现代数学基础丛书 94

# 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用

王玉文 著

哈尔滨师范大学优秀专著出版基金资助

科学出版社

## 内 容 简 介

Banach空间中线性算子的广义逆是空间$R^n$中矩阵广义逆与Hilbert空间中线性算子的广义逆的实质性推广. 本书介绍Banach空间中线性算子的线性斜投影广义逆、Drazin广义逆、度量广义逆及齐性广义逆的基础理论, 重点介绍线性斜投影广义逆在大范围分析、非线性分析、非线性数值逼近中的应用及度量广义逆在不适定(偏)微分方程边值问题中的应用. 书中突出了Banach空间几何方法的运用.

本书可供高等院校数学与应用数学专业的高年级学生、研究生、教师及数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用/王玉文著. —北京: 科学出版社, 2005
(现代数学基础丛书; 94)
ISBN 7-03-014666-2
Ⅰ. 巴… Ⅱ. 王… Ⅲ. 巴拿赫空间-算子-广义逆 Ⅳ. O177.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124389 号

责任编辑: 吕 虹 张 扬 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 1 月 第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005 年 1 月第一次印刷 印张: 14 1/2
印数: 1—2 500 字数: 266 000

定价: 35.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

# 《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20世纪70年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

# 《现代数学基础丛书》出版书目

（按出版时间排序）

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著

66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著

# 目　　录

# 前　言

广义逆理论是应用十分广泛的数学分支．它在数值线性代数、数值分析、最优化、控制论、数理统计、微分方程及应用数学中具有引人注目的应用．用算子理论的术语来说，当一个算子不是双射时，其逆算子不存在，此时就应讨论其广义逆．涉及到这样算子的算子方程，一般不存在通常意义下的解，但这种算子方程却具有某种特定意义下的解，例如：最小二乘解或最小范数解等等．为了不同的应用目的，人们依据不同的条件，引入各种不同的广义逆．

1920 年, E. H. Moore[Mo] 推广了非奇异方阵的逆矩阵的概念, 对任意的矩阵, 引入广义逆矩阵的概念． Moore 将 $m\times n$ 矩阵 $A$ 的广义逆定义为满足条件 $AG=P_A$ 且 $GA=P_G$ 的 $n\times m$ 矩阵 G, 这里 $P_X$ 为矩阵 $X$ 的列向量所张成子空间上的正交投影算子.

1955 年， R. Penrose[Pe1] 证得：存在唯一矩阵 $B$, 满足下面的四个矩阵方程：

$$ABA=A,\quad BAB=B,\quad (AB)^*=AB,\quad (BA)^*=BA. \tag{0.1}$$

这些条件等价于 Moore 的条件. 满足这些条件的唯一矩阵 $B$ 被称之为 $A$ 的 Moore-Penrose 广义逆，且记为 $A^+$. 由于矩阵的 Moore-Penrose 广义逆与求解最小二乘解有关，因而得到广泛的研究.

1958 年， M. P. Drazin[Dr] 引入矩阵 $A$ 的 Drazin 逆 $A^D$, 可以应用于从系统的当前给定状态重新发现其过去状态的“向后投影问题”.

在过去的近 40 年中，许多作者提出并研究了从一个线性空间到另一个线性空间线性变换的各种类型的广义逆. 当线性空间赋予拓扑结构后，这种研究就会变得更加复杂. 参见 20 世纪 70 年代至 80 年代初出版的有关专著 [BG, Na1, CM, Gr, Ca] 及所列的参考文献.

Hilbert 空间中线性算子的广义逆研究，是由 E. H. Moore 的学生，南京大学教授曾远荣 (Y. Y. Tseng) 先生所开始的. 1933 年，曾远荣先生引入了 Hilbert 空间中线性算子的广义逆的概念 [Ts1], 这种广义逆国际上称之为 Tseng 广义逆. 曾远荣先生又发表了这方面的四篇奠基性论文 [Ts2∼Ts4].

如果 $T$ 为 Hilbert 空间之间的有界线性算子 $T$, 则 $T$ 的 Moore-Penrose 广义逆 $T^+$ 定义为下面四个算子方程的唯一解：

(i) $TT^+T=T$,

(ii) $T^+TT^+=T^+$,

(iii) $(TT^+)^*=TT^+$,

(iv) $(T^+T)^*=T^+T$

(见 [Gr] 或 [WWQ]). Hilbert 空间中无界线性算子的 Moore-Penrose 广义逆可类似

定义 (见 [Na1]).

利用 Hilbert 空间中闭稠定线性算子 $T$ 的 Moore-Penrose 广义逆 $T^+$, J. Locker 构造了 $n$ 阶线性微分方程两点边值问题的最小二乘解及 $n$ 阶线性微分算子的广义 Green 函数 (见 [Jo1～Jo4]).

1983 年, S. J. Lee 与 M. Z. Nashed 在 Hilbert 空间中为多值线性算子引入正交广义逆的概念 (见 [LN1～LN3]). 进而在 1989 年, 他们又构造了 Hilbert 空间中线性包含的约束最小二乘解, 并研究了 Hilbert 空间中奇异最优控制问题 (见 [LN4]).

1990 年, 1992 年, 马吉溥、曹伟平、宋国柱研究了 Hilbert 空间中 Moore-Penrose 广义逆 $A_x^+$ 的连续性[MCS,Ma1]. 近 20 年, Hilbert 空间中 Drazin 广义逆的研究获得了长足发展. 见 [Wag1] 及王国荣、魏益民、乔三正于 2004 年出版的专著 [WWQ].

Banach(巴拿赫) 空间中线性算子的广义逆的研究更为复杂.

设 $X,Y$ 为 Banach 空间, $T$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的有界线性算子或闭稠定的线性算子. 假定 $T$ 的零空间 $N(T)$ 在 $X$ 中拓扑可补, 且 $T$ 的值域的闭包 $\overline{R(T)}$ 在 $Y$ 中拓扑可补, 即分别存在 $X, Y$ 中的闭子空间 $M$, $N$ 满足

$$X = N(T) \oplus M, \quad Y = \overline{R(T)} \oplus S.$$

用 $P$ 与 $Q$ 分别记沿 $M$ 到 $N(T)$ 与沿 $S$ 到 $\overline{R(T)}$ 上的线性投影算子, M. Z. Nashed 与 G. F. Votrubo[NV] 将与这些投影算子相关的线性斜投影广义逆 $T^+_{P,Q}$ 定义为线性算子 $(T|_M)^{-1}$, 从 $R(T)$ 到 $R(T)\oplus S$ 上, 保持 $T^+_{P,Q}S=\{\theta\}$ 的线性延拓. 闭稠定线性算子 $T^+_{P,Q}$ 满足下面算子方程

$$\begin{aligned}
&TT^+_{P,Q}T = T, && \text{在 } D(T)\text{上};\\
&T^+_{P,Q}TT^+_{P,Q} = T^+_{P,Q}, && \text{在 } D(T^+_{P,Q})\text{上};\\
&T^+_{P,Q}T = I_{D(T)} - P, && \text{在 } D(T)\text{上};\\
&TT^+_{P,Q} = Q, && \text{在 } D(T^+_{P,Q})\text{上},
\end{aligned}$$

这里 $D(T^+_{P,Q}) = R(T)\oplus S$, $I_{D(T)}$ 为 $D(T)$ 上的单位算子. 简称 $T^+_{P,Q}$ 为 $T$ 的线性投影广义逆.

近十几年中, Banach 空间中线性算子的线性投影广义逆、 Drazin 广义逆及其应用, 得到许多学者的关注. 这方面的研究工作参见 [Na2～Na4, NC, ML, Ra, Ma2～Ma5, Ku, Wag2, CX, Wei1, Cai] 等.

如所周知, Banach 空间中并非每一个闭子空间均拓扑可补 (见 [LT]), 所以 Banach 空间中线性算子可能不存在上述意义下的线性投影广义逆. 另一方面, 在非 Hilbert 空间的 Banach 空间中, 用线性算子的线性斜投影广义逆无法研究 Banach 空间之间线性算子方程的极值解、最小范数解与最佳逼近解. 因此, 需要讨论其它类型的广义逆.

设 $X, Y$ 为 Banach 空间, $T$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的线性算子. 设

$$D(T^{\partial})=\{y\in Y \mid Tx=y \text{ 在 } X \text{ 中具有最佳逼近解}\}.$$

定义集值映射 $T^{\partial}:\ D(T^{\partial})\rightrightarrows D(T)$ 为

$$T^{\partial}(y)=\{\ x\in X \mid x\text{为 } Tx=y \text{ 的最佳逼近解}\},\quad y\in D(T^{\partial}).$$

$T^{\partial}$ 称为 $T$ 的 (集值) 度量广义逆 (见 [Na1]), 单值算子 (一般为非线性) $T^{\sigma}:D(T^{\partial})\to D(T)$, 如果满足 $T^{\sigma}(y)\in T^{\partial}(y), y\in D(T^{\partial})$, 则称 $T^{\sigma}$ 为 (集值) 度量广义逆 $T^{\partial}$ 的单值选择. 如何得到 (集值) 度量广义逆的具有良好性质的单值选择是一个引人注目的研究课题. 对此， M. Z. Nashed 与 G. F. Votruba 曾在文献 [NV] 中提出研究建议. 2000 年，王玉文和潘少荣 [WP2] 对此进行了研究.

单值度量广义逆已经被许多作者所研究. R. B. Holmes[No1] 研究了 $T^{\partial}(y)$ 永远为单点集时的情形，给出 $T^{\partial}$ 为稠定的条件. 1995 年，王玉文与李志伟 [WL1] 对闭稠定线性算子 $T$, 定义了 (单值) Moore-Penrose 度量广义逆 $T^{M}$, 并证得 $T^{M}$ 的连续性. 2003 年，王辉和王玉文 [WhW] 系统地研究了 Moore-Penrose 度量广义逆 $T^{M}$. 王玉文、季大琴和于金凤 [WJ,WY2] 研究了 Banach 空间中线性算子的 Tseng-度量广义逆，不适定二阶椭圆方程 Nuemann 问题.

本书尽可能地收入近 20 年，特别近十几年散见于国内外学术文献的有关 Banach 空间算子广义逆的最新研究成果.

第一章，讨论 Banach 空间中线性投影、度量投影及刚刚引入的拟线性投影，为研究 Banach 空间中线性算子的各种类型广义逆奠定基础.

第二章，介绍 Banach 空间内算子 $T$ 的线性斜投影广义逆 $T^{+}_{P,Q}$, 及其扰动、连续性条件，重点讨论线性斜投影广义逆在逼近论、非线性分析及 Banach 流形中的重要应用.

第三章，讨论 Banach 空间中线性算子的 Drazin 逆，给出 Drazin 逆的几种表示定理、扰动定理及连续性定理.

第四章，首先介绍 Banach 空间中线性算子的 (集值) 度量广义逆的概念，给出其等价定义及有界齐性单值选择. 其次，引入单值的 Tseng 度量广义逆及 Moore-Penrose 度量广义逆的定义，给出其存在性的充要条件及连续性的充分条件. 最后给出度量右逆、度量左逆的形式表达及其应用.

第五章, 首先对于 Banach 空间中线性算子的齐性广义逆 (包含线性投影广义逆与单值度量广义逆) 给出统一定义, 给出统一的存在性充要条件. 其次, 讨论 Banach 空间中多值线性算子的度量广义逆. 利用度量算子部分给出度量广义逆的刻画. 介绍 Hilbert 空间中约束最小二乘解问题及其在奇异最优控制的应用.

第六章，首先讨论 Hilbert 空间中 Moore-Penrose 广义逆在不适定两点边值问题中的应用，构造了两点微分算子的广义 Green 函数. 其次讨论了 Banach 空间中 Moore-Penrose 度量广义逆在半线性二阶椭圆方程的不适定边值问题中的应用，便于讨论奇异最优控制问题.

本书为国家自然科学基金 (10471032) 资助项目成果、其出版得到哈尔滨师范大学优秀专著出版基金资助.

南京大学马吉溥教授引导作者进入 Banach 空间中算子广义逆研究. 谨以此书献给马吉溥教授，纪念先生的 70 寿诞.

博士生刘萍同志及孙秀梅副教授为打印本书的 Latex 书稿付出辛勤的劳动，并认真阅读本书初稿. 科学出版社吕虹编审及相关工作人员为本书的编辑及出版做了大量细致工作，在此一并致谢.

# 第一章　Banach 空间中投影算子

Banach 空间中线性算子的不同类型的广义逆，对应不同类型的投影算子．本章将对本书所需要的三种类型投影算子进行介绍.

## §1.1　有界线性投影算子

### 1．代数可补子空间与线性投影算子

设 $X$ 为实 (或复) 的线性空间， $X_1$ 、$X_2$ 为 $X$ 的线性子空间，

$$X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid \ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

称为线性子空间 $X_1$ 与 $X_2$ 的代数和．如果

$$X = X_1 + X_2 \ \text{且}\ X_1 \cap X_2 = \{\theta\},$$

则称为子空间 $X_1$ 与 $X_2$ 代数直和，记为

$$X = X_1 \dot{+} X_2.$$

此时，对每一个 $x \in X$, 有唯一分解

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2.$$

**定义 1.1.1**　设 $M \subset X$ 为线性子空间, 如果存在线性子空间 $N$, 使 $X = M \dot{+} N$, 则称 $M$ 在 $X$ 中为代数可补子空间， $N$ 称为 $M$ 的代数补子空间.

**定义 1.1.2**　设 $X$ 为线性空间．映射 $P: X \to X$ 称为幂等的，是指 $P^2 = P$; 线性幂等映射称为线性投影算子，简称线性投影.

**定理 1.1.1**　线性空间 $X$ 中每一个线性子空间均为代数可补子空间.

**证明**　设 $M$ 为 $X$ 的线性子空间，则 $M$ 存在 Hamel 基 $E = \{e_i\}_{i \in I} \subset M$, 且 $E$ 可扩充为 $X$ 上的 Hamel 基 $\overline{E}$, 则由 $\overline{E} \backslash E$ 张成的子空间： $N = \mathrm{span}\{\overline{E} \backslash E\}$, 显然为 $M$ 的代数补子空间，即 $X = M \dot{+} N$. □

**定理 1.1.2**　设 $X$ 为线性空间， $P$ 为 $X$ 中的线性投影．令 $N(P) = \{x \in X \mid Px = \theta\}$, $R(P) = \{x \in X \mid Px = x\}$, 则

(i)　$R(P) = N(I - P)$;

(ii)　$N(P) = R(I - P)$;

(iii)　$X = R(P) \dot{+} N(P)$;

(iv)　若 $M$ 、$N$ 为 $X$ 的线性子空间，且 $X = M \dot{+} N$, 则存在唯一的线性投影算子 $P: X \to X$, 满足

$$M = R(P) \ \text{且}\ N = N(P).$$

**证明**　(i) 因为 $(I-P)P=\theta$, 所以 $R(P)\subset N(I-P)$; 又若对任意 $x\in N(I-P)$, 有 $x=Px\in R(P)$, 因此
$$R(P)=N(I-P).$$

(ii) 因为 $I-P$ 亦为线性投影算子，应用 (i) 立得.

(iii) 对任意 $x\in X$, 有 $x=Px+(I-P)x$, 且 $Px\in R(P)$, $(I-P)x\in R(I-P)=N(P)$, 故 $X=R(P)+N(P)$. 又对任意 $x\in R(P)\cap N(P)$, 则 $x=Px=\theta$, 从而
$$X=R(P)\dot{+}N(P).$$

(iv) 设 $X=M\dot{+}N, M$ 、$N$ 为 $X$ 的线性子空间，则对任意 $x\in X$, 有唯一分解 $x=x_1+x_2$, $x_1\in M, x_2\in N$. 定义 $Px=x_1$, 则易知 $P$ 为 $X$ 中线性投影算子，且 $R(P)=M, N=N(P)$. 若 $X$ 中另一线性投影算子 $P_1$ 满足
$$M=R(P_1)\ \text{ 且 }\ N=N(P_1),$$
则 $X=R(P_1)\dot{+}N(P_1)$. 于是对任意 $x\in X$, 有唯一分解 $x=P_1x+(I-P_1)x$. 由 $P$ 的定义 $Px=P_1x$, 即 $P_1=P_2$. □

**2. 拓扑可补子空间与有界线性投影算子**

**定义 1.1.3**　设 $M$ 为赋范线性空间 $X$ 中的闭子空间，如果存在 $X$ 的闭线性子空间 $N$, 使得 $X=M\dot{+}N$, 则称 $M$ 在 $X$ 中是拓扑可补的， $N$ 称为 $M$ 的拓扑补子空间．此时，记为 $X=M\oplus N$.

**定理 1.1.3**　设 $X$ 为 Banach 空间， $X$ 的闭子空间 $M$ 在 $X$ 中拓扑可补当且仅当 $M$ 是某一连续线性投影算子 $P$ 的值域.

**证明**　必要性. 设 $X=M\oplus N$, 这里 $N$ 为 $X$ 的闭子空间. 由定理 1.1.2 中 (iv), 存在唯一的线性投影算子 $P$, 使得 $R(P)=M$ 且 $N(P)=N$.

下面只需证 $P$ 为连续的.

设 $x_n\in X$, $x\in X, x_n\to x, Px_n\to y(n\to\infty)$. 由于 $M$ 为闭的， $Px_n\in M$ , 所以 $y\in M$, 因此 $Py=y$. 因为 $x_n-Px_n\in N$ 且 $N$ 是闭的，令 $n\to\infty$, 有 $x-y\in N$, 所以 $P(x-y)=\theta$. 因此
$$y=Py=Px.$$
故 $P$ 为闭线性算子. 因为 $X$ 为 Banach 空间，再由闭图像定理，知 $P$ 为连续的.

充分性. 当存在 $X$ 中连续线性投影算子 $P$ 满足 $R(P)=M$ 时，应用定理 1.1.2 中 (iii) 可知
$$X=R(P)\dot{+}N(P).$$

因为 $P$ 与 $I-P$ 为连续的，故 $N(P)$ 及 $R(P)=N(I-P)$ 均为 $X$ 的闭线性子空间，且 $X=R(P)\oplus N(P)$. □

**定理 1.1.4**　设 $M$ 是 Banach 空间 $X$ 的线性子空间.

(i) 若 $\dim M<\infty$, 则 $M$ 在 $X$ 中拓扑可补;

(ii) 若 $\dim(X/M)<\infty$, 则 $M$ 在 $X$ 中拓扑可补，这里 $\dim(X/M)$ 叫做 $M$ 在 $X$ 中的余维数.

**证明** (i) 设 $\dim M=n$. 由于任何 $n$ 维 Banach 空间均拓扑同构，特别， $M$ 与 $l_\infty^n$ 拓扑同构，故存在 $M$ 中 $n$ 个线性无关向量 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 及常数 $C>0$, 使

$$C^{-1}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|\leqslant\|\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\|\leqslant C\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\alpha_j|.$$

令 $\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i,x_j^*\right\rangle=\alpha_j\ \ (j=1,2,\cdots,n)$, 则 $\{x_j^*\}_{j=1}^n\subset M^*$ 且 $\|x_j^*\|\leqslant C,(j=1,2,\cdots,n)$. 由 Hahn-Banach 定理，将 $\{x_j^*\}_{j=1}^n$ 保范延拓为 $\{x_j^*\}_{j=1}^n\subset X^*$, 令

$$Px=\sum_{i=1}^n\langle x,x_i^*\rangle x_i,\ \forall x\in X,$$

则 $\|P\|\leqslant nC^2$, 且 $P$ 是 $X$ 到 $M$ 上的有界线性投影算子，故 $M$ 在 $X$ 中拓扑可补.

(ii) 应用定理 1.1.1, 选择 $X$ 的线性子空间 $N$, 使得

$$X=M\dot{+}N.$$

令 $Q:X\to X/M$ 为商映射，则

$$Q:N\to X/M$$

为一对一的满射．由于 $\dim(X/M)<\infty$, 故 $\dim N=\dim(X/M)<\infty$, 且 $X/M$ 为 Banach 空间，因此 $N$ 为 $X$ 的闭线性子空间，即 $M$ 在 $X$ 中拓扑可补. □

### 3.* 在一致凸 Banach 空间中存在拓扑不可补的闭子空间

对于Banach空间来说,并不是每个闭子空间均为拓扑可补的.下面构造Banach序列空间 $l_p(1<p<\infty,p\neq 2)$ 的拓扑不可补的闭子空间．为此，我们引进有关的概念.

**定义 1.1.4** 设 $X$ 为 Banach 空间， $S$ 为 $X$ 到 $X$ 上的有界线性算子．如果 $S^2=I$, 则称 $S$ 是 $X$ 上的对合算子．集合 $M=\{x\in X\mid Sx=x\}$ 为 $S$ 的不变子空间.

**定理 1.1.5** 设 $X$ 为赋范线性空间， $M$ 是 $X$ 的闭线性子空间.

(i) 设 $P$ 是 $X$ 到 $M$ 上的连续线性投影算子，则 $S=2P-I$ 是以 $M$ 为不变子空间的对合算子. 反之, 如果 $S$ 是以为 $M$ 为不变子空间对合算子, 则 $P=\dfrac{1}{2}(S+I)$ 是 $X$ 到 $M$ 上的连续线性投影算子.

(ii) 如果 $P=\dfrac{1}{2}(S+I)$ 是 $X$ 到 $M$ 上的连续线性投影算子，则所有由 $X$ 到 $M$ 上的连续线性投影算子具有下列形式

$$\widetilde{P}=\frac{1}{2}(S+I+T),$$

其中 $S$ 为以 $M$ 为不变子空间的对合算子， $T$ 为从 $X$ 到 $X$ 中的有界线性算子，且满足

$$ST = -TS = T. \tag{1.1.1}$$

**证明**　(i) 是显然的.

(ii) 设 $\widetilde{P}$ 为 $X$ 到 $M$ 上的任一连续线性投影算子，则有 $P\widetilde{P} = \widetilde{P}$ 及 $\widetilde{P}P = P$. 如果令 $T = 2\widetilde{P} - (I+S)$, 则 $T$ 为从 $X$ 到 $X$ 中的有界线性算子. 从 $P = \dfrac{1}{2}(S+I)$ 及 $P\widetilde{P} = \widetilde{P}$ 推出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(I+S)(I+S+T)\\
&= P\widetilde{P}\\
&= \widetilde{P}\\
&= \frac{1}{2}(I+S+T).
\end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{1}{4}(I+S)(I+S+T) = \frac{1}{2}(S+I) + \frac{1}{4}(T+ST),$$

从而

$$ST = T.$$

同理，从条件 $\widetilde{P}P = P$ 可推出 $-TS = T$. 反之，如果

$$\widetilde{P} = \frac{1}{2}(I+S+T),$$

其中 $T$ 满足式 (1.1.1).$\widetilde{P}$ 为 $X$ 中连续线性算子，且由 $P^2 = P$, 得

$$\begin{aligned}
P\widetilde{P} &= \frac{1}{4}(S+I)(S+I+T)\\
&= \left[\frac{1}{2}(S+I)\right]^2 + \frac{1}{4}(ST+T)\\
&= \frac{1}{2}(S+I) + \frac{1}{2}T\\
&= \widetilde{P}.
\end{aligned}$$

同理 $\widetilde{P}P = P$, 从而

$$\widetilde{P}^2 = \widetilde{P}P\widetilde{P} = P\widetilde{P} = \widetilde{P}.$$

即 $\widetilde{P}$ 为幂等算子. 从而 $\widetilde{P}$ 为 $X$ 中连续线性投影算子. □

下面定义两个常数.

**定义 1.1.5**　设 $M$ 为 Banach 空间 $X$ 中的闭子空间. 定义

$$P(M) = \inf\{\|P\| \mid P\text{是}X\text{到}M\text{上的连续线性投影}\},$$