

第四章 三角函数

§1 角的概念的推广

第1课时

重点难点聚焦

重点 角的概念推广到负角,零角以及大于 360° 的正角.

能够在一定范围内找出与 α 终边相同的角.

难点 正确区分象限角,正角、负角、锐角、钝角的关系

典型例题选讲

【例1】下列命题正确的是 ()

- A. 170° 与 420° 的终边相同
 B. -135° 与 475° 的终边相同
 C. 0° 与 -360° 的终边相同
 D. 24° 与 336° 的终边相同

解析 判断两角终边是否相同,只要看两角的度数差是否是 360° 的整数倍.因为 0° 与 -360° 的差是 360° 的整数倍,所以选C

【例2】已知下列各角:① -120° ② -245° ③ 179° ④ 550° ,其中在第三象限的角是 ()

- A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ①③

解析 掌握正角,负角的定义,是解决本题的关键,正角是顺时针旋转形成的,负角是逆时针旋转而形成的,因此选B

备选例题

1. 下列命题中,正确的是 ()
 A. 钝角必在第二象限
 B. 第四象限角必是负角
 C. 第二象限角必是钝角
 D. 负角必在第四象限
2. 已知 θ 是锐角,那么 2θ 是 ()
 A. 第一象限角
 B. 第二象限角
 C. 第一或第二象限角
 D. 以上结论都不正确
3. 角 α 的顶点与坐标原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,则角 α 与角 $(180^\circ + \alpha)$ 的终边的关系是 ()
 A. 关于原点对称
 B. 关于 x 轴对称

C. 关于 y 轴对称

D. 随 α 的变化有不同的对称性

思维方法拓展

1. 判断角终边所在位置,可在直角坐标系中作出所给角,这时应先把角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,再根据角的终边所在的位置,判定一个角是否是象限角,是第几象限角.

2. 终边相同的角是指两个角的始边重合,终边也重合,必须注意,终边给定时表示的角不唯一,且这些角彼此之间相差 360° 的整数倍.

3. 锐角是大于 0° 而小于 90° 的角,第一象限角是在区间 $(k \cdot 360^\circ, k \cdot 360^\circ + 90^\circ)$ 上的角而小于 90° 的角可为正角,也可为零角和负角.

素质提高训练

课堂练习

1. 分针走10分钟,所转的角度是_____°.
2. 在 $0^\circ \sim 720^\circ$ 之间与 -25° 终边相同的角有_____个
3. 若 α 是锐角,则 $180^\circ + \alpha$ 在第_____象限, $-\alpha$ 在第_____象限.
4. 下列命题中,正确的是 ()
 A. 第一象限角一定不是负角
 B. 小于 90° 的角一定是锐角
 C. 钝角一定是第二象限角
 D. 终边相同的角一定相等
5. 设 $E = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $F = \{\text{锐角}\}$, $G = \{\text{第一象限角}\}$, $M = \{\text{小于 } 90^\circ, \text{ 但不小于 } 0^\circ \text{ 的角}\}$,则有 ()
 A. $F \subsetneq G \subsetneq E$ B. $F \subsetneq E \subsetneq G$
 C. $M \subsetneq (F \cap G)$ D. $G \cap M = F$
6. 给出下列四个命题:① -15° 是第四象限的角 ② 185° 是第三象限的角 ③ 475° 是第二象限角 ④ -350° 是第一象限的角
 其中正确的个数为 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
7. 若 α 是第一象限的角,则第四象限的角是 ()
 A. $90^\circ - \alpha$ B. $90^\circ + \alpha$
 C. $360^\circ - \alpha$ D. $180^\circ + \alpha$

课外反馈练习

1. 下列各命题中 ①相等的角终边一定相同 ②终边相同的角一定相等 ③第二象限角一定大于第一象限任何一个角 ④若 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, 则 α 是第一或第二象限角 其中正确的个数为 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 下列命题中正确的是 ()

A. 终边在 y 轴非负半轴上的角是直角

B. 第二象限角一定是钝角

C. 第四象限角一定是负角

D. 若 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 则 α 与 β 终边相同

3. 若锐角 α 的终边与角 -690° 的终边关于 y 轴对称, 则 α 为 ()

A. -30°

B. 30°

C. -60°

D. 60°

4. 已知 $0^\circ < \alpha < 80^\circ$, $-20^\circ < \beta < 110^\circ$ 则 $\alpha - 2\beta$ 的范围是_____.

5. 已知 $A = \{\text{锐角}\}$, $B = \{0^\circ \text{到 } 90^\circ \text{的角}\}$, $C = \{\text{第一象限角}\}$, $D = \{\text{小于 } 90^\circ \text{的角}\}$

求 $A \cap B$, $A \cup C$, $C \cap D$, $A \cup D$

6. 有不大于 180° 的正角, 这个角的 7 倍角的终边与这个角的终边重合, 求这个角.

7. 若将时间拨慢 5 分钟, 则时针转了多少度? 分钟转了多少度?

§1 角的概念的推广

第2课时

重点难点聚焦

重点 能够写出终边相同的角, 区间角, 轴线角以及象限角的集合.

难点 正确地用集合和符号语言表示终边相同的角.

典型例题选讲

- 例1** 若 α, β 的终边关于 y 轴对称, 则必有 ()

A. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$

B. $\alpha + \beta = 90^\circ$

C. $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$

解析 设 $0^\circ < \alpha_0 < 360^\circ$, 且 α_0 与 α 终边相同, 则

$$\alpha = \alpha_0 + k_1 \cdot 360^\circ (k_1 \in \mathbf{Z})$$

设 $0^\circ < \beta_0 < 360^\circ$, 且 β_0 与 β 终边相同, 则

$$\beta = \beta_0 + k_2 \cdot 360^\circ (k_2 \in \mathbf{Z})$$

$\therefore \alpha_0$ 和 β_0 关于 y 轴对称,

$\therefore \alpha_0 + \beta_0 = 180^\circ$, 于是

$$\alpha + \beta = (\alpha_0 + \beta_0) + (k_1 + k_2) \cdot 360^\circ$$

$$= 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ (k = k_1 + k_2)$$

$$\therefore \alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$$

故选 C

例2 若 α 是第三象限角, 试求 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 所在的象限

解析 $\because \alpha$ 是第三象限角

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{① } k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ$$

当 $k = 2m (m \in \mathbf{Z})$ 时

$$m \cdot 360^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360^\circ + 135^\circ$$

$\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限

$$\text{当 } k = 2m + 1 (m \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } m \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360^\circ + 315^\circ$$

$\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限

因此, $\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限或第四象限

$$\text{② } k \cdot 120^\circ + 60^\circ < \frac{\alpha}{3} < k \cdot 120^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{当 } k = 3m (m \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } m \cdot 360^\circ + 60^\circ < \frac{\alpha}{3} <$$

$$m \cdot 360^\circ + 90^\circ (m \in \mathbb{Z})$$

$\frac{\alpha}{3}$ 在第一象限

当 $k = 3m + 1, (m \in \mathbb{Z})$ 时, $m \cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 210^\circ (n \in \mathbb{Z})$

$\frac{\alpha}{3}$ 在第三象限

当 $k = 3m + 2, (m \in \mathbb{Z})$ 时, $m \cdot 360^\circ + 300^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 330^\circ (n \in \mathbb{Z})$

$\frac{\alpha}{3}$ 在第四象限

因此, $\frac{\alpha}{3}$ 在第一象限或第三象限或第四象限

备选例题

1. 与 $S = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ - 240^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 相等的集合是 ()

- A. $\{\beta \mid \beta = k \cdot 180^\circ - 240^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 B. $\{\beta \mid \beta = k \cdot 720^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 D. $\{\beta \mid \beta = k \cdot 720^\circ - 240^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

2. 写出与 -1840° 终边相同的集合 S , 若 $\alpha \in S$ 且 $\alpha \in [-720^\circ, 360^\circ)$, 判断 α 的个数, 并求 α .

3. 写出终边在坐标轴上的角的集合.

思维方法拓展

1. 与 α 角终边相同的角表示为: $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}$, 要注意 α, k 的取值范围, 任意角的表示形式不唯一, 要根据题意中的范围, 具体处理.

2. 终边在坐标轴上的角不属于任何象限, 称轴线角, 要能够写出终边在坐标轴上的角的集合.

3. 求符合某条件且与已知角终边相同的角, 先写出与已知角终边相同的角的一般式, 再依条件讨论 k .

素质提高训练

课堂练习

1. α 为第二象限角, 则 α 的集合为 _____.

2. 若角 α 的终边落在第一、第三象限的角平分线上,

则角 α 的集合为 _____.

3. 在 $[360^\circ, 1440^\circ)$ 中与 $-21^\circ 16'$ 终边相同的角有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

4. 若 α 与 β 的终边互为反向延长线, 则有 ()

- A. $\alpha = \beta + 180^\circ$ B. $\alpha = \beta - 180^\circ$
 C. $\alpha = -\beta$ D. $\alpha = \beta + 2k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

5. 已知角 2α 的终边在 x 轴下方, 那么 α 的终边落在 ()

- A. 第一象限 B. 第二或第四象限
 C. 第一或第三象限 D. 第一或第四象限

6. 已知角 γ 与角 $\alpha + 45^\circ$ 终边相同, β 与角 $\alpha - 45^\circ$ 终边相同, 求 γ 与 β 的关系式.

7. 已知 $M = \{x \mid x = \frac{k}{2} \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}, N = \{x \mid x = \frac{k}{4} \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 比较 M 与 N 的关系.

课外反馈练习

1. 与 120° 角终边相同的角是 ()

- A. $k \cdot 360^\circ + 660^\circ (k \in \mathbb{Z})$
 B. $k \cdot 360^\circ - 600^\circ (k \in \mathbb{Z})$
 C. $2k \cdot 180^\circ + 120^\circ (k \in \mathbb{Z})$
 D. $k \cdot 360^\circ - 120^\circ (k \in \mathbb{Z})$

2. 设 $E = \{\text{钝角}\}, F = \{\text{小于 } 180^\circ \text{ 的角}\}, M = \{\text{第二象限的角}\}, N = \{\text{小于 } 180^\circ \text{ 而大于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, 则下列等式一定成立的是 ()

- A. $E = M$ B. $E = F$ C. $M = N$ D. $E = N$

3. 若 $M = \{\text{第一象限角}\}, N = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, 则 $A \cap B$ 是 ()

- A. M B. $\{\text{锐角}\}$ C. N D. 以上都不是

4. 与 -496° 终边相同的角是 _____, 它是第 _____ 象限的角, 其中最小正角是 _____, 最大负角是 _____.

5. α 为正角, β 为负角, α, β 终边关于原点对称, 则 $\alpha - \beta =$ _____.

6. 已知集合 $A = \{x \mid k \cdot 180^\circ + 60^\circ \leq x < k \cdot 180^\circ + 90^\circ,$

$k \in \mathbf{Z}$, $B = \{x \mid k \cdot 360^\circ + 45^\circ < x \leq k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 求 $A \cap B$.

7. 若角 α 的终边和函数 $y = -|x|$ 的图象重合, 试写出角 α 的集合.

§2 弧度制

第1课时

重点难点聚焦

重点 理解 1 弧度角的定义, 能用弧度作为单位度量任意角, 正确进行弧度与角度的换算.

难点 弧度的概念及其与角度的关系.

典型例题选讲

例 1 $\alpha = 1$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\delta = -\frac{\pi}{6}$, 试比较这四个角的大小.

解析 四个角的单位不同, 首先将 β 的单位角度换算成弧度, 再根据实数比较大小的方法进行比较.

$$\because \beta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} > 1 > -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \beta = \gamma > \alpha > \delta$$

注 在同一个题目中, 度量单位的统一便于解决问题.

例 2 集合 $M = \{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()

A. $M = N$

B. $M \supsetneq N$

C. $M \subsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$

解析 由于 $k \cdot \frac{\pi}{2}$ 的终边与 x 轴和 y 轴重合, 故 $k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ 的终边落在直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 上 (如图 4-1(a) 所示); 又由于 $k \cdot \frac{\pi}{4}$ 的终边与 x 轴、直线 $y = x$ 、 y 轴、直线 $y = -x$ 重合, 所以 $k \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ 的终边落在这 8 个位置上 (如图 4-1(b) 所示). 显然 $M \subsetneq N$, 故选 C.

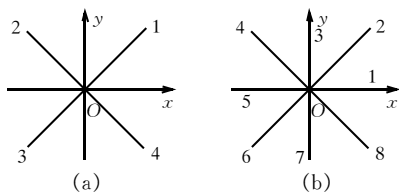


图 4-1

注 除上述分析法之外, 也可对整数 k 分类讨论.

即令 $k = 2n$, $2n + 1$ ($n \in \mathbf{Z}$) 得 $N = \{x \mid x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}\}$, 显然 $M \subsetneq N$.

备选例题

1. 将下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的形式

① $\frac{23}{3}\pi$ ② $-\frac{23}{3}\pi$ ③ 450° ④ -450°

2. 试判断 6, 7, 65, 66 所表示的角分别所在的象限.

3. 直径为 30 cm 的轮子以 60 rad/s (弧度/秒) 的速度旋转, 求轮周上一点经过 2 s 所转过的弧长.

思维方法拓展

1. 把等于半径长的圆弧所对的圆心角称为 1 rad. 在表示角的集合时, 一定要使用统一的单位制. 弧度制是十进制, 角度制是 60 进制.

2. 弧度制与角度制的换算, 必须掌握其实质性关系, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, 并要熟练记忆一些特殊角的弧度数.

3. 弧度制的建立, 使“角度”与“实数”之间建立了一一对应关系, 从而为三角函数的建立奠定了基础, 同时也揭示了圆中弧长与半径之间的关系.

素质提高训练

课堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, 则 $\angle A =$ _____ rad, $\angle B =$ _____ rad, $\angle C =$ _____ rad.

2. 用弧度表示, 终边在 $y = -x$ 上的角的集合为 _____

- _____.
3. 在集合 $M = \{\alpha \mid \alpha = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 中, 位于 -4π 到 -3π 之间的角为_____.
4. 在半径不同的两个圆中, 1 弧度的圆心角 ()
- A. 所对的弧长相等
B. 所对的弦长相等
C. 所对的弧长等于各自的半径
D. 以上都不对
5. 若 $\alpha = 10$, 则角 α 的终边落在 ()
- A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限
6. 下列各式中正确的是 ()
- A. $\pi = 180$
B. $\pi = 3.14$
C. $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$
D. $1 \text{ rad} = \pi$
7. 已知两角之差为 1 rad , 两角之和为 1° , 求两角的大小.
8. 已知视力正常的人, 能看清远处的文字的视角不小于 $5'$, 求离人 10 m 处所阅读文字的大小为多少.
- 角.
3. 定时准确的钟表上, 分针的角速度等于_____弧度/分
4. 若 α 是第二象限的角, 则 $\pi - \alpha$ 是 ()
- A. 第一象限的角
B. 第二象限的角
C. 第三象限的角
D. 第四象限的角
5. 下列各对角中, 终边相同的角是 ()
- A. $\frac{\pi}{2}$ 与 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
B. $-\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{22}{3}\pi$
C. $-\frac{7}{9}\pi$ 与 $\frac{11}{9}\pi$
D. $\frac{20}{3}\pi$ 与 $\frac{122}{3}\pi$
6. 若角 α 和角 β 的终边互为反向延长线, 则有 ()
- A. $\alpha = -\beta$
B. $\alpha = \beta - 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
C. $\alpha = \pi + \beta$
D. $\alpha = \beta + (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$
7. 求值
- $$\sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

课外反馈练习

1. $\alpha = 22^\circ 30' =$ _____rad, $-\frac{\pi}{12} =$ _____度.
2. 若 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 则 α 是第_____象限的

8. 设 $-2\pi < \alpha < \beta < -\pi$, 求 $2\alpha - \beta$ 的范围

§2 弧度制

第2课时

重点难点聚焦

重点 能够判断角所在的象限, 用弧度表示象限角, 弧长公式及扇形面积公式的运用.

难点 理解角的集合与实数集 $\mathbb{R}$ 的一一对应关系.

典型例题选讲

例1 若扇形 OAB 的面积是 1 cm^2 , 它的周长是 4 cm , 求扇形圆心角的弧度数.

解析 考查对扇形弧长公式和扇形面积公式的

运用.

设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 由已知条件可知:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}lR = 1 \\ 2R + l = 4 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} l = 2 \\ R = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 扇形圆心角的弧度数为 $\frac{l}{R} = 2$

说明 确定扇形的条件是两个, 最直接的条件是给出扇形的半径、弧长和圆心角其中的两个.

例2 已知集合 $A = \{\alpha \mid 2k\pi \leq \alpha \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq 4\}$, 求 $A \cap B$.

解析 首先要弄清集合 A 表示的一二象限角或终边落在 x 轴上, y 轴的正半轴上的角, 是角的集合; 集合 B 表示数的集合, 其次要注意对 k 的讨论.

当 $k \leq -2$ 时, $A \cap B = \emptyset$

当 $k = -1$ 时, $A \cap B = \{\alpha \mid -2\pi \leq \alpha \leq -\pi\} \cap$

$\{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq 4\} = \{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq -\pi\}$

当 $k = 0$ 时, $A \cap B = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \pi\} \cap \{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq 4\} = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \pi\}$

当 $k \geq 1$ 时, $A \cap B = \emptyset$

因此 $A \cap B = \{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq -\pi \text{ 或 } 0 \leq \alpha \leq \pi\}$

备选例题

1. 在半径为 1 的单位圆中, 已知弦 AB 的长度为 $\sqrt{3}$, 求弦 AB 所对圆心角的弧度数.

2. 若角 α 与 7α 的终边相同, 求在 $[0, 2\pi]$ 内满足条件的一切角.

3. 已知扇形的周长为 20 cm, 当扇形的半径为何值时, 扇形的面积最大, 最大值是多少?

思维方法拓展

1. 判断角 α 所在象限, 可先把其表示成 $\alpha = 2k\pi + \theta$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式, 其中 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

2. 掌握弧长公式 $l = |\alpha| \cdot R$, 扇形面积公式 $S = \frac{1}{2} l \cdot R = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot R^2$, 其中 R 为扇形的半径, $|\alpha|$ 为圆心角且为弧度.

3. 理解角的大小是一个与“半径”大小无关的定值, 仅仅是为了能使概念描述更具体的一个“过渡量”而已, 否则会制约角的概念的推广.

4. 对称是角与角的终边常见的一种关系, 利用对称可沟通角之间的联系.

①若 α 与 β 的终边关于 x 轴对称, 则有 $\alpha + \beta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

②若 α 与 β 的终边关于 y 轴对称, 则有 $\alpha + \beta = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

③若 α 与 β 的终边关于原点对称, 则有 $\alpha = \beta + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

④若 α 与 β 的终边在一条直线上, 则有 $\alpha = \beta + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

素质提高训练

课堂练习

1. 把下列各角表示成 $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 其中 $0 \leq \alpha < 2\pi$,

① $\frac{19}{3}\pi$ ② $-\frac{7}{4}\pi$

2. 圆周被分成 36 等份, 把每一等份的圆心角的大小用弧度表示出来.

3. 用弧度制表示第一象限角的集合为 _____

4. 圆的半径变为原来的 $\frac{1}{2}$, 而弧长不变, 则该弧所对的圆心角是原来的 _____ 倍.

5. 在半径为 $\frac{30}{\pi}$ 的圆中, 圆心角为周角的 $\frac{2}{3}$ 的角所对圆弧的长为 _____.

6. 终边经过点 $(m, -m)$ ($m \neq 0$) 的角 α 的集合是 ()

A. $\{\frac{3\pi}{4}\}$

B. $\{\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$

C. $\{\alpha \mid \alpha = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\{\alpha \mid \alpha = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

7. 已知扇形的周长是 6 cm, 面积为 2 cm^2 , 则扇形的中心角的弧度数是 ()

A. 1 B. 4 C. 1 或 4 D. 2 或 4

8. 一个半径为 r 的扇形, 其周长恰好等于该扇形弧所在的半圆的弧长, 求:

①扇形的圆心角是多少弧度

②扇形的面积是多少

课外反馈练习

1. 若 $4\pi < \alpha < 6\pi$, 且 α 与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边垂直, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若 $-6\pi < \alpha < -4\pi$, 且 α 与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边互为反向延长线, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 用弧度制表示 x 轴上方的角的集合为 _____.

4. 两个圆心角相同的扇形的面积之比为 1:2, 则两个扇形弧长的比为 ()

A. 1:2 B. 1:4 C. $1:\sqrt{2}$ D. 1:8

5. 已知扇形 AOB 的圆心角为 120° , 半径为 6, 则扇形所含弓形的面积为 ()

A. $12\pi - 9$ B. $12\pi - 9\sqrt{3}$

C. $12 + 9\sqrt{3}\pi$ D. $12 - 9\sqrt{3}$

6. 把 $-\frac{11}{4}\pi$ 表示成 $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的形式, 使 $|\theta|$ 最小的 θ 为 ()

A. $-\frac{3}{4}\pi$ B. $-\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{5}{4}\pi$

7. 如图 4-2, 圆周上点 A, 依逆时针方向做匀速圆周运动, 已知 A 点 1 分钟转过 θ 角 ($0 < \theta < \pi$), 2 分钟到达第三象限, 14 分钟回到原来的位置, 求 θ 是多少弧度?

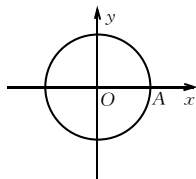


图 4-2

§3 任意角的三角函数

第 1 课时

重点难点聚焦

重点 掌握任意角的正弦, 余弦, 正切函数的定义, 已知角终边上一点, 求各三角函数值; 三角函数的定义域.

难点 一个角的六个三角函数值与终边上点的坐标无关, 它反映的是 x, y, r 的比值; 熟练记住特殊角的三角函数值.

典型例题选讲

例 1 已知 α 的终边经过点 $P(3t, 4t)$, $t \neq 0$, 求角 α 的正弦、余弦和正切.

解析 考查任意角三角函数定义的使用以及实数绝对值的概念和简单分类讨论的思想.

由 $x = 3t, y = 4t$, 得

$$r = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = 5|t|$$

当 $t > 0$ 时, $r = 5t$

$$\text{因此 } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}$$

当 $t < 0$ 时, $r = -5t$

$$\text{因此 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}.$$

例 2 已知角 θ 终边上一点 $P(x, 2x-3)$, ($x \neq 0$), 且 $\tan \theta = -x$, 求 $\sin \theta + \cos \theta$ 的值.

解析 可由正切函数的定义及 $\tan \theta = -x$, 列出关于 x 的方程, 解出 x 的值, 再根据正弦函数、余弦函数的定义求 $\sin \theta + \cos \theta$ 的值.

$$\text{由 } \tan \theta = \frac{2x-3}{x} \text{ 得 } \frac{2x-3}{x} = -x,$$

$$\text{整理得 } x^2 + 2x - 3 = 0, x = -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$\text{当 } x = -3 \text{ 时, } P(-3, -9), r = 3\sqrt{10}, \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$= -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } P(1, -1), r = \sqrt{2}, \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = 0$$

备选例题

1. 已知角 α 终边上一点 $P(4, y)$ 且 $\sin \alpha = \frac{y}{5}$

求 $\cos \theta, \tan \theta$.

2. 计算 $a^2 \cos 2\pi - b^2 \sin \frac{3\pi}{2} + ab \cdot \cos \pi$

$$- ab \sin \frac{\pi}{2}.$$

3. 若角 α 的终边过点 $A(0, n)$ ($n \neq 0$), 则下列各式中无意义的是 ()

A. $\sin \alpha$ B. $\tan \alpha$

C. $\csc \alpha$ D. $\cos \alpha$ **思维方法拓展**

1. 由三角函数的定义知, 一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关, 而与终边上点的位置无关. 因此, 若已知一角的终边, 我们可以在终边取一个异于原点的特殊点坐标来求三角函数值.

2. 三角函数是以角为变量, 以比值为函数值的函数. 由于弧度制的引入, 使角度与实数之间建立了一一对应关系, 从而可以更好地把握三角函数与所学过的一次函数、二次函数的共同性.

3. 确定三角函数的定义域, 要依据三角函数值的定义, 比值的分母不为零这一条件.

素质提高练习**课堂练习**

1. $3\sin 90^\circ + 4\cos 0^\circ - 5\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$ 等于 _____

2. 已知点 $P(-3, -4)$ 在角 α 的终边上, 则 $\sin \alpha =$ _____ $\cos \alpha =$ _____, $\tan \alpha =$ _____.

3. 函数 $\tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的定义域是 ()

A. $x \in \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$

B. $x \in \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$

C. $x \in \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

D. 以上都不对

4. 若角 α 终边上有一点 $P(-m, m)$ ($m \neq 0$), 则 $\sin \alpha$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 以上都不对

5. 若角 α 的终边落在函数 $y = -2x$ ($x \leq 0$) 的图象上, 则 $\cos \alpha =$ ()

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

6. 求下列各式的值:

① $m \sin \frac{5\pi}{2} + n \tan(-4\pi)$

② $a^2 \sin 810^\circ + b^2 \tan 765^\circ - 2ab \cos 360^\circ$

7. 求函数 $y = \tan(2x + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{1 - |x|}$ 的定义域.

课外反馈练习

1. $\cos(-315^\circ) =$ _____, $\tan \frac{7}{3}\pi =$ _____, $\sin(-660^\circ) =$ _____

2. 设 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 而函数 $f(x) = (\sin \alpha)^{x^2 - 2x + 3}$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$, 则 $\alpha =$ _____.

3. 已知角 $\theta = -\frac{11}{6}\pi$, P 为角 θ 终边上一点, $|OP| = 2\sqrt{3}$, 则点 P 的坐标为 _____.

4. 已知 α 是第二象限角, 其终边上一点为 $P(a, \sqrt{5})$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}a$, 则 $\sin \alpha$ 的值等于 ()

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

5. 设角 α 的终边经过点 $(-6t, -8t)$ ($t \neq 0$), 则 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $-\frac{7}{5}$

C. $-\frac{1}{5}$ 或 $-\frac{7}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{5}$

6. 已知角 α 的终边经过点 $P(-4a, 3a)$, ($a \neq 0$), 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

7. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列, 且 $\angle A - \angle C = \frac{\pi}{3}$, 求 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ 的值.

§3 任意角的三角函数

第2课时

重点难点聚焦

重点 ①六种三角函数在四个不同象限中的符号

②用三角函数线表示三角函数

③用第一组诱导公式求三角函数值

难点 ①由三角函数值的符号判断角终边的位置

②正确找出正弦线、余弦线、正切线

典型例题选讲

【例1】已知 α 为锐角, 求证:

① $1 < \sin \alpha + \cos \alpha < \frac{\pi}{2}$

② $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$

解析 如图 4-3, 设角 α 的终边与单位圆交于 $P(x, y)$, 过 P 作 $PQ \perp Ox$, $PR \perp Oy$, Q 、 R 为垂足. 过 A 作 $AC \perp Ox$ 交 α 的终边于 C .

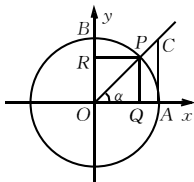


图 4-3

① $\because$ 在 $|QP| = \sin \alpha$, $|OQ|$

$= x = \cos \alpha$

又 $\because$ 在 $\triangle OPQ$ 中, $|QP| + |OQ| > |OP|$

$\therefore \sin \alpha + \cos \alpha > 1$

$\because S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |QP| = \frac{1}{2} \sin \alpha$,

$S_{\triangle OPB} = \frac{1}{2} |OB| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cos \alpha$

$S_{\text{扇形}OAB} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4}$

又 $\because S_{\triangle OAP} + S_{\triangle OPB} < S_{\text{扇形}OAB}$,

$\therefore \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha < \frac{\pi}{4}$,

即 $\sin \alpha + \cos \alpha < \frac{\pi}{2}$

因此 $1 < \sin \alpha + \cos \alpha < \frac{\pi}{2}$

② $S_{\text{扇形}OAP} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha$,

$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \tan \alpha$

$\because S_{\triangle OAP} < S_{\text{扇形}OAP} < S_{\triangle OAC}$

$\therefore \frac{1}{2} \sin \alpha < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} \tan \alpha$

即 $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$

【例2】求函数 $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{|\tan x|}{\tan x} +$

$\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域

【解析】由于 $x \neq \frac{1}{2}k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 所以只需分象限对 α 进行分类, 去掉绝对值的符号, 达到计算其值的目的, 这时则要熟记三角函数在不同象限中的符号.

①当 x 是第一象限角时, $y = \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} +$

$\frac{\tan x}{\tan x} + \frac{\cot x}{\cot x} = 4$

②当 x 是第二象限角时, $y = \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{-\cos x}{\cos x} +$

$\frac{-\tan x}{\tan x} + \frac{-\cot x}{\cot x} = -2$

③当 x 是第三象限角时, $y = \frac{-\sin x}{\sin x} + \frac{-\cos x}{\cos x} +$

$\frac{\tan x}{\tan x} + \frac{\cot x}{\cot x} = 0$

④当 x 是第四象限角时, $y = \frac{-\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} +$

$\frac{-\tan x}{\tan x} + \frac{-\cot x}{\cot x} = -2$

 $\therefore$ 函数的值域为 $\{4, 0, -2\}$

备选例题

1. 已知 θ 为第二象限角, 判定 $\sin(\cos \theta) \cdot \cos(\sin \theta)$ 的符号.

2. 利用单位圆中的三角函数线, 求满足 $|\cos x| \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的集合.

3. 求下列函数的定义域:

① $y = \sqrt{\cos x} + \lg 2 + x - x^2$

② $y = \frac{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}}{1 + \cos x}$

思维方法拓展

①由三角函数的定义可知, 各三角函数的符号就是相应比值的符号, 由于比值的符号取决于终边所在的象限, 于是有“符号看象限”这一重要结论, 正弦在一、二象限为正, 余弦在一、四象限为正, 正切在一、三象限为正.

②正弦线、余弦线、正切线是正弦、余弦、正切函数的一种几何表示,书写三角函数线时,要注意起点和终点的次序,今后可以根据三角函数线研究三角函数的图象和性质.

③由终边相同的角的同一三角函数值相等可推出有同一个函数值的角有无数多个,应用诱导公式可将求某些角的三角函数值转化为求锐角的三角函数值.

素质提高训练

课堂练习

- $\cos \alpha < 0$, 则 α 为第_____象限的角.
- 已知 $|\tan \alpha| = -\tan \alpha$, 则角 α 终边落在第_____象限.
- 已知 $\cos \theta \cdot \tan \theta < 0$, 则角 θ 为第_____象限的角.
- 若 $\tan \theta \cdot \sin \theta < 0$ 且 $\tan \theta \cdot \cos \theta > 0$, 则 θ 是 ()
A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A \cdot \cos B \cdot \tan C < 0$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 锐角或钝角三角形
- 已知 $|\cos \alpha| = \cos \alpha$, $|\tan \alpha| = -\tan \alpha$, 则 α 取值范围是 ()
A. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$
B. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z})$
C. $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi) (k \in \mathbb{Z})$
D. $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi) (k \in \mathbb{Z})$
- 已知 $x \in (1, \frac{3}{2})$, 求 $|\cos \pi x| + |\cos \frac{\pi x}{2}| - |\cos \pi x + \cos \frac{\pi x}{2}|$ 的值.

8. 利用单位圆, 写出符合条件 $\sin \alpha > \frac{1}{2}$ 的 α 的取值范围.

课外反馈练习

- 若点 $P(a-9, a+2)$ 在角 α 的终边上, 且 $\cos \alpha \leq 0$, $\sin \alpha > 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- $\tan 134^\circ \cdot \sin 273^\circ \cdot \cos 180^\circ$ _____ 0 (填 “>”, “=”, “<”).
- 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 0)$, 则函数 $f(\sin x)$ 的定义域是_____.
- 设 α 是第四象限的角, 则 $\sin \alpha$ 与 $\tan \alpha$ 的大小关系是 ()
A. $\sin \alpha > \tan \alpha$ B. $\sin \alpha < \tan \alpha$
C. $\sin \alpha = \tan \alpha$ D. 不能确定
- $\angle A > \angle B$ 是 $\sin A > \sin B$ 的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
- 如果角 α ($0 < \alpha < 2\pi$) 的正弦线与余弦线长度相等, 且符号相同, 那么 α 的值为 ()
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{5}{4}\pi$
C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5}{4}\pi$ D. 以上都不对
- 设 $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x & (x < 1) \\ \sqrt{x(x-1)} - 1 & (x > 1) \end{cases}$
求 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{4}{3})$ 的值.

§4 同角三角函数的基本关系式

第1课时

重点难点聚焦

重点 ①同角三角函数的基本关系:平方关系、商数关系、倒数关系

②掌握已知一个角的一个三角函数值,求这个角其他三角函数值的方法

难点 根据一个角的一个三角函数值,求其他的三角函数值时,要结合角所在的象限进行讨论.

典型例题选讲

【例1】已知 $\sin x + \cos x = a$, 求 $\sin^3 x + \cos^3 x$.

解析 将 $\sin x + \cos x = a$ 两边同时平方,得

$$\begin{aligned} 1 + 2\sin x \cdot \cos x &= a^2, \text{ 即 } \sin x \cdot \cos x = \frac{a^2 - 1}{2} \\ \therefore \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x) \\ &= a \cdot \left(1 - \frac{a^2 - 1}{2}\right) \\ &= \frac{3a - a^3}{2} \end{aligned}$$

【注】通过平方关系,可利用 $t = \sin \alpha + \cos \alpha$ 表示

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2}$, 也可利用 $t = \sin \alpha - \cos \alpha$ 表示

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{2}$, 这是将三角问题转化为代数问题的一条途径.

【例2】已知 $\tan \alpha = -\frac{15}{8}$, 求 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 的值.

解析 由 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 可得

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{64}{289}$$

$$\text{又 } \because \tan \alpha = -\frac{15}{8} < 0,$$

$\therefore \alpha$ 是第二或第四象限的角.

(1) 当 α 是第二象限角时, $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, $\sin \alpha =$

$$\cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{15}{17}$$

(2) 当 α 是第四象限角时, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\sin \alpha =$

$$-\frac{15}{17}$$

备选例题

1. 化简

$$\textcircled{1} \sqrt{1 - 2\sin \theta \cdot \cos \theta} + \sqrt{1 + 2\sin \theta \cdot \cos \theta} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{4})$$

$$\textcircled{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (\text{其中 } \alpha \text{ 是第三象限的角})$$

2. 已知 $\sin \alpha = m$, $0 < |m| < 1$, 且 $\tan \alpha =$

$$-\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}, \text{ 则 } \alpha \text{ 在 } \quad (\quad)$$

A. 第一或第二象限 B. 第三或第四象限

C. 第一或第四象限 D. 第二或第三象限

3. 若 $\sin \theta = \frac{m-3}{m+5}$, $\cos \theta = \frac{4-2m}{m+5}$, 其中 θ 在第二象限, 则 m 的取值范围是 $(\quad)$

A. $m = 8$ B. $m = 0$ 或 $m = 8$

C. $3 < m < 9$ D. $-5 < m < 9$

思维方法拓展

① $\sin \alpha + \cos \alpha$, $\sin \alpha - \cos \alpha$, $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 三者之间的关系极为密切, 若知其一, 另两个必能用它表示,

如 $\sin \alpha + \cos \alpha = t$, 则 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2}$, $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \sqrt{2 - t^2}$.

② 由一个角的一个三角函数值, 求这个角的其他三角函数值时, 一般先用平方关系, 然后两边开方, 这时要考虑正负, 要对角的象限加以讨论.

③ 三个基本关系式要注意变形, 如 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$ 等形式.

素质提高训练

课堂练习

1. 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 且 α 在第二象限, 则 $\tan \alpha =$ _____.

2. 若 $\cos \alpha < 0$, 且 $\tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} < 0$, 则 α 为第 _____ 象限的角.

3. 若 $\log_3 m = \sin^2 \alpha$, $\log_3 n = \cos^2 \alpha$, 则 $m \cdot n$ 的值为 $(\quad)$

A. -1 B. 1 C. -3 D. 3

4. 下列各式能成立的是 $(\quad)$

A. $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{3}$

B. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 且 $\tan \alpha = 2$

C. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ 且 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\tan \alpha = \cot \alpha = -\frac{1}{4}$

5. 设 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$, 则 $\tan \alpha + \cot \alpha$ 的值为 ()

A. ± 2 B. -2 C. 1 D. 2

6. 若 $f(\cos x) = \cos 3x$, 则 $f(\sin 30^\circ)$ 的值为 ()

A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

7. 已知 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, 且 α 为第三象限角, 求 $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ 的值.A. 若角 α 在第二象限, 且 $\sin \alpha = m$, $\cos \alpha = n$, 则

$$\tan \alpha = -\frac{m}{n}$$

B. 无论 α 为何角, 都有 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ C. 总存在一个角 α , 使得 $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ D. 总存在一个角 α , 使得 $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{2}$ 6. 已知 α 是三角形的一个内角, 且 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$, 则这个三角形是 ()

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 以上都不对

7. 已知 $\sin \alpha = -2\cos \alpha$, 求 α 的正弦、余弦、正切.

课外反馈练习

1. 若 θ 为锐角, 则 $\log_{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) =$ _____.2. 已知 $2\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{3}\sin \alpha$, 则 $\tan \alpha =$ _____.3. 化简: $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ =$ _____.4. 若 $\tan \alpha = -1$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 0 D. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 下列命题中, 正确的命题是 ()

8. 是否存在实数 m , 使 $\sin x = \frac{1}{1-m}$, $\cos x = \frac{m}{m-1}$, 且 x 是第二象限的角? 若存在, 请求出实数 m ; 若不存在, 试说明理由.

§4 同角三角函数的基本关系式

第2课时

重点难点聚集

①掌握利用同角三角函数基本关系式进行三角函数化简、求值和证明的方法.

②注意运用“1”进行代换.

典型例题选讲

【例1】已知 $\tan \alpha = 2$, 求下列各式的值:

① $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$

② $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

③ $\frac{1}{\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 5\sin^2 \alpha}$

解析 已知 $\tan \alpha$ 的值, 求关于 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的代数式的值, 关键是运用公式 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 把所求的式子转化为关于正切的表达式, 然后求解. $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos \alpha \neq 0$

① $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{2+1}{2-1} = 3$

② $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1}$
 $= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$
 $= \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{3} \frac{1}{\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 5\sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 5\sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha + 1}{1 - 2\tan \alpha + 5\tan^2 \alpha} = \frac{2^2 + 1}{1 - 4 + 20} \\
 &= \frac{5}{17}
 \end{aligned}$$

【例2】证明下列等式：

①已知 $\cos A = \cos \theta \cdot \sin C$, $\cos B = \sin \theta \cdot \sin C$, 求证 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

② $2(1 + \sin x)(1 + \cos x) = (1 + \sin x + \cos x)^2$

【解析】①对于条件等式, 注意将已知条件和要证结论联系起来, 设法利用已知条件

$$\begin{aligned}
 & \because \cos A = \cos \theta \cdot \sin C, \cos B = \sin \theta \cdot \sin C \\
 & \therefore \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \\
 &= (1 - \cos^2 A) + (1 - \cos^2 B) + \sin^2 C \\
 &= 2 - (\cos \theta \cdot \sin C)^2 - (\sin \theta \cdot \sin C)^2 - \sin^2 C \\
 &= 2 - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 C + \sin^2 C = 2 \\
 & \text{则 } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{2} \text{右边} = (1 + \sin x + \cos x)^2 \\
 &= 1 + \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x \cdot \cos x \\
 &= 2(1 + \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x) \\
 &= 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) = \text{左边} \\
 & \therefore 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) = (1 + \sin x + \cos x)^2
 \end{aligned}$$

备选例题

1. 已知 $\sin \theta, \cos \theta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a = 0$ 的两个根.

- ①求 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 的值;
②求 $\tan \theta + \cot \theta$ 的值.

2. 化简 $\frac{1 - \sin^6 \theta - \cos^6 \theta}{1 - \sin^4 \theta - \cos^4 \theta}$.

3. 求证: $\frac{3 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{2\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha + \sin^2 \alpha$.

思维方法拓展

①关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的齐次式 (分子、分母中各项的次数相等), 均可化为 $\tan \alpha$ 的表达式, 同时, 注意“1”的灵活运用.

②三角函数式的化简就是把函数通过变形达到以下几点: a. 次数尽可能低; b. 项数尽可能少; c. 函数种类尽可能少; d. 能去根号的要去根号; e. 尽可能不含分母; f. 能求值的求值.

③证明等式成立, 基本途径有三种: a. 变化等式的一边, 直至与另一边相同; b. 变化等式的两边, 都等于第三式; c. 证明一个与原等式等价的新的等式成立.

素质提高训练

课堂练习

1. 若 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 $\frac{2\cos \alpha + \sqrt{2}\sin \alpha}{2\cos \alpha - \sqrt{2}\sin \alpha} =$ _____.

2. 化简: $(a\sin \theta + b\cos \theta)^2 + (a\cos \theta - b\sin \theta)^2 =$ _____.

3. 已知 $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha =$ _____.

4. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = a$, 则 $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ 的值等于 ()

A. $\frac{a^2 - 1}{2}$ B. a^3 C. $\frac{a(3 - a^2)}{2}$ D. $\frac{a(a^2 - 3)}{2}$

5. 若角 α 的终边落在直线 $x + y = 0$ 上, 则 $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ 的值等于 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. 0

6. 若 $a\sin x + \cos x = 1$, $b\sin x - \cos x = 1$, 且 $x \neq k\pi$, 那么 ab 等于 ()

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

7. 求证 $2\cos^2 \theta + \sin^4 \theta = \cos^4 \theta + 1$.

课外反馈练习

1. 若 $3\sin \alpha + 5\cos \alpha = 5$, 则 $3\cos \alpha - 5\sin \alpha =$ _____.

2. 若 $\sin \theta + \sin^2 \theta = t$, 则 $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta$ 的值为 _____.

3. 若 $\sin \alpha = \cos \alpha$, 则 $\frac{1}{4}\sin^2 \alpha + \frac{3}{2}\cos^2 \alpha =$ _____.

4. 已知 $\tan \alpha + \sin \alpha = a$, $\tan \alpha - \sin \alpha = b$, 则 $\cos \alpha$ 等于 ()

A. $\frac{a+b}{2}$ B. $\frac{a-b}{2}$

C. $\frac{a+b}{a-b}$ D. $\frac{a-b}{a+b}$

5. 若 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 且 $0 < x < \pi$, 则 $\tan x$ 等于 ()

A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

6. 若 $\sin \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, 则 $\cos^2 \alpha + \cos^6 \alpha + \cos^8 \alpha$ 的值等于 ()

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{5}{2}$

7. 化简 $\frac{1 - (\cos^6 x + \sin^6 x)}{\sin^2 x} + 3\sin^2 x$.

8. 设 A, B, C 是三角形的三内角, 且 $\lg \sin A = 0$, 又 $\sin B, \sin C$ 是关于 x 的方程 $4x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + k = 0$ 的两个根, 求实数 k 的值.

§5 正弦、余弦的诱导公式

第1课时

重点难点聚集

重点 正弦、余弦的诱导公式 (一) (二) (三) (四) (五) 的概括记忆及综合运用它们把求任意角的三角函数值转化为求锐角的三角函数值.

难点 记忆书本上对五组诱导公式的概括: “纵变横不变, 符号看象限”, 这时, 应把 α 看成锐角.

典型例题选讲

例1 给出下列等式: ① $\cos(\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$

② $\tan(-\frac{23}{6}\pi) = \sqrt{3}$ ③ $\sin \frac{7}{5}\pi = \sin(-\frac{3}{5}\pi)$ ④

$\sin(-1065^\circ) = \cos \frac{19}{12}\pi$

恒成立的是_____.

解析 ① $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, 而 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, 则等式不一定成立

② $\tan(-\frac{23}{6}\pi) = \tan(\frac{\pi}{6} - 4\pi) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{3}$

③ $\sin \frac{7}{5}\pi = \sin(\pi + \frac{2}{5}\pi) = -\sin \frac{2}{5}\pi$

又 $\sin(-\frac{3}{5}\pi) = -\sin \frac{3}{5}\pi = -\sin(\pi - \frac{2}{5}\pi) = -\sin \frac{2}{5}\pi$

④ $\because \sin(-1065^\circ) = -\sin 1065^\circ = -\sin(-15^\circ +$

$3 \times 360^\circ) = \sin 15^\circ$

又 $\cos \frac{19}{12}\pi = \cos(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi) = \cos \frac{5\pi}{12} = \cos 75^\circ = \sin 15^\circ$

故等式③④恒成立

例2 化简:

① $\frac{\sin(\alpha + 180^\circ) \cos(-\alpha)}{\tan(-\alpha + 360^\circ)}$

② $\sin^2(-\alpha) + \tan 2\pi + \alpha \cdot \cos^2(\pi + \alpha) - \sin 2\pi - \alpha \cos(\pi - \alpha) - \frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\pi + \alpha)}{\tan^2(\alpha - 2\pi)}$

解析 ① 原式 $= \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}} = \cos^2 \alpha$

② 原式 $= \sin^2 \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{-\sin^2 \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

例3 已知 $\sin(\alpha - \pi) = \frac{1}{3}$, 求 $\cos(3\pi - \alpha) + \sin(5\pi + \alpha)$ 的值.

解析 $\because \sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha =$

$\frac{1}{3}$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{从而 } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{又 } \cos (3\pi - \alpha) + \sin (5\pi + \alpha) = -\cos \alpha - \sin \alpha$$

$$\text{若 } \alpha \text{ 为第三象限角, 原式} = -\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 1}{3}$$

若 α 为第四象限角,

$$\text{原式} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3}$$

备选例题

1. 化简 $\cos (\alpha + 180^\circ) \cdot \sin (-\alpha) \cdot \cos (-\alpha - 180^\circ)$.

2. 计算 $\tan \left(-\frac{35}{6}\pi\right) \sin \left(-\frac{46}{3}\pi\right) - \cos \frac{37}{6}\pi$
 $\tan \frac{55}{6}\pi$.

3. 已知 $\cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\cos \left(\frac{5}{6}\pi + \alpha\right)$ 的值

素质提高训练

课堂练习

1. 若 $\tan (5\pi + \alpha) = -\sqrt{3}$, 且 $\cos \alpha > 0$, 则 $\sin (\alpha - \pi) =$ _____.

2. 若 $\cos \left(\frac{1}{6}\pi - \alpha\right) = m$ ($|m| \leq 1$), 则 $\cos \left(\frac{7}{6}\pi - \alpha\right)$ 的值 = _____.

3. 若 $|\cos \alpha| = \cos (\pi + \alpha)$, 则角 α 的集合为 _____.

4. 函数式 $\sqrt{1 + 2\sin (\pi - 2)} \cos (\pi + 2)$ 化简的结果是 _____.

A. $\sin 2 - \cos 2$

B. $\pm (\sin 2 - \cos 2)$

C. $\cos 2 - \sin 2$

D. 以上都不对

5. 设 $x \in \mathbf{Z}$, 则 $f(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$ 的值域为 _____.

A. $\{-1, -\frac{1}{2}\}$

B. $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$

C. $\{\frac{1}{2}, 1\}$

D. $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

6. 已知函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, 则下列等式成立的是 _____.

A. $f(2\pi - x) = f(x)$

B. $f(2x + 1) = f(x)$

C. $f(-x) = -f(x)$

D. $f(-x) = f(x)$

7. 若 $\sin (\alpha - \pi) = 2\cos (2\pi - \alpha)$,

$$\text{求 } \frac{\sin (\pi - \alpha) + 5\cos (2\pi - \alpha)}{3\cos (\pi - \alpha)}.$$

思维方法拓展

1. 五组同名三角函数的公式 $k\pi \pm \alpha$ 或 $k \cdot 180^\circ \pm \theta$ ($k \in \mathbf{Z}$) 与 α 或 θ 各三角函数关系可用“函数名不变, 符号看象限”, 所谓符号看象限, 即将 θ 看成锐角, 再将 $k\pi \pm \alpha$ 所处的象限根据三角函数在四个象限中的符号确定.

2. 利用诱导公式, 求任意角的三角函数值, 或化简三角函数式时, 一般可按下列步骤进行:

① 把负角的三角函数化成正角的三角函数

② 利用终边相同的角的三角函数公式, 把大于 360° 的角, 化成 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角的三角函数

③ 利用诱导公式化为锐角三角函数的值

课外反馈练习

1. 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (1 - \sin x) + \log_{\frac{1}{2}} (1 + \sin x)$, 则

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{_____}.$$

2. 已知集合 $P = \{x | x = 2\cos \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{y | y =$

$$2\sin \frac{2k-3}{6}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$$
, 则 P 与 Q 的关系是 _____.

3. 化简 $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的结果是 _____.

4. 设 A, B, C 是锐角三角形 ABC 的三个内角, 则在①

$\sin(A+B) - \sin C$ ② $\cos(A+B) + \cos C$ ③ $\tan(A+B) + \tan C$ ④ $\cos(A+B) - \cos C$ 这四个式子中, 值为常数的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 设 $k \in \mathbf{Z}$, 若两角 α, β 的终边关于 x 轴对称, 则 ()

A. $\alpha + \beta = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

B. $\alpha + \beta = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

C. $\alpha - \beta = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

D. $\alpha - \beta = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\cos x) = \frac{x}{2}$, ($0 \leq x \leq \pi$), 则

$f(-\frac{1}{2})$ 的值是 ()

A. $\cos \frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\cos \frac{\pi}{3}$

7. 化简:

$$\begin{aligned} & \text{① } \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} + \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)} \\ & \text{② } \sin 750^\circ \cdot \sin 150^\circ + \cos 930^\circ \cdot \cos(-870^\circ) + \tan 600^\circ \cdot \tan 1110^\circ. \end{aligned}$$

8. 设 $\frac{\sin(\pi - \theta) + \cos(2\pi - \theta)}{\cos(\frac{5}{2}\pi - \theta) + \sin(\frac{3}{2}\pi - \theta)} = 2$, 求 $\tan \theta$ 的值.

§5 正弦、余弦的诱导公式

第2课时

重点难点聚集

① 能综合运用诱导公式进行化简及证明

② 在运用诱导公式时, 应把 α 看成锐角, 则 $180^\circ - \alpha$ 为第二象限角, $180^\circ + \alpha$ 为第三象限角, $360^\circ - \alpha$ 为第四象限角

典型例题选讲

例1】 计算 $\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{6}) + \dots + \cos(102\pi - \frac{\pi}{6})$.

解析】 $\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$
 $= -\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = 0$
 $\cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{6})$
 $= -\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = 0$
 $\dots\dots$
 $\cos(101\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(102\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = 0$
 总共 102 项, 两两抵消
 $\therefore$ 原式 = 0

例2】 设 $k \in \mathbf{Z}$, 化简

$$\frac{\sin(k\pi - \alpha) \cdot \cos(k\pi + \alpha)}{\sin[(k+1)\pi + \alpha] \cdot \cos[(k+1)\pi - \alpha]}$$

解析】 $k \in \mathbf{Z}$, 因此当 k 取奇数或偶数时, 本题的结果将出现不同的情况, 故应对 k 取值的情况分类讨论.

当 $k = 2n$ ($n \in \mathbf{Z}$) 时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sin(2n\pi - \alpha) \cdot \cos(2n\pi + \alpha)}{\sin[2n\pi + (\pi + \alpha)] \cdot \cos[2n\pi + (\pi - \alpha)]} \\ &= \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)} \\ &= \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{-\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

当 $k = 2n + 1$ ($n \in \mathbf{Z}$) 时,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sin[2n\pi + (\pi - \alpha)] \cdot \cos[2n\pi + (\pi + \alpha)]}{\sin[2n\pi + 2\pi + \alpha] \cdot \cos[2n\pi + 2\pi - \alpha]} \\ &= \frac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha)}{\sin(2\pi + \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $k \in \mathbf{Z}$ 时, 原式化简结果为 -1

例3】 已知 $\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$),

求 ① $\sin \alpha - \cos \alpha$

② $\sin^3 (2\pi - \alpha) + \cos^3 (2\pi - \alpha)$ 的值

解析 已知条件中含有 $\pi - \alpha$ 和 $\pi + \alpha$, 欲求值的三角函数式中含有 $2\pi - \alpha$, 可以用诱导公式化为 α 的三角函数值, 这样再求解.

$$\textcircled{1} \text{ 由已知得: } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{两边平方得 } 1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\therefore 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{7}{9}$$

$$\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \therefore \sin \alpha > 0 > \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{故有 } \sin \alpha - \cos \alpha &= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \sqrt{1 + \frac{7}{9}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \sin^3 (2\pi - \alpha) + \cos^3 (2\pi - \alpha)$$

$$= \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$= (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$= -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{7}{18}\right)$$

$$= -\frac{22}{27}$$

备选例题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin (2\pi - A) = -\sqrt{2} \sin (\pi - B)$, $\sqrt{3} \cos A = -\sqrt{2} \cos (\pi - B)$, 求 $\sin A \cdot \cos B$ 的值.

2. 化简

$$\textcircled{1} \sin (-\alpha) \cdot \cos (-\alpha - \pi) \tan (2\pi + \alpha)$$

$$\textcircled{2} \frac{\cos (\alpha - \pi) \sin (\alpha - 2\pi)}{\sin (\pi - \alpha) \cdot \cos (2\pi - \alpha)}$$

思维方法拓展

1. 诱导公式起着变名、变角、变号等方面的作用, 是解决三角函数有关问题, 特别是三角函数的求值, 化简, 证明的重要工具.

2. 在解答有关三角函数式的问题时, 不仅要注意函数间的恒等变形, 而且还要注意角之间的关系 (如互补、互余等) 及变换.

3. 证明三角恒等式的基本方法有三种: ①化繁为简, 即将较复杂的一边进行恒等变形, 证明它与另一边相等; ②左右归一, 当等式两边都比较复杂时, 应对两边同时变形为相同的结果; ③等价转化, 当给定的恒等式不容易证明时, 可考虑转化成与之等价的且较为简单的等式的证明.

素质提高训练

课堂练习

$$1. \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ =$$

$$2. \sin \frac{16}{3} \pi \cdot \cos \left(-\frac{17}{6} \pi\right) - \cos \frac{10\pi}{3} \cdot \sin \left(-\frac{23}{6} \pi\right) =$$

$$3. \text{若 } \sin (3\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}, \text{ 且 } |\tan (3\pi - \alpha)| = -\tan \alpha, \text{ 则 } \cos (-\alpha) =$$

$$4. \text{与 } \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \text{ 的值相等的是 } \quad (\quad)$$

$$A. \sin \left(\frac{3}{2} \pi + \theta\right)$$

$$B. \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$C. \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$D. \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$5. \text{若 } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1, \text{ 则 } \sin \alpha + \cos \alpha \text{ 的值为 } (\quad)$$

$$A. 1 \quad B. -1 \quad C. \pm 1 \quad D. 0$$

$$6. \text{已知 } \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}, \text{ 求 } \sin \left(\frac{7}{6} \pi + x\right) + \cos \left(\frac{5}{6} \pi - x\right) \text{ 的值.}$$

3. 已知 $\sin (3\pi - \alpha) = \sqrt{2} \sin (2\pi + \beta)$, $\sqrt{3} \cos (-\alpha) = -\sqrt{2} \cos (\pi + \beta)$, 且 $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, 求 $\sin \alpha$, $\sin \beta$.