总主编　单　墫　熊　斌

奥数教程

· 初三年级 ·

葛　军　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程. 初三年级 / 葛军编著. —上海:华东师范大学出版社,2000.11
ISBN 7-5617-2381-4

Ⅰ.奥... Ⅱ.葛... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48986 号

奥 数 教 程

·初三年级·

总 主 编 单 墫 熊 斌
策划组稿 倪 明 宋维锋
编 著 葛 军
责任编辑 宋维锋
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
发行部 电话 021-62571961
传真 021-62860410
社 址 上海市中山北路 3663 号
邮编 200062

印 刷 者 江苏扬中市印刷厂
开 本 890×1240 32 开
印 张 11.5
字 数 320 千字
版 次 2000 年 11 月第一版
印 次 2000 年 11 月第一次
书 号 ISBN 7-5617-2381-4/G·1117
定 价 13.00 元

出 版 人 朱杰人

目　录

第一讲　一元二次方程

一、知识要点和基本方法

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0,(a\neq 0)$$

它的简单形式就是 $Ax^2=B$.

我们解一元二次方程，就是把所给的方程转化为形如 $Ax^2=B$ 的方程来解. 这里的转化方式就是配方. 具体做法是：

因为　$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right]+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}, \end{aligned}$$

所以　$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 就转化为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{①}$$

从而利用平方根的意义得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

配方法是解一元二次方程的基本方法，而公式法是由配方法演绎得到的. 由①式就可以得到解一元二次方程的求根公式：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\ (b^2-4ac\geqslant 0) \tag{②}$$

用求根公式解一元二次方程的方法称为公式法.

有时,用因式分解法解一元二次方程.

如果一元二次方程的两根为 x_1、x_2,那么我们就有基本等式

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),(a\neq 0) \tag{③}$$

这是一个非常有用的基本等式.

如果我们对式②的形式 $x_{1、2}=A\pm\sqrt{B}$ $(B\geqslant 0)$"追根究源",就可以知道 $A\pm\sqrt{B}$ 一定是一个一元二次方程的根,从而必有形如 $ax^2+bx+c=0$ 的等式成立(这里 $x=A\pm\sqrt{B}$). 利用这一结果常可以简化一些复杂的数值计算.

二、例题精讲

例1 已知 b、c 为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,且 $c\neq 0$,$b\neq c$. 求 b、c.

解 因为 b、c 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,所以

$$\begin{cases}b^2-4c\geqslant 0, & ④\\ b^2+b^2+c=0, & ⑤\\ c^2+bc+c=0. & ⑥\end{cases}$$

由⑥式及 $c\neq 0$ 得 $c=-b-1$,把它代入⑤式得

$$2b^2-b-1=0$$

即 $b=-\dfrac{1}{2}$,或 $b=1$.

当 $b=-\dfrac{1}{2}$ 时,$c=-b-1=-\dfrac{1}{2}$,则 $b=c$. 这与题意不符. 于是 $b=1$,$c=-b-1=-2$.

说明 如果 x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,那么就有 $ax_0^2+bx_0+c=0$. 反之亦然.

例2 已知 m、n 是有理数,方程 $x^2+mx+n=0$ 有一个根是 $\sqrt{5}-2$. 求 $m+n$ 的值.

解 由题意得

$$(\sqrt{5}-2)^2+m(\sqrt{5}-2)+n=0,$$

即

$$(9-2m+n)+(m-4)\sqrt{5}=0.$$

因为 m、n 是有理数，所以必有

$$\begin{cases} 9-2m+n=0, \\ m-4=0, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} m=4, \\ n=-1. \end{cases}$$

于是 $$m+n=3.$$

例 3 已知 a 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根，求 $\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}$ 的值.

解 由题意得

$$a^2+a-\frac{1}{4}=0,$$

即

$$a^2=\frac{1}{4}-a,\ a^2+a=\frac{1}{4}.$$

于是

$$\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}=\frac{a\left(\frac{1}{4}-a\right)-1}{a^3(a^2+a)-a(a^2+a)}$$

$$=\frac{\frac{a}{4}-a^2-1}{\frac{1}{4}a(a^2-1)}$$

$$=\frac{\frac{a}{4}-\left(\frac{1}{4}-a\right)-1}{\frac{1}{4}a\left(\frac{1}{4}-a-1\right)}$$

$$=\frac{5a-5}{\frac{a}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$=20.$$

例 4　设 x_1、x_2 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

解　由题意得 $x_1\neq x_2$，且

$$x_1^2=3-x_1,\ x_2^2=3-x_2.$$

于是

$$\begin{aligned}x_1^3-4x_2^2+19&=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19\\&=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7\\&=4(x_1+x_2)+4.\end{aligned}$$

而　$$x_2^2-x_1^2=(3-x_2)-(3-x_1)=x_1-x_2,$$

即

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1)=x_1-x_2.$$

又 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1+x_2=-1$.

故　$$x_1^3-4x_2^2+19=0.$$

说明　计算 x_1+x_2 可直接用第 3 讲中根与系数关系(即韦达定理)得到. 利用方程的根所满足的等式，去处理一些代数式的计算，可以起到“降次”作用而简化计算.

例 5　已知 $x=-\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\sqrt{x^3+4x^2+x+9}$ 的值.

解　由题意得　$$x=\sqrt{3}-2,$$

即　$$x+2=\sqrt{3},$$

于是有　$$(x+2)^2=(\sqrt{3})^2,$$

即　$$x^2+4x+1=0.$$

所以　$$\sqrt{x^3+4x^2+x+9}=\sqrt{x(x^2+4x+1)+9}$$

$$=\sqrt{9}=3.$$

例 6　已知首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$$

及

$$(b-1)x^2+(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$$

(a、b **是正整数**)**有一个公共根,求** $\dfrac{a^a+b^b}{a^{-b}+b^{-a}}$ **的值.**

解　由题意知 $a>1$,$b>1$,$a\neq b$. **利用因式分解可解得上述两个方程的根分别为**

$$a,\ \frac{a+2}{a-1};\quad b,\ \frac{b+2}{b+1}.$$

因为题中两个方程有一个公共根,则必有

$$a=\frac{b+2}{b+1}\quad \text{或}\quad \frac{a+2}{a-1}=b.$$

上述两式都化简为

$$ab-a-b-2=0,$$

即

$$(a-1)(b-1)=3.$$

所以由 a、b **是大于** 1 **的正整数得**

$$\begin{cases}a-1=1,\\ b-1=3\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}a-1=3,\\ b-1=1.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=2,\\ b=4\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}a=4,\\ b=2.\end{cases}$$

故 $$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot 2^4=256.$$

说明　还可以设题中两个方程的公共根为 x_0,**则就有**

$$\begin{cases}(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+(a^2+2a)=0,\\(b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+(b^2+2b)=0.\end{cases}$$

消去上述两式中的 x_0^2 项，就得到

$$(x_0-1)(a-b)(ab-a-b-2)=0,$$

因而得到

$$ab-a-b-2=0.$$

例 7 已知方程 $ax^2+bx+c=x\ (a>0)$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$. 当 $0<x<x_1$ 时，证明 $x<ax^2+bx+c<x_1$.

解 由题意得方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 的两根为 x_1、x_2，所以，就有

$$ax^2+(b-1)x+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

因为 $$0<x_1<x_2<\frac{1}{a},\ 0<x<x_1.$$

则 $$0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a},$$

所以 $$x-x_1<0,\ x-x_2<0,$$

所以 $$(ax^2+bx+c)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0,$$

即

$$ax^2+bx+c>x.$$

又
$$\begin{aligned}&(ax^2+bx+c)-x_1\\=&[ax^2+(b-1)x+c]+x-x_1\\=&(x-x_1)[a(x-x_2)+1],\end{aligned}$$

且 $x_2<\frac{1}{a}$，即 $-x_2>-\frac{1}{a}$，$-ax_2>a\left(-\frac{1}{a}\right)=-1$，

则 $$1+a(x-x_2)>1-ax_2>1-a\cdot\frac{1}{a}=0,$$

所以

$$(ax^2+bx+c)-x_1<0,$$

即

$$ax^2+bx+c<x_1.$$

于是，当 $0<x<x_1$ 时，有

$$x<ax^2+bx+c<x_1.$$

练　习　题

A　　组

1. 设 b、c **是整数，当** x **依次取** 1、3、6、11 **时，小明算得多项式** x^2+bx+c **的值分别为** 3、5、21、93. **经验证，只有一个结果是错误的. 这个错误的结果是（　　）.**

（A）**当** $x=1$ **时，** $x^2+bx+c=3$

（B）**当** $x=3$ **时，** $x^2+bx+c=5$

（C）**当** $x=6$ **时，** $x^2+bx+c=21$

（D）**当** $x=11$ **时，** $x^2+bx+c=93$

2. 解方程 $x^2-|x|-1=0$.

3. 方程 $x^2+bx+1=0$ **与方程** $x^2-x-b=0$ **有一个公共实根，求** b **的值.**

4. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$**，求** $x^4+3x^3-16x^2+3x-17$ **的值.**

5. 已知 $x=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$**，求** $x^4-12x^3-12x^2+36x+38$ **的值.**

6. 关于 x **的一元二次方程** $3x^2+2ax-a^2=0$ **的一个解是** -1**，求** a **的值.**

7. 解方程　$573x^2-11x-584=0$.

8. 已知 c **是实数，** $x^2-3x+c=0$ **的一个解的相反数是方程** $x^2+3x-c=0$ **的一个解. 求方程** $x^2-3x+c=0$ **的解.**

B　　组

9. 已知 $x=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$**，求** $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ **的值.**

10. 解方程　$x^2-|2x-1|-4=0$.

11. 解方程　$x^2+2a|-x|-3a^2=0$.

12. 已知 $m^2=m+1$**，** $n^2=n+1$**，** $m\neq n$**，求** m^5+n^5 **的值.**

13. 已知二次方程

$$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$$

有根 0 **与** 1**,试求** $a:b:c$.

14. 设等腰三角形的一腰与底边的长分别是方程 $x^2-6x+a=0$ **的两根,当这样的三角形只有一个时,试求** a **的取值范围.**

测　试　题

1．已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，求 $\dfrac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2}{a^2+1}$ 的值.

2．已知关于 x 的二次方程

$$3x^2-(2a-5)x-3a-1=0$$

的一个根是 2，求此方程的另一根及 a 的值.

3．解方程 $(3x-1)(x+1)=(4x+1)(x+1)$.

4．已知 x_0 是一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的根，试求 $\Delta=b^2-4ac$ 与 $M=(2ax_0+b)^2$ 的大小关系.

5．解关于 x 的方程

$$(2x^2-3x-2)a^2+(1-x^2)b^2=ab(1+x^2).$$

6．当 a、b 为何值时，方程

$$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$$

有实数根.

第二讲　可化为一元二次方程的方程

一、知识要点和基本方法

在中学里,对于次数超过 2 的整式方程(称为高次方程),通常运用因式分解和换元法,把它转化为一元二次方程或一元一次方程去求解.

对于分式方程,其求解的基本思想是转化为整式方程求解. 转化的基本方法是去分母和换元. 当然需针对分式方程特点进行恰当的去分母或换元.

对于无理方程,其求解的基本思想是转化为有理方程. 常用方法是:配方法、换元法、因式分解法.

二、例 题 精 讲

例 1　解方程 $x^4+(x-4)^4=626$.

解　设法化为双二次方程.

设 $x=y+2$,则 $x-4=y-2$. 于是方程化为

$$(y+2)^4+(y-2)^4=626,$$

即
$$y^4+24y^2-297=0.$$

因式分解得
$$(y^2-9)(y^2+33)=0,$$

所以由 $y^2=-33$ 无实数解得 $y^2=9$,即

$$y=\pm 3,$$

从而
$$x=5 \quad 或 \quad x=-1.$$

说明 遇到类似于例 1 的方程,常取平均数(如 $(x+x-4)\div 2=x-2$)设元代换,可以简化问题.

例 2 解方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

解 观察特点,发现方程中各项系数关于中间项对称.

由方程可知 $x\neq 0$,则在方程两边同除以 x^2,得

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

令
$$x+\frac{1}{x}=y,$$

则
$$y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

即
$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

于是上述方程化为

$$2y^2+3y-20=0.$$

解这个方程得 $y=\frac{5}{2}$ 或 $y=-4$.

当 $y=\frac{5}{2}$ 时,$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$,

即
$$2x^2-5x+2=0,$$

解之得
$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

当 $y=-4$ 时,$x+\frac{1}{x}=-4$,

即
$$x^2+4x+1=0,$$

解之得
$$x_3=-2-\sqrt{3},\ x_4=-2+\sqrt{3}.$$

所以,原方程的解为

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2,\ x_3=-2-\sqrt{3},\ x_4=-2+\sqrt{3}.$$

说明 类似于例 2 的方程称为倒数方程. 解这样的方程通常运用例 2 的解法求得结果.

例 3 解方程 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$.

解 因为 $x^2-x-1\neq 0$，所以考虑两种情形：(1) $x^2-x-1\neq\pm 1$. (2) $x^2-x-1=\pm 1$.

当 $x^2-x-1\neq\pm 1$ 时，$x+2=0$，则 $x=-2$ 满足题意.

当 $x^2-x-1=1$ 时，有 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$，则由 $x^2-x-1=1$ 得 $x=2$，或 $x=-1$，符合题意.

当 $x^2-x-1=-1$ 时，有 $x=0$，或 $x=1$. 但 $x=1$ 时，$(x^2-x-1)^{x+2}=(-1)^3=-1\neq 1$，所以 $x=1$ 不是原方程的解.

于是，原方程的解为 $x=-2$，或 $x=-1$，或 $x=0$，或 $x=2$.

例 4 解方程 $|x|-\dfrac{4}{x}=\dfrac{3|x|}{x}$.

解 由题意得 $x\neq 0$.

当 $x>0$ 时，原方程化为

$$x-\frac{4}{x}=3,$$

即 $$x^2-3x-4=0,$$

解这个方程得 $x=4$ 或 $x=-1$.

因 $x>0$，则 $x=-1$ 不合要求舍去.

当 $x<0$ 时，原方程化为

$$-x-\frac{4}{x}=-3,$$

即 $$x^2-3x+4=0.$$

因为 $$x^2-3x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,$$

所以方程 $x^2-3x+4=0$ 无解.

故原方程的解为 $$x=4.$$

例 5 解方程