总主编　单　墫　熊　斌

奥数教程

·高一年级·

熊　斌　冯志刚　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程. 高一年级/熊斌,冯志刚编著. —上海:
华东师范大学出版社,2000.11
ISBN 7-5617-2365-2

Ⅰ.奥... Ⅱ.①熊...②冯... Ⅲ.数学课-高中-教
学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第48988号

奥 数 教 程

·高一年级·

总 主 编 单 墫 熊 斌
策划组稿 倪 明 宋维锋
编 著 熊 斌 冯志刚
责任编辑 陈信漪
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
发行部 电话 021-62571961
传真 021-62860410
社 址 上海市中山北路3663号
邮编 200062

印 刷 者 江苏扬中市印刷厂
开 本 890×1 240 32开
印 张 11
字 数 330千字
版 次 2000年11月第一版
印 次 2000年11月第一次
书 号 ISBN 7-5617-2365-2/G·1106
定 价 13.00元

出 版 人 朱杰人

目　　录

基础篇

第一讲　集合的概念与运算

一、知识要点和基本方法

集合是数学中最重要的概念之一，可以说，数学的各个领域、各个分支就是研究带有各种不同性质的集合.

正确地表达一个集合是学好数学的基础，描述法是表示集合的重要方法，它基于下面的概括原则：

概括原则　任给一个性质 p，那么存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 p 的所有对象，即

$$S=\{x \mid p(x)\},$$

其中 $p(x)$ 是"x 具有性质 p"的缩写.

两个集合之间的关系可以通过子集、交集、并集来反映. 处理问题时，往往需要从元素出发来讨论，这里蕴含了"从局部到整体"的数学思想.

在集合的运算中，除了交与并两种运算外，经常出现的还有补运算与差运算.

由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 关于 B 的差集，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A，\text{但 } x\notin B\}.$$

集合的各种运算之间成立如下一些关系式.

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

De Morgen **法则**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

$$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C),$$
$$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C).$$

上述等式的严格证明要用到数理逻辑中的一些公理，读者可以利用文氏图予以验证.

二、例题精讲

例 1　求所有的实数 a，使得关于 x 的不等式

$$|x-1|<ax \qquad ①$$

的解集中，恰有两个整数.

解　由条件，不等式①的解应为一个有限区间，这需要从解不等式着手.

在图 1-1 中，我们作出了函数 $y=|x-1|$ 与 $y=ax$ 的图象，由图象可得：

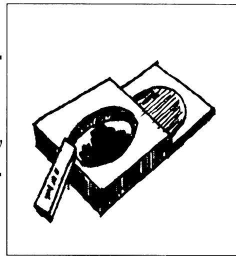

图 1-1

$a\geqslant 1$ **时，不等式①的解为** $x>\dfrac{1}{1+a}$；

$a<-1$ **时，不等式①的解为** $x<\dfrac{1}{1+a}$；

$-1\leqslant a\leqslant 0$ **时，不等式①的解集为** $\varnothing$；

$0<a<1$ **时，不等式①的解为** $\dfrac{1}{1+a}<x<\dfrac{1}{1-a}$.

注意，上面的 $\dfrac{1}{1+a}$ **与** $\dfrac{1}{1-a}$ **是通过解方程（求两条直线的交点）得到的.**

所以，满足条件的 a **首先应满足** $0<a<1$，**这时，解集为** $x\in\left(\dfrac{1}{1+a},\dfrac{1}{1-a}\right)$，**由于** $1\in\left(\dfrac{1}{1+a},\dfrac{1}{1-a}\right)$，**所以** a **应满足** $2<\dfrac{1}{1-a}\leqslant 3$，**故** $\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{2}{3}$.

综上，所有满足条件的 a **构成的集合为** $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$.

说明　这是一个常见的求解含字母不等式的讨论问题，解答中利用图象来处理，显得简洁明了.

例 2　已知元素 $(1, 2)\in A\cap B$，这里集合 $A=\{(x, y)\mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x, y)\mid x^2-ay-b=0\}$. 求 a、b 的值.

解　由交集的定义，可知 $(1, 2)\in A$，且 $(1, 2)\in B$. 于是

$$\begin{cases}a-4+b=0,\\1-2a-b=0.\end{cases}$$

解此方程组，可知 $a=-3$，$b=7$.

说明　本质上而言，集合 A 表示一个二次函数的图象，B 也是如此，所求问题为：在已知交点的条件上，确定参数的值.

例 3　集合 A、B、C（不必相异）的并集

$$A\cup B\cup C=\{1, 2, \cdots, 10\}.$$

求满足条件的集合的有序三元组 (A, B, C) 的个数.

解　由文氏图，可知在求 $A\cup B\cup C$ 时，A、B、C 之间交出 7 个区域（如图 1-2 所示）. 从而，1，2，…，10 中每个数有 7 种选择，故所求有序三元组的个数为 7^{10}.

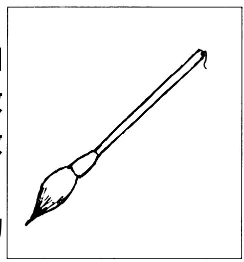

图 1-2

说明　这里每个数 1，2，…，10 均有 7 种选择，用到了 A、B、C 不必相异，以及 (A, B, C) 为有序集合组两个条件. 当然，从解法上来看，我们体会了文氏图的一个妙用.

例 4　设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 15$，集合 A、B 都是 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$. 证明：集合 A 或者 B 中，必有两个不同的数，它们的和为完全平方数.

证明　由 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$，我们不妨设 $1\in A$，并采用反证法来处理.

设集合 A 与 B 中，都没有两个数，它们的和为完全平方数. 则 $3\in B$，于是 $6\in A$，$10\in B$. 这时，如果 $15\in B$，则 $10+15=25$ 为

完全平方数，若 $15 \in A$，则 $1+15$ 又是一个完全平方数，从而，15 没有归属，由 $n \geqslant 15$，这是一个矛盾.

所以，命题成立.

说明 这里我们不妨设 $1 \in A$ 是应该把握的一种技巧，人为地作合理的假设对处理具有对称性的问题，可使问题简化.

例 5 设 $P=\{$不小于 3 的自然数$\}$，定义 P 上的函数如下：若 $n \in P$，定义 $f(n)$为不是 n 的约数的最小自然数，例如 $f(7)=2$，$f(12)=5$. 记函数 f 的值域为 M. 证明：$19 \in M$；$99 \notin M$.

证明 注意到，当 $n=18!$时，1，2，…，18 都是 n 的约数，故此时 $f(n)=19$.

若存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使 $f(n)=99$，则对小于 99 的自然数 k，均有 $k \mid n$，从而，$9 \mid n$ 且 $11 \mid n$，但是 $(9, 11)=1$，由整除理论中的性质，应有 $9 \times 11=99$ 是 n 的约数. 这是一个矛盾.

说明 可以证明 $M=\{p \mid p$ 为质数$\}$，这一点利用本题的方法即可完成.

例 6 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是集合 $X=\{1, 2, \cdots, 10\}$ 的不同子集，它们两两的交集都不是空集，而 X 的其他子集不能与 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中每一个的交集都是非空集合. 求 k 的值.

解 设 A 为 X 的任意一个子集，则 $\overline{A}$(视 X 为全集)也是 X 的子集. 从而，X 的子集可以分为 2^9 个不同的集合对$(A, \overline{A})$.

由于 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中，任意两个集合的交集不空，所以，若 $k>2^9$，则必有一对集合 A 和 $\overline{A}$ 在 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中同时入选，而它们的交集 $A \cap \overline{A}$ 是空集，矛盾. 故 $k \leqslant 2^9$.

另一方面，若 $k<2^9$，则有一对集合 A 和 $\overline{A}$ 在 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中同时不入选，这时，对 A 而言，由条件，存在 j，$1 \leqslant j \leqslant k$，使得 $A_j \cap A=\varnothing$，从而 $A_j \subseteq \overline{A}$，但是 A_j 与 $A_1, \cdots, A_k$ 中的其余每个集合的交都不空，所以，$\overline{A}$ 与 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中的每个集合的交集都不空，这是一个矛盾. 故 $k \geqslant 2^9$.

综上可知，$k=2^9$. 并且，当 $k=2^9$ 时，设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都为包含 1 的 X 的子集，则它们满足题中的条件.

说明 建议读者在着手处理此题时，先把题中的条件完全弄懂.

练 习 题

A 组

1. 设 x、y、z 都是非零实数，试用列举法将 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的所有可能值构成的集合表示出来.

2. 已知 $A=\{1, 3, x\}$，$B=\{x^2, 1\}$，并且 $A\cup B=\{1, 3, x\}$. 求 x 的可能取值情况数.

3. 已知 X 是方程 $x^2+px+q=0$ 的实数解集，$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{1, 4, 7, 10\}$. 且 $X\cap A=\varnothing$，$X\cap B=X$，求 p、q 的值.

4. 已知集合 $A=\{(x, y)\mid y=ax+2\}$，$B=\{(x, y)\mid y=|x+1|\}$，且 $A\cap B$ 是一个单元集，求实数 a 的取值范围.

5. 在集合 $\{1, 2, \cdots, 50\}$ 的子集 S 中，任意两个元素的平方和不是 7 的倍数，求 $|S|$ 的最大值. 这里 $|S|$ 表示 S 的元素个数（后同）.

6. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a, b\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x), x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)), x\in\mathbf{R}\}$. 证明：$A\subseteq B$. 并在 $A=\{-1, 3\}$ 时，求集合 B.

7. 设 S_1、S_2、S_3 是三个非空整数集，已知对于 1、2、3 的任意一个排列 i、j、k，如果 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$. 证明：S_1、S_2、S_3 中必有两个集合相等.

8. 已知集合 $A=\{(x, y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x, y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x, y)\mid x^2+y^2=1\}$，问

（1）当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 是一个二元集？

（2）当 a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 是一个三元集？

9. 设集合 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，$B=\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 都是正整数，且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，a_1

$+a_4=10$，并满足 $A\cap B=\{a_1, a_4\}$，$A\cup B$ 中所有数之和为 224. 求集合 A.

B　　组

10. 考虑集合$\{1, 2, \cdots, 2\,000\}$的满足下述条件的子集 A，A 中没有一个数是另一个数的 5 倍，求$|A|$的最大值.

11. 已知一族集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 具有性质：

（1）每个 A_i 含有 30 个元素；

（2）对每一对 i、j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，$A_i\cap A_j$ 都是单元集；

（3）$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\varnothing$.

求使这样的集合族存在的最大的自然数 n.

12. 已知 $A\subseteq\{1, 2, \cdots, 2\,000\}$，且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于 4 或 7，求$|A|$的最大值.

测　试　题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x=a^2+1, a\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y\mid y=b^2-6b+10, b\in\mathbf{N}^*\}$，问集合 A 和 B 之间的关系是怎样的.

2. 已知集合 $M=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$N=\{0, |x|, y\}$，并且 $M=N$，求

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2\,001}+\frac{1}{y^{2\,001}}\right)$$

的值.

3. 已知 $I=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x, y)\mid y=3x-2\}$，$B=\left\{(x, y)\,\middle|\,\frac{y-4}{x-2}=3\right\}$，求 $A\cap B$ 及 $\overline{A}\cup B$.

4. 设 $M=\{n\mid n=x^2-y^2, x、y\in\mathbf{N}^*\}$，证明：$2\,000\in M$，并求 M 中，从小到大的第 2 000 个正整数的大小.

5. 设 $M=\{n\mid n=x^2+y^2, x、y\in\mathbf{N}^*\}$，证明：$1\,999\notin M$，并且对任意自然数 k，均有 $1\,999^k\notin M$.

第二讲　有限集元素的数目

一、知识要点和基本方法

按照集合的元素个数是否为有限数，集合可分为有限集和无限集. 若集合 A 是有限集，用 $|A|$ 表示它的元素个数.

1. 映射

对任意的两个集合 A、B，依对应法则 f，如果对 A 中任意一个元素 x，在 B 中都有唯一的元素 $f(x)$ 与之对应，则称 $f: A \to B$ 是一个映射. 这里 $f(x)$ 称为 x 的像，而 x 称为 $f(x)$ 的原像.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，且对任意 $x, y \in A$，$x \neq y$，都有 $f(x) \neq f(y)$，则称 f 是 A 到 B 的一个单射. 显然，若 A、B 都是有限集，而且能建立 A 到 B 的一个单射，则 $|A| \leqslant |B|$.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，且对任意 $y \in B$，都有一个 $x \in A$，使得 $y = f(x)$，则称 f 是 A 到 B 上的一个满射. 若 A、B 都是有限集，且能建立 A 到 B 上的一个满射，则 $|A| \geqslant |B|$.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，并且 f 既是单射，又是满射，则称 f 是 A 到 B 的一个一一对应. 当 A、B 都是有限集时，如能建立 A 到 B 上的一个一一对应，则 $|A| = |B|$.

2. 容斥原理

定理 1　设 A, B 都是有限集，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

定理 2　设 A, B, C 都是有限集，则

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

二、例题精讲

例 1 设 $M=\{1, 2, 3, \cdots, 1\,995\}$, $A \subseteq M$, 且当 $x \in A$ 时, $19x \notin A$, 求 $|A|$ 的最大值.

解 由题设知 k 与 $19k$ $(k=6, 7, \cdots, 105)$ 这两个数中至少有一个不属于 A,所以

$$|A| \leqslant 1\,995-(105-6+1)=1\,895.$$

另一方面,设 $B=\{1, 2, \cdots, 5\}$, $C=\{106, 107, \cdots, 1\,995\}$, 令

$$A=B \cup C=\{1, 2, \cdots, 5\} \cup \{106, 107, \cdots, 1\,995\},$$

则 $|A|=1\,895$, 且 A 中没有一个数是另一个数的 19 倍.

事实上,设 $k \in A$, 若 $k \in B$, 则

$$19 \leqslant 19k \leqslant 105, \quad 19k \notin A.$$

若 $k \in C$, 则 $19k \geqslant 106 \times 19>1\,995$, 故 $19k \notin A$.

综上所述,$|A|$ 的最大值为 1 895.

例 2 设 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 2n, 2n+1\}$. B 是 A 的一个子集,且 B 中的任意三个不同元素 x、y、z,都有 $x+y \neq z$. 求 $|B|$ 的最大值.

解 设 $O=\{1, 3, \cdots, 2n+1\}$, $E=\{2, 4, \cdots, 2n\}$. 则 $A=O \cup E$. 设 $B=\{b_1, \cdots, b_s, c_1, \cdots, c_t\}$, 其中 $b_1, \cdots, b_s \in O$, $c_1, \cdots, c_t \in E$, 且 $b_1<b_2<\cdots<b_s$. 由题设知

$$b_s-b_i \neq c_j,$$

其中 $i=1, 2, \cdots, s-1$, $j=1, 2, \cdots, t$ (否则集 B 中就有三个元素 b_i、c_j、b_s,使得 $b_i+c_j=b_s$),且

$$2 \leqslant b_s-b_i \leqslant 2n,$$

即
$$b_s-b_i \in E,\ i=1, 2, \cdots, s-1.$$

所以 $b_s-b_1, b_s-b_2, \cdots, b_s-b_{s-1}, c_1, \cdots, c_t$ 是 E 中互不相同的元素,故

$$(s-1)+t \leqslant |E| = n,$$

$$|B| = s+t \leqslant n+1.$$

又当 $B=\{n+1, n+2, \cdots, 2n+1\}$ 时，B 中任意两个不同元素 x、y，都有 $x+y \geqslant 2n+3$，从而 B 满足题意.

综上所述，$|B|$ 的最大值为 $n+1$.

说明　例 1 和例 2，我们都是先求出一个上界（例 1 是 $|A| \leqslant 1\,895$，例 2 是 $|B| \leqslant n+1$），然后再构造一个具体的例子来说明这个上界是可以达到的，这是处理这种最值问题的常用手法. 在实际解题时，我们往往先通过具体的例子猜出这个上界，然后再设法证明.

例 3　设 $X=\{1, 2, \cdots, 100\}$，对 X 的任一非空子集 M，M 中的最大数与最小数的和称为 M 的特征，记为 $m(M)$. 求 X 的所有非空子集的特征的平均数.

解　设 $A \subset X$，令 f：A 韻 A'，

$$A' = \{101-a \mid a \in A\} \subset X.$$

于是 f：A 韻 A' 是 X 的非空子集的全体（子集组成的集）Y 到 Y 自身的满射，记 X 的非空子集为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$（其中 $n=2^{100}-1$），则特征的平均数为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(m(A_i)+m(A_i')).$$

由于 A 中的最大数与 A' 中的最小数的和为 101，A 中最小数与 A' 中的最大数的和也为 101，故 $m(A_i)+m(A_i')=202$，从而特征的平均数为

$$\frac{1}{2n} \cdot 202 \cdot n = 101.$$

例 4　某班语文、数学、外语三门课程期中考试成绩统计结果：至少有一门课程得满分的学生只有 18 人，语文得满分的有 9 人，数学得满分的有 11 人，外语得满分的有 8 人，语文、数学都得满分的有 5 人，数学、外语都得满分的有 3 人，语文、外语都得满分的有 4 人，问：

（1）语文、数学两门课程至少有一门得满分的学生有多少人？

（2）语文、数学、外语三门课程都得满分的学生有多少人？

解　设该班期中考试语文、数学、外语得满分的学生的集合分别为 A、B、C，由题意知

$$|A| = 9,\ |B| = 11,\ |C| = 8.$$

$$|A \cap B| = 5,\ |B \cap C| = 3,\ |C \cap A| = 4,$$

$$|A \cup B \cup C| = 18.$$

（1）语文、数学两门课程至少有一门得满分的学生有

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 9 + 11 - 5 = 15(\text{人}).\end{aligned}$$

（2）语文、数学、外语都得满分的学生有

$$\begin{aligned}|A \cap B \cap C| = &|A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + \\ &|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \\ = &18 - 9 - 11 - 8 + 5 + 3 + 4 \\ = &2(\text{人}).\end{aligned}$$

例 5　将与 105 互质的所有正整数从小到大排成数列，求这个数列的第 1 000 项.

解　设 $S = \{1, 2, \cdots, 105\}$，$A_3 = \{a \mid a \in S,\text{且 } 3 \mid a\}$，$A_5 = \{a \mid a \in S,\text{且 } 5 \mid a\}$，$A_7 = \{a \mid a \in S,\text{且 } 7 \mid a\}$，则

$$|A_3| = \frac{105}{3} = 35,\ |A_5| = \frac{105}{5} = 21,\ |A_7| = \frac{105}{7} = 15,$$

$$|A_3 \cap A_5| = \frac{105}{3 \times 5} = 7,\ |A_5 \cap A_7| = \frac{105}{5 \times 7} = 3,$$

$$|A_7 \cap A_3| = \frac{105}{7 \times 3} = 5,$$

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \frac{105}{3 \times 5 \times 7} = 1,\ |S| = 105.$$

在 1 到 105 中，与 105 互质的数有

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_3 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| &= |S| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\
&= |S| - (|A_3| + |A_5| + |A_7|) + \\
&\quad (|A_3 \cap A_5| + |A_5 \cap A_7| + \\
&\quad |A_7 \cap A_3|) - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
&= 105 - (35 + 21 + 15) + (7 + 3 + 5) - 1 \\
&= 48.
\end{aligned}
$$

设与 105 互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，则

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ \cdots,\ a_{48} = 104,$$

$$a_{49} = 105 + 1,\ a_{50} = 105 + 2,\ a_{51} = 105 + 4,\ \cdots,$$

$$a_{96} = 105 + 104, \cdots$$

因为 $1\,000 = 48 \times 20 + 40$，所以

$$a_{1\,000} = 105 \times 20 + a_{40}.$$

由于 $a_{48} = 104$，$a_{47} = 103$，$a_{46} = 101$，$a_{45} = 97$，$a_{44} = 94$，$a_{43} = 92$，$a_{42} = 89$，$a_{41} = 88$，$a_{40} = 86$，所以

$$a_{1\,000} = 105 \times 20 + 86 = 2\,186.$$

说明　本题利用了逐步淘汰原理，即

（1）设 A、B 是 S 的子集，$\overline{A}$、$\overline{B}$ 分别是 A、B 对 S 的补集，则

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - (|A| + |B|) + |A \cap B|.$$

（2）设 A、B、C 是 S 的子集，$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 分别是它们对 S 的补集，则

$$
\begin{aligned}
|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| &= |S| - (|A| + |B| + |C|) + \\
&\quad (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}
$$

（1）和（2）与定理 1、定理 2 一起称为容斥原理. 有兴趣的读者可以把它们推广到 n 个集合的情形.

例 6 设 $S=\{1,2,\cdots,100\}$，**求最小的自然数** n，**使得** S **的每个** n **元子集都含有** 4 **个两两互质的数.**

解 设 $A_2=\{a \mid a\in S, 2\mid a\}$，$A_3=\{a \mid a\in S, 3\mid a\}$，$A_5=\{a \mid a\in S, 5\mid a\}$. **则**

$$|A_2|=50,\ |A_3|=\left[\frac{100}{3}\right]=33,\ |A_5|=20,$$

$$|A_2\cap A_3|=\left[\frac{100}{2\times 3}\right]=16,\ |A_3\cap A_5|=\left[\frac{100}{3\times 5}\right]=6,$$

$$|A_2\cap A_5|=\frac{100}{10}=10,\ |A_2\cap A_3\cap A_5|=\left[\frac{100}{2\times 3\times 5}\right]=3.$$

所以，在 S **中是** 2 **或** 3 **或** 5 **的倍数有**

$$\begin{aligned}|A_2\cup A_3\cup A_5| &= |A_2|+|A_3|+|A_5|-|A_2\cap A_3|-\\ &\quad |A_3\cap A_5|-|A_2\cap A_5|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\ &= 50+33+20-16-6-10+3\\ &= 74(\text{个}).\end{aligned}$$

于是，对于上述的 74 **元集** $A_2\cup A_3\cup A_5$，**从中任取** 4 **个数，由抽屉原则知其中必有两个数同为** 2 **或** 3 **或** 5 **的倍数，它们不互质. 所以** $n\geqslant 75$.

下面证明 $n=75$ **是可以的.**

构造如下 4 **个集合（注意：**$1\sim100$ **中共有** 25 **个质数）：**

$B_1=\{1$ **及前** 25 **个质数**$\}$，$B_2=\{2^2,3^2,5^2,7^2\}$，

$B_3=\{2^3,3^3,5\times19,7\times13\}$，$B_4=\{2^4,3^4,5\times17,7\times11\}$.

这四个集合每两个的交集为空集，且每个集合中的任意两个数都互质. 所以

$$\begin{aligned}|B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4| &= |B_1|+|B_2|+|B_3|+|B_4|\\ &= 26+4\times 3=38.\end{aligned}$$

设 $X\subseteq S$，**且** $|X|\geqslant 75$，**则** X **中至少有**

$$75-(100-38)=13$$

个元素取自 $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$，于是由抽屉原则知，至少有 $\left[\frac{13}{4}\right]+1=4$ 个数取自某个 $B_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，由 B_i 的构造知，这 4 个数是两两互质的.

综上所述，n 的最小值为 75.

练　习　题

A　　组

1. 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1) 写出一个 $f: A \rightarrow B$，使得 f 是单射，并求 A 到 B 的单射的个数；

(2) 写出一个 $f: A \rightarrow B$，使得 f 不是单射，并求所有这种映射的个数；

(3) A 到 B 的映射能否是满射？

2. 集合 A 与 B 的并集 $A \cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$，当 $A \neq B$ 时，(A, B)与(B, A)视为不同的对，则这样的(A, B)有多少对？

3. 已知集合

$$A=\{(x, y) \mid |x|+|y|=a, a>0\},$$

$$B=\{(x, y) \mid |xy|+1=|x|+|y|\}.$$

若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，求 a 的值.

4. 在 1，2，…，1 000 中，有多少个正整数既不是 2 的倍数，又不是 5 的倍数？

5. 在 1 到 100 这 100 个正整数中，最多可以选出多少个数，使得其中没有一个数是另一个数的 3 倍.

6. 对于集合$\{1, 2, \cdots, n\}$和它的每个非空子集，我们定义"交替和"如下：把集合中的数按从大到小的顺序排列，然后从最大的数开始交替地加减各数（例如$\{1, 2, 4, 6, 9\}$的交替和是 $9-6+4-2$