奥　　数

九年级（初三）

主　编　魏有德

副主编　王美明　张建鹏

　　　　唐德全　赵颖钧

参加编写老师

张德跃　卢建国　陈玉龙　曾勋图

黄　文　黄　兵　杨　娟　李　玫

李壁强　孙远林　郑树全　罗文秀

张术明　陈其文　王开权　梁　林

吴　伟　安树纵　肖成勋

四川大学出版社

责任编辑:周树琴
责任校对:李旭华
插图设计:牟　平
封面设计:米茄设计工作室
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

奥数．九年级／魏有德主编．—成都：四川大学出版社，2006.6
ISBN 7-5614-3337-9

Ⅰ.奥…　Ⅱ.魏…　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第034899号

书名　奥数·九年级

主　编	魏有德
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段24号(610065)
发　行	四川大学出版社
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	148 mm×210 mm
印　张	11
字　数	259千字
版　次	2006年7月第1版
印　次	2006年7月第1次印刷
印　数	0 001~3 000册
定　价	16.00元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

《奥数》（七、八、九年级）是根据教育部近期颁布的《数学课程标准》（简称“课标”）精神，各地依此编写的“新教材”的使用情况和中国数学会普委会制定的《初中数学竞赛大纲》（简称“竞赛大纲”）要求而编写的一套初中阶段数学课外自学丛书、数学竞赛辅导教材。

这套书具有这样几个显著特征：

1. 具有鲜明的时效性和时代性

这套书的所有例题、习题几乎都是近几年全国各地的“中考题”和“竞赛题”，与时代同步、与时俱进。

在内容的安排上新增加了许多新知识，诸如“概率”、“统计”、“立体图形的投影和识别”、“三视图”等知识，书中都有准确而详细的介绍。

在题型上增加了许多“开放性”、“归纳性”、“探索性”、“讨论性”的新题型。

这套书还新增加了许多与市场经济和生活、工作有关的富有时代感的实用问题，它既能增加学生的社会知识，又能培养学生解决现代市场经济和科技活动中实际

问题的能力。

2. 具有紧密的“课内外”结合性

这套书坚持“巩固课内知识，深化课内知识，适当地延伸课内知识”原则，在选材和编写结构两方面都着重强调与当前初中课内数学教学的密切结合。

各册的第一、二部分内容是课内代数、几何知识的“巩固”、“深化”的结合部分，所用的例题、习题绝大部分是“中考题”，少量的“竞赛题”也是基础性的（相当于“中考题”难度），有利于数学课外活动的开展和学生自学。各册的第三部分才是“适当的延伸课内知识”部分，但其中也有不少的例题、习题是各地的“中考题”，这也从另一侧面说明这套书是课内外紧密结合的，学好它就能在“中考”、“竞赛”两方面都取得优异成绩。

3. 具有大众化普及型的实用性

由于这套书从选材到编写都十分注意与课内教学的紧密结合，并强调基础，不但各册的第一、二部分内容如此，即使第三部分（“竞赛大纲”要求的竞赛知识专讲）内容也侧重讲解竞赛知识的基础内容，不去刻意地“拔高”。同时，还特别注意前后知识的系统性、联系性和由浅入深的层次性，因而，这套书既方便学生自学，又便于老师进行竞赛辅导。

对读者几点建议和说明：

①我们每讲选编了七八个例题，若作辅导教材，老师只可选讲其中的四五个，其余的要留给学生“自己阅读”（这是我们为培养学生的自我阅读能力而有意安排的）；每讲的习题也只能要求学生侧重在【巩固练习】中选做几个，其余的让学有余力的优等生去选用，或竞赛前训练用。

②由于各地使用的课内教材不同，内容的先后安排也各异，所以，这套书每一册都是按“代数”、“几何”和“（补充）竞赛知识专讲”这三大部分来安排讲授的，使用时可根据课内教学进程来确定自己学习的先后次序。在第一部分“代数”、第二部分“几何”中，我们又是按照代数、几何各自的知识系统和先后次序来安排讲授的，从这个意义上讲，这套书是“与教材同步”的，是知识“不超前”的。

③由于各种课内新教材在平面几何内容的处理上存在差异，“淡化”和严格证明要求的“滞后”，使得在编写这部分内容时十分为难。为此，我们采用了“附注”的办法，即把这一讲所要使用的重要定理的证明附在讲末供读者参考。知道者可以不看，不知道者可以借鉴阅读。若作为辅导教材，则变为老师的讲解参考资料。这个处理办法使得我们既保持了平面几何内容的系统性、

完整性、严密性，又不致于“走过场”，也避免了过分要求理论证明的艰难处境。

这套书的几位副主编和绝大多数作者都是来自四川省、重庆市教学和竞赛辅导第一线的中学老师，他们所具有的丰富教学经验和知识使得这套书的内容既切合实际，又适应当前开展各类数学课外活动需要。对他们的参与和支持，在此表示衷心的谢意！

感谢四川大学出版社领导和编辑对我们的支持和帮助！

魏有德

2006年5月

于四川大学数学学院（610064）

目　　录

第一部分

第二部分

第三部分

第一部分

第一讲　一元二次方程解法综述

一、知识要点

形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程叫做一元二次方程，其中，$a\neq0$，a、b、c 为常数，x 为未知数.

1. 基本解法概述

一元二次方程有如下三种基本解法，根据具体方程情形可选用适合它的较简捷的一种解法.（参看例 1，例 2）

（1）直接开平方法（又称配方法）. 如果一个一元二次方程为（或经过简单的恒等变形可化为）$(x+m)^2=n$ 形式，则当 $n\geqslant0$ 时，两边开平方可得它的二根为

$$x_{1,2}=-m\pm\sqrt{n}.$$

（当 $n<0$ 时，方程在实数范围内无解.）

（2）公式法. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 经过配方可化为

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

形式，则当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，就可得二实根的计算公式：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

（当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.）

(3)因式分解法. 当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中的二次三项式 ax^2+bx+c 易于分解成两个一次因式的乘积时，可令每一个一次因式等于 0 而求得方程的二根.

2. 可转化为一元二次方程求解

某些方程的求解问题可转化成一元二次方程的求解.（参看例 3，例 4）

3. 一元二次方程的应用问题

在生活、工作和科学实践中，许多实际问题都可化为（即它的数学模型为）一元二次方程的求解问题.（参看例 7，例 8）

二、典型例解

1. 三种基本解法的应用和选择

【例 1】 解下列方程：

(1) $x^2=\sqrt{2}x$. （2005 · 广东中考题）

(2) $x^2-4x+1=0$. （2005 · 北京中考题）

(3) $3x^2-6x+1=0$. （2005 · 山西中考题）

【分析】 任何一个一元二次方程都可以用“公式法”求出其解或判定其在实数范围内无解，但在未指定方法的情况下，可选择比较简捷的方法. 显然，此例(1)用“因式分解法”较简捷；(2)用“配方法”（即开平方法）较简捷；(3)用“公式法”较简捷.

☞【解】 (1)（因式分解法）原方程化为

$x^2-\sqrt{2}x=0$，即 $x(x-\sqrt{2})=0$，

则方程的二解为 $x=0$ 或$\sqrt{2}$.

(2)(开平方法)原方程可化为

$$x^2-4x=-1,\quad x^2-4x+(\frac{-4}{2})^2=-1+(\frac{-4}{2})^2,$$

$$(x-2)^2=3,$$

则 $x-2=\pm\sqrt{3}$.

故二解为 $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$.

(3)(公式法)因 $a=3,b=-6,c=1$,则

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【例 2】 设方程 $2002^2x^2-2003\cdot2001x+1=0$ 的较大根是 r,方程 $2001x^2-2002x+1=0$ 的较小根是 s,求 $r-s$ 的值.

(2003・山东竞赛题)

☞【解】 由 $2002^2x^2-2003\cdot2001x+1=0$ 有

$$(2002^2x-1)(x-1)=0,$$

则 $x_1=\frac{1}{2002^2},\quad x_2=1$,因而 $r=1$.

由 $2001x^2-2002x+1=0$ 有 $(x-1)(2001x-1)=0$,

则 $x_1=1,\quad x_2=\frac{1}{2001}$,因而 $s=\frac{1}{2001}$.

故 $r-s=1-\frac{1}{2001}=\frac{2000}{2001}$.

【评注】 若不用“因式分解法”来解方程是很繁难的.

2.可转化为一元二次方程求解

【例 3】 解关于 x 的方程 $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0(a\geqslant\frac{3}{4})$.

【分析】 这是 x 的四次方程,直接求解很难.注意到方程左边是参数 a 的二次式,则可先把原方程作为 a 的二次方程求解,然后再求 x.

☞【解】 以 a 为新"未知数"将原方程整理为

$$a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0.$$

由"公式法"可解得

$$a=x^2+x+1 \quad 或 \quad a=x^2-x.$$

由 $a=x^2+x+1$ 即 $x^2+x+1-a=0$ 解得

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2};$$

由 $a=x^2-x$，即 $x^2-x-a=0$，解得

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}.$$

故当 $a\geqslant\frac{3}{4}$ 时，原方程有上述四个解 x_1,x_2,x_3,x_4.

【例 4】 设 a、b 都是正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a-b}=0$，那么 $\frac{b}{a}$ 的值为(　　).

(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(C) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

(2002·四川竞赛题)

☞【解】 由已知等式知，$\frac{a+b}{ab}-\frac{1}{a-b}=0$，

去分母得 $(a+b)(a-b)-ab=0$，

化简 $a^2-b^2-ab=0$.

因 $a>0$，同除以 a^2，有

$$1-\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b}{a}=0，即 \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0,$$

为 $\frac{b}{a}$ 的二次方程，由"公式法"解得 $\frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

又因 a、$b>0$，则 $\frac{b}{a}>0$，

故 $\frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$（舍去负值），应选(C).

3. 解含参数的方程

【例 5】 解关于 x 的方程 $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$.

【分析】 由于 x^2 项的系数含有参数 a、b，所以，要分类讨论求解.

☞【解】 (1)当 $ab\neq0$ 时，原方程是关于 x 的二次方程，由“因式分解法”(左边可分解为 $(ax-b^3)(bx-a^3)$)或“公式法”可解得二根为

$$x_1=\frac{b^3}{a},\qquad x_2=\frac{a^3}{b}.$$

(2)当 a、b 中只有一个为 0 时，原方程变为关于 x 的一次方程. 此时，无论是 $a\neq0$，$b=0$ 或 $a=0$，$b\neq0$，原方程都只有一个解 $x=0$.

(3)当 $a=b=0$ 时，原方程对一切实数都成立(因对一切实数 x，方程两边恒为 0)，所以，此时原方程的解为一切实数.

4. 求代数式的值

【例 6】 已知 a 是方程 $x^2-x-2000=0$ 的一个正根，则代数式 $3+\cfrac{2000}{1+\cfrac{2000}{1+\cfrac{2000}{a}}}$ 的值为________. (2003・河北竞赛题)

【分析】 求很繁的代数式的值问题，显然应采用“先化简，后代入”(注：在化简过程中可能要用到已知条件)，而不能先求出 a，直接代入原式求值.

☞【解】 因 a 是方程 $x^2-x-2000=0$ 的根，则

$$a^2-a-2000=0,\quad \text{即}\quad a^2=a+2000.$$

显然，$a\neq0$. 因而，$a=1+\dfrac{2000}{a}$.

于是　　原式$=3+\dfrac{2000}{1+\dfrac{2000}{a}}=3+\dfrac{2000}{a}$

$$=2+1+\frac{2000}{a}=2+a.$$

又由　$a^2-a-2000=0$（用“公式法”）可解得正根

$$a=\frac{1+3\sqrt{889}}{2}.$$

故要求的原式的值为 $2+\dfrac{1+3\sqrt{889}}{2}=\dfrac{5+3\sqrt{889}}{2}$.

5. 一元二次方程的实际应用举例

一元二次方程的实际应用是多方面的，这里仅举两个例子.

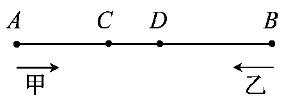
【例 7】 某水果批发商场经销一种高档水果，如果每千克盈利 10 元，每天可售出 500 千克. 经市场调查发现，在进货价不变的情况下，若每千克涨价 1 元，日销量将减少 20 千克. 现该商场要保证每天盈利 6000 元，同时又要使顾客得到实惠. 那么每千克应涨价多少元？ （2004 · 海口中考题）

【解】 设每千克涨价 x 元，则盈利为$(10+x)$元，售出减少 $20x$ 千克，实际售出$(500-20x)$千克. 根据盈利 6000 元可列方程

$$(10+x)(500-20x)=6000,$$

即　　$x^2-15x+50=0$，解得 $x_1=5$，$x_2=10$.

为使顾客得到实惠，应取 $x=5$. 故每千克应涨价 5 元.



【例 8】 如右图，甲乙两车分别自 A、B 两城同时相向行驶，在 C 地相遇，继续行驶分别达到 B、A 两城后，立即返回，在 D 处再次相遇. 已知

$AC=30$ 千米，$AD=40$ 千米，则 $AB=$________ 千米，甲的速度∶乙的速度＝________．　　（2004·"希望杯"竞赛题）

【解】 设甲的速度为 $v_{甲}$，乙的速度为 $v_{乙}$，$DB=x$ 千米．则由甲、乙两车第一次相遇所用时间相同得

$$\frac{AC}{v_{甲}}=\frac{CD+DB}{v_{乙}},\quad 即\quad \frac{30}{v_{甲}}=\frac{10+x}{v_{乙}}. \qquad ①$$

由甲、乙两车第二次相遇所用时间相同得

$$\frac{CD+2\cdot DB}{v_{甲}}=\frac{AC+AD}{v_{乙}},\quad 即\quad \frac{10+2x}{v_{甲}}=\frac{70}{v_{乙}}. \qquad ②$$

②÷①得 $\dfrac{10+2x}{30}=\dfrac{70}{10+x}$.

化简整理为 $x^2+15x-1000=0$，$(x-25)(x+40)=0$，

解得 $x=25$（舍去 -40）．

故 $AB=AD+DB=40+25=65$（千米）．

因而由①得 $v_{甲}:v_{乙}=30:(10+25)$

$=30:35=6:7$.

习 题 1

【巩固练习】

1. 任选一种较简捷的方法解下列方程：

(1) $3(x-2)^2-x(x-2)=0$；　(2) $x^2-2x-5=0$；

(3) $4(x+3)^2=25(x-2)^2$.

2. 解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2-3x+2=mx^2-mx$；

(2)$1+2x+x^2=n^2(1+\frac{2x}{n^2}+\frac{x^2}{n^4})(n\neq0)$.

3. 已知 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $3x^2-19x+m=0$ 的两根，且 $x_1=\frac{m}{3}$，则 m 的值为________.　　(2004·重庆中考题)

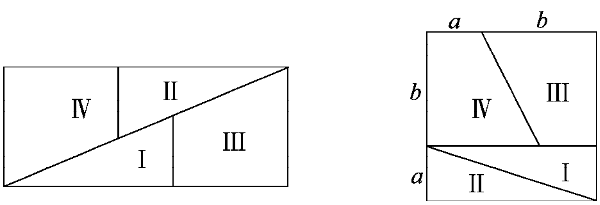
4. 若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，则 $x+y$ 的值为________.　　(2001·全国初中竞赛题)

5. 如下图，若将右边正方形剪成四块，恰好能拼成左边的矩形. 设 $a=1$，则这个正方形的面积为(　　).

(A)$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$　　(B)$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(C)$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　(D)$(1+\sqrt{2})^2$

(2003·山东竞赛题)



【提高练习】

6. 解关于 x 的方程 $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0(a\geqslant-6)$.

7. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的大小关系是(　　).

(A)$\Delta>M$　　(B)$\Delta=M$

(C)$\Delta<M$　　(D)不能确定

(2004·山东竞赛题)

8. **已知** $a<0,b\leqslant 0,c>0$**，且** $\sqrt{b^2-4ac}=b-2ac$**，求** b^2-4ac **的最小值.**　　（2004 · 全国初中竞赛题）

9. **已知实系数一元二次方程** $ax^2+2bx+c=0$ **有两个实根** x_1、x_2**. 若** $a>b>c$**，且** $a+b+c=0$**，则** $d=|x_1-x_2|$ **的取值范围是** ________.　　（2004 · 上海竞赛题）

【创新应用】

10. **试求出所有的正整数** n**，使** $1+2+3+\cdots+n$ **的和是由同一个数字组成的三位数.**　　（2001 · 澳门竞赛题）

11. **已知** m、n **是有理数，并且方程** $x^2+mx+n=0$ **有一个根是** $\sqrt{5}-2$**，那么，**$m+n=$ ________.　　（2001 · 天津竞赛题）