是同步卫星绕地心运动的周期, c 是地球表面处的重力加速度
- 俄罗斯“和平号”轨道空间站因缺乏继续在轨道上运行的资金,2001 年先进入无动力的自由运动状态.因受高空稀薄空气阻力的影响,空间站在绕地球运动的同时将很缓慢地向地球靠近.通过采取一定的措施,于 2001 年 3 月 23 日坠入太平洋.在缓慢向地球靠近的过程中,空间站运行的 ()
 - 角速度逐渐减小
 - 线速度逐渐减小
 - 加速度逐渐减小
 - 周期逐渐减小
- 两颗人造卫星 A、B 绕地球做圆周运动,周期之比为 $T_A:T_B=1:8$, 则轨道半径之比和运动速率之比分别为 ()
 - $R_A:R_B=4:1$, $v_A:v_B=1:2$
 - $R_A:R_B=4:1$, $v_A:v_B=2:1$
 - $R_A:R_B=1:4$, $v_A:v_B=1:2$
 - $R_A:R_B=1:4$, $v_A:v_B=2:1$

- 宇航员在环绕地球运转的飞船上完全失重,其原因 ()
 - 是飞船对他的弹力与他所受的重力大小相等,方向相反
 - 是月球对他的引力与地球对他的引力大小相等,方向相反
 - 是飞船超出了地球引力范围,他不再受到地球引力作用
 - 是地球对他的引力等于他随飞船做圆周运动所需要的向心力
- 同步卫星离地心的距离为 r , 运行速率为 v_1 , 加速度为 a_1 , 地球赤道上物体随地球自转的向心加速度为 a_2 , 第一宇宙速度为 v_2 , 地球半径为 R . 则 $a_1:a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $v_1:v_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
- 为转播电视节目,发射地球同步卫星,它在赤道上空某高度处随地球同步运转.地球半径为 6400 km , 地球表面处重力加速度取 10 m/s^2 , 求卫星的高度和线速度大小.

§4 本章小结

知识梳理



重点难点

1. 研究天体运动应用公式 $F = G \frac{Mm}{r^2}$

$$\text{或 } F = G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$= m \frac{2\pi n}{T} r$$

研究天体运动时, 太阳系中的九大行星及其卫星的运动都可以看作匀速圆周运动. 它们做匀速圆周运动的向心力就是由它们受到的万有引力提供.

2. 测天体质量 M 或天体密度 ρ

① 天体质量: $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$

② 天体密度: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{4\pi^2 r^3}{4\pi R^3} \frac{GT^2}{8} = \frac{3\pi r^3}{GT^2 R^3}$

若卫星在天体表面运行, 则 $r = R$, 而有 $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$
把卫星的运动看成匀速圆周运动, 通过测天体的

卫星的环绕周期、轨道半径 r , 则可推算出天体的质量. 特别是若卫星在天体表面环绕时, 只要测出其环绕周期, 就可以测出天体的密度.

3. 研究天体表面物体重力的应用公式

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

例如对月球表面物体的“重力”:

$$mg_{\text{月}} = G \frac{M_{\text{月}} m}{R_{\text{月}}^2} \text{. 这里忽略了地球对月球表面物体的}$$

万有引力. 其余天体上的物体的重力照此类推.

① 已知 $r_{\text{月轨}} = 60R_{\text{地}}$, 可求出: $g_{\text{月轨}} = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$

② 已知 $M_{\text{月}}/M_{\text{地}} = 1/81$, $R_{\text{月}}/R_{\text{地}} = 1/3.8$, 可求出: $g_{\text{月}} = 1.74 \text{ m/s}^2 = g_{\text{地}}/6$

可见, 地球对月球轨道处物体的重力加速度远小于月球对其表面的重力加速度. 所以在月球上, 地球对物体的万有引力可以忽略, 而只考虑月球对物体的

万有引力作用.

4. 解决天体问题的两条思路

说明 ①万有引力提供向心力 $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$

②重力就是等于其所受万有引力. $mg = G \frac{Mm}{R^2}$

①万有引力提供天体运动的向心力和重力等于万有引力是我们研究天体运动的两大依据.

②式中的 r 是轨道半径, R 是天体半径.

例题分析

【例 1】木星和地球都绕太阳做匀速圆周运动, 质量分别为 m_1 和 m_2 , 轨道半径为 R_1 和 R_2 , 则它们的公转周期之比为 $T_1:T_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; 线速度之比为 $v_1:v_2 = \underline{\hspace{2cm}}$; 向心加速度之比为 $a_1:a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 因为木星和地球都绕太阳做匀速圆周运动, 它们所需的向心力由太阳对它们的万有引力提供, 因此应利用 $F_{引} = F_{向}$

解 设太阳的质量为 M , 行星的轨道半径为 r , 由 $F_{引} = F_{向}$ 得 $m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = G \frac{mM}{r^2}$, 周期为 $T =$

$$\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

所以 $T_1:T_2 = \sqrt{R_1^3}:\sqrt{R_2^3}$ (或直接用开普勒第三定律也可解) 由 $m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$, 线速度大小为 $v =$

$$\sqrt{\frac{GM}{r}}, \text{ 所以 } v_1:v_2 = \sqrt{R_2}:\sqrt{R_1}$$

向心加速度 $a = \frac{F_{向}}{m} = \frac{F_{引}}{m} = \frac{GM}{r^2}$, 所以向心加速度之比为 $a_1:a_2 = R_2^2:R_1^2$

【例 2】地球的半径和平均密度分别为 R 和 ρ , 太阳的半径和平均密度分别为 R' 和 ρ' . 已知地球表面的重力加速度为 g .

(1) 求太阳表面的重力加速度 g' ;

(2) 若 $R' = 110R$, $\rho' = 0.25\rho$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 计算 g' 的值.

解析 本题要应用在天体表面的重力加速度的计算公式 $g = \frac{GM}{R^2}$

(1) 地球表面的重力加速度为

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3} \pi R G \times \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{4}{3} \pi R G \rho$$

同理, 太阳表面的重力加速度为

$$g' = \frac{GM'}{R'^2} = \frac{4}{3} \pi R' G \rho'$$

由上二式得, 太阳表面的重力加速度为

$$g' = \frac{R' \rho'}{R \rho} g$$

(2) 已知 $R' = 110R$, $\rho' = 0.25\rho$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 代入太阳表面的重力加速度 g' 的表达式, 经计算得 $g' = 270 \text{ m/s}^2$

【例 3】已知火星上的大气压是地球的 1/200, 火星直径约为地球直径的一半, 地球的平均密度 $\rho_{地} = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 火星的平均密度 $\rho_{火} = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 试求火星上的大气质量与地球上的大气质量之比. (球的体积公式为 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, 球的表面积公式为 $S = 4\pi R^2$)

分析 大气是均匀、垂直地压在行星的表面, 可以认为大气的重力与行星表面所受的大气压力相等.

解 设行星的半径为 R , 行星表面的大气压强为 P , 重力加速度为 g , 行星的质量为 M .

由 $4\pi R^2 P = m_{气} g$, $g = G \frac{M}{R^2}$, $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, 得 $m_{气} = 3 \frac{RP}{G\rho}$, 所以 $\frac{m_{火}}{m_{地}} = \frac{R_{火} P_{火} \rho_{地}}{R_{地} P_{地} \rho_{火}} = \frac{1}{200} \times \frac{1}{2} \times \frac{5.5 \times 10^3}{4 \times 10^3} = 3.4 \times 10^{-3}$

【例 4】众所周知, 地球围绕太阳做近似圆周运动, 阳光普照大地, 万物生长. 根据你学过的知识论述一下, 随着岁月的流逝, 地球的公转周期, 日、地的平均距离, 及地球表面温度变化的趋势 (不考虑流星及外星球与地球发生碰撞的可能性. 提示: 太阳发光会使其质量减小).

解析 随着太阳质量的减小, 由万有引力定律 $F = G \frac{Mm}{r^2}$ 可得, 太阳对地球的吸引力 F 减小, 地球绕太阳做匀速圆周运动, 万有引力提供向心力, $F_{引} = F_{向}$, $F_{向} = m \frac{v^2}{r}$, 向心力减小, 会使日地间的距离 r 增大, 太阳对地球做负功, 动能减小, v 减小, 由 $T = \frac{2\pi r}{v}$ 可知 T 增大. 日地间的距离增大, 单位时间内太阳辐射到地球表面的热量会减小, 地球表面的温度会降低.

【例 5】假设站在赤道某地的人, 在日落后 4 小时的时候, 恰能观察到自己头顶上空被太阳照亮的人造地球卫星. 若该卫星在赤道所在平面内做匀速圆周运动, 又已知地球同步卫星绕地球运行的轨道半径约为地球半径的 6.6 倍, 试估算此人造地球卫星绕地球运行的周期为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ s}$

解析 如图 6-4-1 所示, 该图中所示圆为地球赤道, O 为地心. 日落时人在 A 点, 日落后 4 小时人在 B 点, 所看到的人造卫星在 C 点, 太阳光从 A 射向 C . 地球自转周期为 24 小时, 则 AO 与 CO 间的夹角为 α

$=60^\circ$, 设地球半径为 R , 地球自转周期为 T , 则该人造卫星的轨道半径为 $r = OC = 2R$, 由开普勒第三定律得 $\frac{(6.6R)^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$, $t^2 = \left(\frac{2R}{6.6R}\right)^3 T^2$, 代入数据得该人造卫星的运行周期为 $t = 1.44 \times 10^4 \text{ s}$

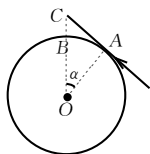


图 6-4-1

综合引路

【例 6】古希腊某地理学家通过长期观测,发现 6 月 27 日正午时刻,在北半球 A 城阳光与铅直方向成 7.5° 的角下射,而在 A 城正南方,与 A 城距离为 L 的 B 城,阳光恰好沿铅直方向下射,如图 6-4-2 所示.射到地球的太阳光可视为平行光.据此他估算出了地球的半径.试写出他估算地球半径的表达式 $R = \underline{\hspace{2cm}}$

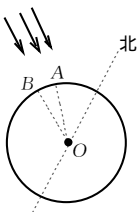


图 6-4-2

解 如图 6-4-2 所示,分别将 A、B 与地心 O 连接

由题意知, $\angle AOB$ 与 θ 间的夹角为 $\theta = 7.5^\circ = \frac{\pi}{24}$ 弧度,由数学知识可得, A、B 间的弧长 $s_{AB} = R\theta$, 即地球半径 $R = \frac{s_{AB}}{\theta} = \frac{24L}{\pi}$

【例 7】航空航天是一门多学科的综合学科.请回答:

(1)地球半径 $R = 6400 \text{ km}$, 地球表面重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. 若使航天飞船在无推动力作用的情况下在离地高 $h = 640 \text{ km}$ 的圆轨道上绕地球飞行,则飞行速度应是多少?

(2)载人航天飞船的发射升空和降落时,如果宇航员保持直立姿势,则他的心血管系统会受到何种影响?你认为宇航员应采取什么姿势?

(3)飞船的轨道舱是宇航员在轨道上进行各种实验的场所.由于空间不大,所用仪器都要经过精选.下列哪些仪器一般不会被选中 ()

- A. 水银气压计 B. 天平
C. 水银温度计 D. 游标卡尺

(4)宇航员所在轨道舱和返回舱都是密封的,宇航员吸入氧气,呼出二氧化碳.如果二氧化碳的浓度过高,会使宇航员困乏、呼吸频率加快,严重的会引起窒息.为使二氧化碳浓度降低而保持舱内氧气的适当比例,可以在舱内放入 ()

- A. Na_2O_2 B. Na_2CO_3 C. NaOH D. 氧气瓶

(5)载人航天飞船返回大气层时,由于速度很大,

和空气摩擦会产生高热.为了保护航天飞船,采用下列哪些措施是可行的 ()

- A. 返回开始阶段利用反推力火箭使载人航天飞船调整到适当的返回角度并开始减速
B. 使载人航天飞船钝圆部分朝向前进方向
C. 在朝向前进方向的部分安装一层易熔金属,高温时蒸发并吸收热量
D. 刚开始返回即张开降落伞

(6)吊在降落伞下的载人航天飞船返回舱下落速度仍达到 14 m/s . 为实现软着陆,在返回舱离地面约 1.5 m 时启动 5 个反推力小火箭.若返回舱重 8 吨,则每只火箭的平均推力多大? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

【解析】

(1) $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}$, 代入数据得 $v = 7.55 \times 10^3 \text{ m/s}$

(2)加速度 a 向上,人处于超重状态,血液会向身体的下部分集中,流回心脏较困难,长时间会有生命危险.

(3)A、B,飞船绕地球飞行,飞船中的物体会出现完全失重现象.

(4)A. Na_2O_2 与人呼出的 CO_2 作用会放出 O_2

(5)A、B、C

(6)解:此过程中,加速度大小为 $a = \frac{v^2}{2s}$, 代入数据得 $a = 65.3 \text{ m/s}^2$

由牛顿第二定律得, $F_{\text{总}} - mg = ma$, 代入数据得, $F_{\text{总}} = 6.02 \times 10^5 \text{ N}$

每一支火箭产生的推力为 $F = \frac{F_{\text{总}}}{5} = 1.20 \times 10^5 \text{ N}$

能力训练

1. 万有引力定律 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 中 r 是 ()

- A. 对于相距很远可以看作质点的物体,就是指两个质点间的距离
B. 对于相距较远的均匀球体,就是指两个球心间的距离
C. 对于人造地球卫星而言,是指卫星到地球表面的高度
D. 对于星球而言,是指其运转轨道的平均半径

2. 关于人造地球卫星与宇宙飞船的下列说法中,正确的是 ()

- A. 如果知道人造地球卫星的轨道半径和它的周期,再利用万有引力恒量,就可以算出地球质

量

- B. 两颗人造地球卫星, 只要它们的运行速率相等, 不管它们的质量、形状差别有多大, 它们的轨道半径和运行周期就一定是相同的
- C. 原来在同一轨道上沿同一方向运行的人造卫星一前一后, 若要后一卫星追上前一卫星并发生碰撞, 只要将后者的速率增大一些即可
- D. 一艘绕火星运动的宇宙飞船, 宇航员从舱内慢慢走出, 并离开飞船. 飞船因质量减小, 所受万有引力减小, 故飞行速度减小

3. 设地球表面的重力加速度为 g_0 , 物体在距地球表面为 $3R$ (R 为地球半径) 处, 由于地球的作用而产生的加速度为 g , 则 g/g_0 为 ()

A. 1 B. $1/8$ C. $1/4$ D. $1/16$

4. 航天飞机中的物体处于失重状态是指这个物体 ()

A. 不受地球引力
B. 地球引力与向心力平衡
C. 对支持它的物体的压力为零
D. 以上都不对

5. 假如地球的自转的速度增大一倍, 关于物体的重力, 下列说法正确的是 ()

A. 放在赤道上的物体受到的万有引力不变
B. 放在两极点上的物体重力不变
C. 放在赤道上的物体重力不变
D. 放在北京的物体重力减小

6. 土星外层有一个环, 为了判断它是土星的一部分还是土星的卫星群, 可以根据环中各层的线速度 v 与该层到土星中心的距离 R 之间的关系来判断 ()

A. 若 $v \propto R$, 则该层是土星的一部分;
B. 若 $v^2 \propto R$, 则该层是土星的卫星群
C. 若 $v \propto \frac{1}{R}$, 则该层是土星的一部分;
D. 若 $v^2 \propto \frac{1}{R}$, 则该层是土星的卫星群

7. 物体放在地球上不同的地方, 重力是不同的, 把地球视为球体, 随着纬度的增加 ()

A. 物体所受万有引力减小
B. 物体所受万有引力增加
C. 物体随地球自转所需向心力减小
D. 物体的重力增加

8. 在同步卫星上用天平称量一质量为 1 kg 的物体时, 称量的结果是 ()

A. 仍是 1 kg B. 小于 1 kg

C. 等于 0 D. 不定值

9. 人造卫星绕地球运动, 其速率 ()

A. 一定等于 7.9 km/s
B. 可能等于或小于 7.9 km/s
C. 一定大于 7.9 km/s
D. 可能介于 $7.9 \sim 11.2 \text{ km/s}$ 之间

10. 三颗人造地球卫星 A、B、C 绕地球做匀速圆周运动, 如图 6-4-3 所示. 已知 $m_A = m_B < m_C$, 则三个卫星 ()

A. 线速度关系: $v_A > v_B = v_C$
B. 周期关系: $T_A < T_B = T_C$
C. 向心力大小关系: $F_A = F_B < F_C$

D. 半径与周期的关系: $\frac{R_A^3}{T_A^2} = \frac{R_B^3}{T_B^2} = \frac{R_C^3}{T_C^2}$

11. A、B 为地球上的物体, A 处于南纬 40° , B 在赤道上, C、D 为地球卫星, C、D 轨道都在赤道平面上, C 为近地卫星, D 为同步卫星. 关于 A、B、C、D 的 T 、 a 、 g 、 v 正确的判断是 ()

A. $T_A = T_B = T_C = T_D$ B. $a_A < a_B, a_C < a_D$
C. $g_A > g_B, a_B < a_C$ D. $v_A < v_B, v_B = v_C$

12. 宇航员在一行星上以速度 v_0 竖直上抛一个物体, 经 t 秒后落回手中, 已知该行星的半径为 R , 要使物体不再落回星球表面, 沿星球表面抛出的速度至少是 ()

A. $v_0 t/R$ B. $\sqrt{Rv_0/t}$
C. $\sqrt{2Rv_0/t}$ D. $\sqrt{v_0/2Rt}$

13. 用 m 表示地球同步通讯卫星的质量, h 表示它离地面的高度, R_0 表示地球半径, g_0 表示地面处的重力加速度, ω_0 表示地球自转的角速度, 则通讯卫星所受到的地球对它的万有引力的大小为 ()

A. 等于零
B. 等于 $mR_0^2 g_0 / (R_0 + h)^2$
C. 等于 $m \sqrt[3]{R_0^2 g_0 \omega_0^4}$
D. 以上结果均不对

14. 发射地球同步卫星时先将卫星发射至近地圆轨道 1, 然后经点火使卫星沿椭圆轨道 2 运行, 最后再次点火, 将卫星送入同步圆轨道 3. 轨道 1、2 相切于 Q 点, 轨道 2、3 相切于 P 点, 如图 6-4-4 所示. 则当卫星分别在 1、2、3 轨道上正常运行时, 以下说法正确的是 ()

A. 卫星在轨道 3 上的速率大于在轨道 1 上的速

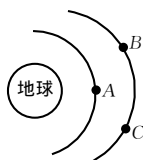


图 6-4-3

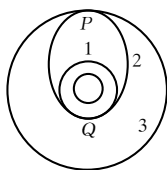


图 6-4-4

率

B. 卫星在轨道 3 上的角速度小于在轨道 1 上的角速度

C. 卫星在轨道 1 上经过 Q 点时的加速度大于它在轨道 2 上经过 Q 点时的加速度

D. 卫星在轨道 2 上经过 P 点时的加速度等于它在轨道 3 上经过 P 点时的加速度

15. m_1 和 m_2 两颗人造卫星, 已知 $m_1 = m_2$, 如果 m_1 和 m_2 在同一轨道上运行, 则它们的线速度之比为_____, 如果 m_1 的运行轨道半径是 m_2 的运行轨道半径的 2 倍, 则它们的速度之比为_____

16. 两个行星 A 和 B 各有一个卫星 a 、 b . 卫星的圆轨道接近各自行星表面. 如果两行星质量之比为 $M_A : M_B = P$, 两行星半径之比为 $R_A : R_B = q$, 则两卫星的周期之比 $T_a : T_b =$ _____

17. 某行星的质量是地球的 12 倍, 半径是地球的 3 倍, 在地球上某人可跳 1.6 m 高, 则在该星球上, 人以相同的初速度起跳, 可跳多高?

18. 在一个星球的表面, 让一个物体从光滑斜面的顶端由静止开始滑到底端, 在同样的斜面的情况下, 所用时间恰好是在地球上所用时间的 2 倍. 已知该星球的半径为 R , 万有引力恒量为 G , 地球表面的重力加速度为 g , 大约计算一下该星球的质量是多少.

19. 如图 6-4-5 所示, 火箭内平台上放有测试仪器, 火箭从地面启动以后, 以加速度 $g/2$ 竖直向上匀加速运动, 升到某一高度时, 测试仪器对平台的压力为启动前压力的 $17/18$. 已知地球半径为 R , 求火箭此时离地面的高度. (g 为地面的重力加速度)

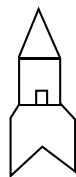


图 6-4-5

20. 两个质量均为 m 的物体, 由轻质硬杆相连, 形如一个“哑铃”, 围绕一个质量为 M 的天体旋转, 如图 6-4-6 所示. 两物体和天体质心在一条直线上, 两物体分别以 r_1 和 r_2 为半径绕 M 做圆周运动, 两物体成了 M 的卫星, 求此卫星的周期.

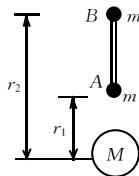


图 6-4-6

第七章 动量 (选修)

§1 冲量和动量

知识梳理

1. 冲量

(1) 定义: 力 F 和力的作用时间 t 的乘积 Ft 叫做力的冲量. 表达式为 $I = Ft$. 单位是: 牛·秒 ($\text{N}\cdot\text{s}$)

(2) 冲量是矢量. 力的方向在作用时间内不变时, 冲量 I 的方向与力 F 的方向相同.

(3) 冲量是反映力对时间积累效果的物理量.

2. 动量

(1) 运动物体的质量和速度的乘积叫动量. 表达式为 $p = mv$. 单位是: 千克·米/秒 ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$)

(2) 动量是矢量, 方向与速度方向相同.

(3) 动量是描述运动物体状态的物理量.

重点难点

1. 冲量和动量都是矢量.

2. 讲冲量必须指明是哪个力的冲量或合力的冲量.

【例】如图 7-1-1 所示, 一物体在与水平方向成 θ 角的拉力 F 作用下匀速前进了时间 t , 则 ()

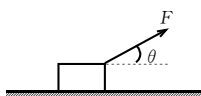


图 7-1-1

A. 拉力 F 对物体的冲量大

小为 $Ft \sin \theta$

B. 拉力 F 对物体的冲量大小为 Ft

C. 摩擦力对物体的冲量大小为 $Ft \sin \theta$

D. 合外力对物体的冲量为零

【解析】冲量为力与作用时间的乘积, 故 B 正确; 物体做匀速运动, 合外力为零, 故合外力对物体的冲量为零, D 正确.

3. 动量的增量

动量是矢量, 动量的变化量 Δp 也是矢量, 其运算 $\Delta p = mv' - mv$ 也为矢量运算. 中学阶段考虑在一条直线上的矢量运算, 若选取正方向, 即可将矢量运算转化为代数运算.

例题分析

【例 1】质量是 1 kg 的钢球, 以 5 m/s 的速度水平向右运动, 碰到一墙壁后以 3 m/s 的速度被反向弹回,

钢球的动量改变多少?

【解析】取水平向右为正方向. 碰前钢球的速度为 $v = 5 \text{ m/s}$,

碰前钢球的动量为:

$$p = mv = 1 \times 5 = 5 \text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

碰后钢球的动量为:

$$p' = mv' = 1 \times (-3) = -3 \text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

碰撞前后钢球的动量变化为:

$$\Delta p = mv' - mv = -3 - 5 = -8 \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

方向水平向左.

【说明】动量是矢量, 动量的变化量 Δp 也是矢量, 上式中的“-”号不表示动量减少, 而是表示动量的变化量的方向与规定的正方向相反.

【例 2】对任何一个质量不变的物体, 下列说法正确的是 ()

A. 物体的动量发生变化, 其速率一定变化

B. 物体的动量发生变化, 其速率不一定变化

C. 物体的速率发生变化, 其动量一定变化

D. 物体的速率发生变化, 其动量不一定变化

【解析】动量是矢量, 速率是标量. 物体的动量发生变化, 可以是其速度方向发生变化, 而大小不变, 即速率不变, 例如匀速圆周运动. 物体的速率发生变化, 即速度大小发生变化, 其速度一定发生变化, 动量也一定发生变化. 所以正确答案为 B、C.

【例 3】一物体从某高处由静止下落, 设所受空气阻力恒定, 当它下落 h_1 时, 动量大小为 p_1 . 当它落下 h_2 时的动量大小为 p_2 . 若 $p_1 : p_2 = 1 : \sqrt{2}$, 则 $h_1 : h_2$ 等于 ()

A. 1:1 B. $1:\sqrt{2}$ C. 1:2 D. 1:4

【解析】物体由静止下落, 做匀加速直线运动, 设物体的加速度为 a , 由 $v^2 = 2as$ 得, 物体下落 h_1 和 h_2 时的速度大小为 $v_1 = \sqrt{2ah_1}$, $v_2 = \sqrt{2ah_2}$, 则物体下落 h_1 和 h_2 时的动量大小之比为

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{mv_1}{mv_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}}, \text{ 则有 } \frac{h_1}{h_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{1}{2}.$$

因此正确答案为 C.

思维拓展

【例4】如图7-1-2所示,一个质量为 0.2 kg 的钢球,以 2 m/s 的速度斜射到坚硬的花岗岩板上,入射角度是 45° ,碰撞后被斜着弹出,弹出的角度也是 45° ,速度仍为 2 m/s .你能不能求出钢球的动量变化的大小和方向?

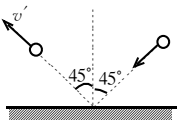


图 7-1-2

解析 动量的变化量 Δp 是矢量,其运算 $\Delta p = mv' - mv$ 为矢量运算,要利用矢量运算的平行四边形定则.如图7-1-3

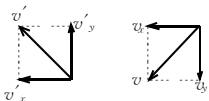


图 7-1-3

所示将 v 与 v' 沿水平方向与竖直方向进行分解,可知只有竖直方向的分速度发生了变化.以竖直向上为正方向,有 $v_y = -v \sin 45^\circ$, $v'_y = v \sin 45^\circ$,所以动量的变化量为

$$\begin{aligned}\Delta p &= mv'_y - mv_y \\ &= 0.2 \times 2 \times \sqrt{2} \text{ N} - (-0.2 \times 2 \times \sqrt{2} \text{ N}) \\ &= 0.4\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \text{ 方向竖直向上.}\end{aligned}$$

能力训练

- 关于物体的动量,下列说法中正确的是 ()
 - 动量的方向一定是物体速度的方向
 - 物体的动量越大,它的惯性也越大
 - 动量大的物体速度也越大
 - 物体的动量发生变化,其速率不一定变化

- 一个质量为 2 kg 的物体,放在水平地面上,如图7-1-4所示,受到 $F = 20\text{ N}$ 的拉力作用,但物体仍保持静止状态,则在 5 s 内以下各力的冲量正确的是 ()
 - 拉力 F 的冲量是 $25\sqrt{3}\text{ N} \cdot \text{s}$
 - 拉力 F 的冲量是 $50\text{ N} \cdot \text{s}$
 - 重力的冲量是 $50\text{ N} \cdot \text{s}$
 - 合力的冲量是零

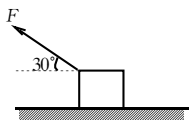


图 7-1-4

- 质量为 m 的物体自由落下,在第 2 s 末到第 5 s 末物体受到的冲量大小是 ()
 - 0
 - $2mg$
 - $3mg$
 - $5mg$

- 如图7-1-5所示,自地面上竖直高度为 h 处自由落下一物体,不计空气阻力,碰地后又弹回同样的高度,则全过程中,球的动量随时间变化的函数图象是(向下为正方向) ()

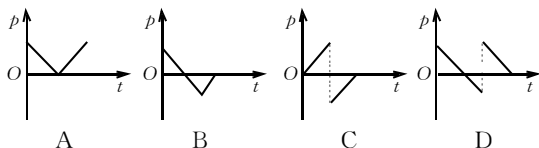


图 7-1-5

- 甲、乙两物体质量之比为 $2:1$,受到相同的外力作用,从静止开始运动,那么物体运动相同的时间,所获得的动量大小之比为 ()
 - $1:1$
 - $1:2$
 - $2:1$
 - $1:4$

- 如图7-1-6所示,两个质量相等的物体在同一高度沿倾角不同的两个光滑斜面由静止滑下,到达底端的过程中,两个物体具有的不相同的物理量是 ()
 - 重力的冲量
 - 弹力的冲量
 - 合力的冲量
 - 刚到达底端时的动量

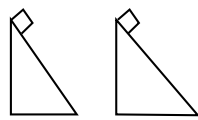


图 7-1-6

- 物体在水平恒定拉力作用下,沿水平面做直线运动的 $v-t$ 图线如图7-1-7所示,比较第 1 s 内,第 2 s 内,第 3 s 内三段时间中,_____物体受的阻力最大;_____物体所受合力的冲量最大;_____物体所受合力的冲量最小.(填“第 1 s ”、“第 2 s ”、“第 3 s ”)

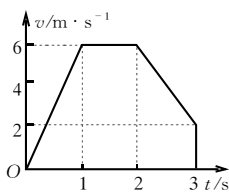


图 7-1-7

- 一个物体的质量是 4 kg ,此物体竖直下落,以 20 m/s 的速度碰到水泥地面上,随后又以 8 m/s 的速度被反弹起,若取竖直向下为正方向,则小物体与地面碰撞前的动量是_____;相碰后的动量是_____,物体的动量增量是_____.

§2 动量定理

知识梳理

1. 动量定理

(1) 内容: 物体所受的合外力的冲量等于物体动量的变化.

(2) 公式: $Ft = p' - p$ 或 $Ft = mv' - mv$

(3) 推导: 联立 $F = ma$ 和 $a = (v' - v)/t$ 两式解得: $Ft = mv' - mv = p' - p = \Delta p$

(4) 注意:

① 单位“千克·米/秒”与“牛顿·秒”是等效的, 但讲动量时应用“千克·米/秒”, 讲冲量时应用“牛顿·秒”;

② 冲量是描述动量的变化, 不能说冲量描述动量的大小.

2. 应用动量定理解题的步骤

(1) 确定研究对象;

(2) 对研究对象进行受力分析和区分始末运动状态, 找出对应的动量;

(3) 确定正方向, 将矢量运算转化为代数运算求解.

3. 动量定理研究的对象是质点 (单个物体或视为单个物体的系统)

重点难点

1. $\Delta p = p' - p$ 为矢量运算.

2. 公式中 F 是指合外力, 动量定理适用于恒力, 也适用于变力. 若是对变力而言, 求出的 F 应是时间 t 内的平均作用力.

3. 若是求变力的冲量, 可借助动量定理求解.

例题分析

例1】一质量为 100 g 的小球, 从 0.8 m 高处自由下落到一厚气垫上. 从小球接触气垫到小球陷至最低点停下, 经历的时间为 0.2 s, 则这段时间内气垫对小球的冲量和平均作用力分别是多少?

解析 如图 7-2-1 所示, 取竖直向上为正方向, 在小球从刚与垫接触到陷至最低点的过程中, 由动量定理可得 $Nt - mgt = 0 - (-mv_1)$, 其中 N 为小球所受的弹力, v_1 为小球刚接触气垫的速度,

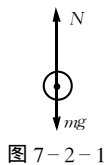


图 7-2-1

且 $v_1 = \sqrt{2gh} = 4 \text{ m/s}$

气垫对小球的冲量为

$$Nt = mv_1 + mgt = 0.4 + 0.2 = 0.6 \text{ (N} \cdot \text{s)}$$

气垫对小球的平均作用力为 $N = \frac{0.6}{t} = 3 \text{ N}$

说明 由上述计算可以看出, 在小球与气垫相互作用的过程中, 重力的冲量为 $0.2 \text{ N} \cdot \text{s}$, 弹力的冲量 $Nt = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}$, 可见在这个具体问题中不满足 $mg < N$, 重力的冲量不能忽略.

例2】水流以流速 $v = 10 \text{ m/s}$, 从截面积为 $S = 4 \text{ cm}^2$ 的管内水平射在竖直的墙壁上, 求水流对墙壁的压力多大? 设水和墙壁碰撞后沿墙壁流动.

解析 设水的密度为 $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 在 Δt 时间内冲击墙壁的水的质量为 $m = \rho S v \Delta t$, 水流冲击墙壁后, 速度变为零. 对质量为 m 的水流, 在 Δt 时间内与墙壁撞击, 速度由 v 变为零, 取水流速度方向为正方向, 根据动量定理则有 $-F \Delta t = 0 - mv$ (F 为平均作用力) $F \Delta t = mv = (\rho S v \Delta t) \cdot v$

$$F = \rho S v^2 = 1.0 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-4} \times 10^2 \text{ N} = 40 \text{ N}$$

根据牛顿第三定律, 水流对墙壁的作用力大小为 40 N.

例3】如图 7-2-2

所示, 质量为 m 的小球以水平速度抛出, 恰好与斜面垂直碰撞, 其弹回的速度大小恰与抛出时的速度大小相等, 则小球与斜面碰撞过程中受到的冲量大小为

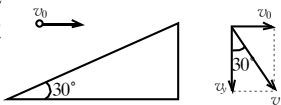


图 7-2-2

()

A. $3mv_0$ B. $2mv_0$ C. mv_0 D. $\sqrt{2}mv_0$

解析 小球与斜面碰撞时, 斜面对它的冲量为变力的冲量. 小球与斜面碰撞时速度 v 的方向跟斜面垂直, 如图 7-2-2 所示, 将速度 v 分解为水平方向分速度 v_0 和竖直方向分速度 v_y , 由速度平行四边形可以求得合速度 v , 则 mv 为与斜面碰撞时的初动量, 碰撞后动量为 mv_0 , 根据动量定理便可求出碰撞中小球所受的冲量大小

由图中的几何关系, 可求得小球与斜面碰撞前的速度为 $v = 2v_0$, 小球碰后弹回的速度大小为 v_0 , 取速度 v 的方向为正方向, 根据动量定理, 有:

$I = -mv_0 - m(2v_0) = -3mv_0$ (负号表示冲量方向与 v 的方向相反)

本题的正确答案为 A

思维拓展

【例 4】质量为 M 的金属块和质量为 m 的木块用细线连在一起,从静止开始以加速度 a 在水中加速下沉,经时间 t_1 细线断了,求:

(1) 再经过时间 t_2 木块刚好停止下沉,此时金属块下沉的速度 v 多大?

(2) 细线断后再经过时间 t_3 ,金属块下沉的速度为 v_1 ,木块此时的速度 u 为多大?(设在题目所求范围内,金属块与木块既没有沉入水底也没有露出水面,不计水的阻力)

【解析】(1) 取竖直向下为正方向,在 $(t_1 + t_2)$ 这段时间内对系统应用动量定理得

$$(m + M)a(t_1 + t_2) = Mv$$

$$v = \frac{(m + M)a(t_1 + t_2)}{M}$$

(2) 同理对 $(t_1 + t_3)$ 这段时间内应用动量定理得

$$(m + M)a(t_1 + t_3) = Mv_1 + mu$$

$$u = \frac{(m + M)a(t_1 + t_3) - Mv_1}{m}$$

对于具体数据,若解得 $u < 0$,表示木块在上浮.

能力训练

1. 对任何运动物体,用一个恒力制动使它停下来,所需的时间决定于物体的 ()
A. 速度 B. 加速度 C. 动量 D. 质量
2. 做平抛运动的物体,每秒钟速度的增量是 ()
A. 大小相等,方向相同 B. 大小不等,方向不同
C. 大小相等,方向不同 D. 大小不等,方向相同
3. 跳高比赛中,运动员着地处用软垫垫着,而不是硬地,这样可以 ()

- A. 减小着地过程中运动员受到的冲量
- B. 减小着地过程中运动员动量的变化
- C. 减小着地时运动员受到的平冲力
- D. 减小着地时运动员动量的变化率

4. 物体 A、B 用轻绳相连在轻质

弹簧下静止不动,如图 7-2-

3 所示, A 的质量为 m , B 的

质量为 M . 当连接 A、B 的绳

突然断开后,物体 A 上升经

过某一位置时的速度大小为

v , 这时物体 B 下落速度大小

为 u , 这段时间里, 弹簧对物体 A 的冲量为 ()

- A. mv
- B. $mv - Mu$
- C. $mv + Mu$
- D. $mv + mu$

5. 质量为 m 的质点沿半径为 R 的圆周做匀速圆周运

动,其周期为 T , 那么质点运动 $\frac{1}{2}$ 圆周时间内, 向心力的冲量大小为_____.

6. 质量为 1.0 kg 的小球从离地面 5.0 m 高处自由落下,与地面碰撞后,回弹的最大高度为 3.2 m . 设球与地面碰撞时间为 0.2 s , 不计空气阻力, $g = 10 \text{ m/s}^2$, 则小球受到地面的平均冲力为_____.

7. 一人做“蹦极”运动,用原长为 20 m 的橡皮绳拴住身体往下跃,若此人质量为 60 kg ,从 50 m 高处由静止下落,到运动停止瞬间所用时间为 4 s , 则橡皮绳对人的平均作用力约为_____.

8. 一个质点的动量大小跟时间关系为 $p = (10 + 5t) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, 这个质点在第 4 s 末的动量大小为_____ A s 内受的冲量大小为_____ ; 质点受到的合外力为_____.

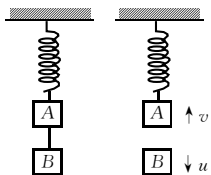


图 7-2-3

§3 动量守恒定律

知识梳理

1. 动量守恒定律的推导

如图 7-3-1 所示, 两个小

球 m_1 、 m_2 分别以 v_1 、 v_2 ($v_1 >$

v_2) 的速度在光滑的水平面上运

动, 碰撞后速度变为 v'_1 、 v'_2 , 设

1 对 2 的作用力为 F_{12} , 2 对 1 的作用力为 F_{21} , 由动量

定理有

$$F_{21}t = m_1v'_1 - m_1v_1 \quad F_{12}t = m_2v'_2 - m_2v_2$$

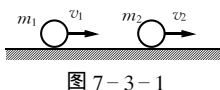


图 7-3-1

由牛顿第三定律, 有 $F_{12} = -F_{21}$

由上三式即可得到动量守恒定律

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

2. 动量守恒条件: 系统不受外力作用或系统所受外力之和为零. 由相互作用的物体 (两个或两个以上的物体) 组成的物体系, 系统以外的物体对系统内物体的作用力称为外力, 而系统内部物体间的相互作用力称为内力

3. 动量守恒定律的内容及其数学表达式

(1) $p = p'$ (系统相互作用前的总动量 p 等于相互