

总主编 单 樽 熊 斌

# 奥数教程

· 六年级 ·

本册主编 杭顺清

参 编 者 郭凯福 周百里 庄国志

何 强 陈毓明 沈 军

吴士元 叶维根

华东师范大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

奥数教程. 六年级/杭顺清主编. —上海: 华东师范大学出版社, 2000. 11  
ISBN 7-5617-2357-1

I. 奥... II. 杭... III. 数学课-小学-教学参考资料 IV. G624. 503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48989 号

# 奥数教程

· 六年级 ·

总主编 单 增 熊 斌  
策划组稿 倪 明 宋维锋  
本册主编 杭顺清  
责任编辑 陈信漪  
封面设计 □□□  
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社  
发行部 电话 021-62571961  
传真 021-62860410

社 址 上海市中山北路 3663 号  
邮编 200062

印刷者 江苏省宜兴市印刷二厂  
开 本 890×1 240 32 开  
印 张 8  
字 数 210 千字  
版 次 2000 年 11 月第一版  
印 次 2000 年 11 月第一次  
书 号 ISBN 7-5617-2357-1/G · 1104  
定 价 9.00 元

出 版 人 朱杰人

# 目 录

第一讲	分数的计算	1
第二讲	分数的大小比较	7
第三讲	分数数列求和	13
第四讲	繁分数	19
第五讲	分数、百分数应用题	25
第六讲	巧配浓度	32
第七讲	工程问题	39
第八讲	比和比例关系	46
第九讲	圆的周长和面积	52
第十讲	扇形	62
第十一讲	长方体和正方体	72
第十二讲	圆柱和圆锥	84
第十三讲	加法原理和乘法原理	95
第十四讲	递推的方法	100
第十五讲	重叠问题	109
第十六讲	钟面上的数学问题	117
第十七讲	上楼梯的问题	122
第十八讲	同余问题	128
第十九讲	不定方程	133
第二十讲	最大与最小	141
第二十一讲	从整体看问题	146
第二十二讲	反过来考虑	154
第二十三讲	不变量	161
第二十四讲	染色问题	168

第二十五讲 对策问题.....	173
综合测试题(一).....	177
综合测试题(二).....	181
习题解答.....	185

# 第一讲 分数的计算

## 一、知识要点和基本方法

分数计算是小学数学的重要内容,也是数学竞赛的重要内容之一。

分数计算同整数计算一样既有知识要求又有能力要求.法则、定律、性质是进行计算的依据,要使计算快速、准确,关键在于掌握运算技巧.对算式进行认真观察,剖析算式的特点及各数之间的关系,巧妙地、灵活地运用运算定律,合理改变运算顺序,使计算简便易行,既快又准,这对开拓知识、启迪思维,培养学生综合分析、推理能力和灵活、快速、准确的运算能力,使智能得到协调的发展,都有很大的帮助.

大家都非常熟悉德国著名数学家高斯十岁时巧算前 100 个自然数和的故事吧!从某种意义上说,计算方法的巧妙,在一定程度上反映一个人智商的高低.就这个问题给同学们提供一些帮助,愿你能较好地掌握巧算妙解的方法.

## 二、例题精讲

**例 1** 计算:  $1\,995\frac{1}{2} \times 73 + \frac{6}{25} \times 730 + 153.3$

**分析** 这里的两个分数都可以化成有限小数,显然用小数计算简便.

**解** 原式  $= 1\,995.5 \times 73 + 2.4 \times 73 + 73 \times 2.1$   
 $= (1\,995.5 + 2.4 + 2.1) \times 73$   
 $= 2\,000 \times 73$

$$= 146\ 000$$

例2 计算：
$$\frac{1\ 999 \times (3.4 \times 69 + 3.5)}{3.5 \times 69 - 3.4}$$

分析 可以清楚地看到分子的括号部分与分母可以通过乘法分配律转化成同一个算式,使计算简便.

解 原式 
$$= 1\ 999 \times \frac{3.4 \times 69 + 3.5}{(3.4 + 0.1) \times 69 - 3.4}$$

$$= 1\ 999 \times \frac{3.4 \times 69 + 3.5}{3.4 \times 69 + 6.9 - 3.4}$$

$$= 1\ 999 \times \frac{3.4 \times 69 + 3.5}{3.4 \times 69 + 3.5}$$

$$= 1\ 999$$

例3 计算：
$$\frac{1.2 \times 3.6 \times 10.8 + 2 \times 6 \times 18 + \frac{1}{13} \times \frac{3}{13} \times \frac{9}{13}}{1.2 \times 2.4 \times 4.8 + 2 \times 4 \times 8 + \frac{1}{13} \times \frac{2}{13} \times \frac{4}{13}}$$

分析 若按部就班,计算的复杂性是可想而知的.通过观察,找到分子、分母的特点和相同点,变形以后,计算过程就简单多了.

解 原式 
$$= \frac{1.2^3 \times 1 \times 3 \times 9 + 2^3 \times 1 \times 3 \times 9 + \left(\frac{1}{13}\right)^3 \times 1 \times 3 \times 9}{1.2^3 \times 1 \times 2 \times 4 + 2^3 \times 1 \times 2 \times 4 + \left(\frac{1}{13}\right)^3 \times 1 \times 2 \times 4}$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 9}{1 \times 2 \times 4} \times \frac{1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13}\right)^3}{1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13}\right)^3}$$

$$= 3 \frac{3}{8}$$

例4 计算：
$$1 - \left(\frac{101\ 010}{202\ 020}\right)^2 \times \left(\frac{202\ 020}{303\ 030}\right)^2 \times \left(\frac{333\ 033}{555\ 055}\right)^2 \times \left(\frac{555\ 555}{777\ 777}\right)^2$$

解 仔细观察,可以发现每个分数都可以约简,于是

$$\text{原式} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}$$

$$= 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$$

**例 5** 计算： $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

**分析** 把相同的算式用同一个字母表示，先进行字母运算，得到最简单的字母表达式，再把原算式代入，这是常用的一种巧妙方法。

**解** 令  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = B$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = A$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (1 + B) \times A - (1 + A) \times B \\ &= A + AB - B - AB \\ &= A - B \end{aligned}$$

所以 原式  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{5}$$

**例 6** 计算： $99 \frac{3}{4} + 199 \frac{3}{4} + 2\,999 \frac{3}{4} + 39\,999 \frac{3}{4} + 1$

**分析** 因为  $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ，所以前面的四个带分数都可以变成整数了。

**解** 原式  $= \left(99 \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(199 \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$$+ \left(2\,999 \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(39\,999 \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 100 + 200 + 3\,000 + 40\,000$$

$$= 43\,300$$

## 练 习 题

## A 组

计算下列各题：

1.  $45 - 18 \frac{1}{2} + 24.873 - 18.96$

2.  $292.5 \times \frac{11}{13} \div 2 \frac{7}{8}$

3.  $7.0875 - 4 \frac{2}{3} \times 0.72 + \frac{57}{64} \div 2.85$

4.  $84 \frac{1}{2} - \left\{ 2 - \left[ 0.35 \div \left( 1 - \frac{3}{8} \right) \times 60\% \right] \right\} \times \frac{1}{4}$

5.  $1992 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3} + 4 \frac{1}{2} - 5 \frac{1}{3} + \dots + 1990 \frac{1}{2} - 1991 \frac{1}{3}$

6.  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{20} - \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{20000}$

7.  $0.5 \times \frac{6}{29} \div 0.15 \times 7.25$

## B 组

计算下列各题(8~13)：

8.  $\left( 1 + \frac{7}{33} \right) + \left( 1 + \frac{7}{33} \times 2 \right) + \left( 1 + \frac{7}{33} \times 3 \right) + \dots + \left( 1 + \frac{7}{33} \times 10 \right) + \left( 1 + \frac{7}{33} \times 11 \right)$

9.  $1 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{5} + 5 \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{7} + 7 \frac{1}{8}$

10.  $\frac{\left( \frac{9}{40} + 0.7 \right) \times 3 \frac{2}{3}}{10.01 \div \frac{13}{74}}$

11.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$

$$12. 7\frac{5}{6} - 6\frac{7}{12} + 5\frac{9}{20} - 4\frac{11}{30} + 3\frac{13}{42} - 2\frac{15}{56} + 1\frac{17}{72}$$

$$13. \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1995} + \frac{2}{1995} \\ + \dots + \frac{1995}{1995} + \frac{1994}{1995} + \dots + \frac{2}{1995} + \frac{1}{1995}$$

14. 有 30 个数:  $1.65, 1.65 + \frac{1}{30}, 1.65 + \frac{2}{30}, \dots, 1.65 + \frac{28}{30},$   
 $1.65 + \frac{29}{30}$ . 如果取每个数的整数部分, 并将这些数相加, 那么其和是多少?

15. 计算:  $\frac{1994}{1994^2 - 1993 \times 1995} + 6$

## 测 试 题

计算下列各题:

1.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$

2.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$

3.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \dots + \frac{49}{50}$

4.  $2 \times \left(1 - \frac{1}{1995^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1994^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1993^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$

5.  $1949 \times \left(\frac{1}{47} - \frac{1}{1996}\right) + 47 \times \left(\frac{1}{1949} - \frac{1}{1996}\right) - 1996 \times$   
 $\left(\frac{1}{1949} + \frac{1}{47}\right) + 1003$

6.  $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}\right)$

$$+ \frac{6}{7})$$

$$7. 2 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{11} + 4 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{4}{11}$$

$$8. \frac{9}{10} \times 34.6 + 111 \times 1.8 + 54.3 \div 1 \frac{1}{9}$$

$$9. \left(96 \div 4 - 4 \frac{1}{18} \times 5\right) \times \left[\left(3 \frac{7}{8} - 3.875\right) \times 49.5 \div 0.8 \div \frac{4}{5}\right]$$

$$10. 0.1\dot{2} + 0.2\dot{3} + 0.3\dot{4} + 0.4\dot{5} + 0.5\dot{6} + 0.6\dot{7} + 0.7\dot{8} + 0.8\dot{9}$$

$$11. 1 \div (2 \div 3) \div (3 \div 4) \div (4 \div 5) \div (5 \div 6) \div (6 \div 7) \div (7 \div 8) \div (8 \div 9)$$

$$12. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$13. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}$$

$$14. \frac{(10^4 + 64)(18^4 + 64)(26^4 + 64)(34^4 + 64)}{(6^4 + 64)(14^4 + 64)(22^4 + 64)(30^4 + 64)}$$

$$15. \frac{7^2 + 1}{7^2 - 1} + \frac{9^2 + 1}{9^2 - 1} + \frac{11^2 + 1}{11^2 - 1} + \dots + \frac{99^2 + 1}{99^2 - 1}$$

## 第二讲 分数的大小比较

### 一、知识要点和基本方法

比较两个分数的大小,小学数学课本中介绍了两种基本方法.第一种是如果两个分数分母相同,分子大的分数较大;第二种是如果两个分数分子相同,分母小的分数较大.如果分子、分母都不相同,那么或者统一分母,或者统一分子,再进行比较.有时就需要另辟蹊径,例如相减比较,如果差大于零,减数就小;相除比较,若商是真分数,则被除数小于除数,若商是假分数,则被除数大于除数;交叉相乘比较,分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ ,如果 $ad > cb$ 则 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ;倒数比较,倒数大的分数小于倒数小的分数;化为小数或循环小数比较等等.

在解题中必须认真分析,要学会多角度、多侧面思考问题,灵活运用解题方法,不断开拓解题思路,提高解题能力.

### 二、例题精讲

例1 分数 $\frac{5}{12}$ 、 $\frac{12}{19}$ 、 $\frac{10}{23}$ 、 $\frac{4}{7}$ 、 $\frac{15}{22}$ 中,哪一个最大?

分析 这五个分数的分子和分母都不相同.如果统一分母,显然计算量大.统一分子,可以看出分子的最小公倍数是 $[5, 12, 10, 4, 15] = 60$ .统一分子后各分数分别为:

$$\frac{5}{12} = \frac{60}{144} \quad \frac{12}{19} = \frac{60}{95} \quad \frac{10}{23} = \frac{60}{138} \quad \frac{4}{7} = \frac{60}{105} \quad \frac{15}{22} = \frac{60}{88}$$

解 根据分数的性质,分子相同的分数,分母小的分数大.所以这五个分数中最大的分数是 $\frac{15}{22}$ .

例2 比较  $\frac{666\ 665}{666\ 667}$  和  $\frac{777\ 776}{777\ 778}$  的大小.

分析 这两个分数的分子和分母都很接近,且都相差2.先分别求出与原分数之和为1的另两个分数,比较这两个分子相同的分数,再比较原来的两个分数.

$$\text{解 } \frac{666\ 665}{666\ 667} = 1 - \frac{2}{666\ 667}$$

$$\frac{777\ 776}{777\ 778} = 1 - \frac{2}{777\ 778}$$

$$\text{因为 } \frac{2}{666\ 667} > \frac{2}{777\ 778}$$

$$\text{所以 } 1 - \frac{2}{666\ 667} < 1 - \frac{2}{777\ 778}$$

$$\text{即 } \frac{666\ 665}{666\ 667} < \frac{777\ 776}{777\ 778}$$

例3 已知  $A = \frac{1}{1\ 998^2 - 1\ 998 + 1}$ ,

$$B = \frac{1}{1\ 998^2 - 1\ 997 \times 1\ 998 + 1\ 997^2}.$$

比较  $A$  与  $B$  的大小.

分析 由于这两个分数的分子都是1,只要比较这两个分数分母的大小就可以了.分数  $B$  的分母为:

$$\begin{aligned} & 1\ 998^2 - 1\ 997 \times 1\ 998 + 1\ 997^2 \\ &= 1\ 998^2 - 1\ 997 \times (1\ 998 - 1\ 997) \\ &= 1\ 998^2 - 1\ 997 \\ &= 1\ 998^2 - 1\ 998 + 1 \end{aligned}$$

与分数  $A$  的分母相同.所以分数  $A$  与分数  $B$  的大小相等.

$$\text{解 } A = B$$

例4 不求和比较  $1\ 995 \frac{1\ 993}{1\ 994} + 1\ 994 \frac{1\ 992}{1\ 995}$  与  $1\ 996 \frac{1\ 993}{1\ 994} +$

$1\ 993 \frac{1\ 992}{1\ 995}$  的大小.

分析 不求和比较,是否尝试求这两个数的差呢.这也是一个很  
八/ 奥数教程·六年级

有效的方法.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \left(1995 \frac{1993}{1994} + 1994 \frac{1992}{1995}\right) - \\ & \left(1996 \frac{1993}{1994} + 1993 \frac{1992}{1995}\right) \\ &= \left(1995 + \frac{1993}{1994} + 1994 + \frac{1992}{1995}\right) - \\ & \left(1996 + \frac{1993}{1994} + 1993 + \frac{1992}{1995}\right) \\ &= [1995 + 1994 - (1996 + 1993)] - \\ & \left[\frac{1993}{1994} + \frac{1992}{1995} - \left(\frac{1993}{1994} + \frac{1992}{1995}\right)\right] \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 1995 \frac{1993}{1994} + 1994 \frac{1992}{1995} = 1996 \frac{1993}{1994} + 1993 \frac{1992}{1995}$$

**例 5** 在下列□内填两个相邻的整数,使不等式成立:

$$\square < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \square$$

$$\text{分析 因为 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \\ &= 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \\ &= 2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \\ &= 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} < 2 + \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

因此上面两个方框内应分别填 2 和 3. 即

$$\boxed{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \boxed{3}$$

例6 已知  $A = \frac{1}{\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \dots + \frac{1}{1997}}$ , 求  $A$  的整数部分

是多少?

分析 先估算分母的大小, 因为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \dots + \frac{1}{1997} \\ & < \frac{1}{1980} + \frac{1}{1980} + \dots + \frac{1}{1980} = \frac{18}{1980} \end{aligned}$$

又 
$$\begin{aligned} \frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \dots + \frac{1}{1997} & > \frac{1}{1997} + \frac{1}{1997} + \dots + \frac{1}{1997} \\ & = \frac{18}{1997} \end{aligned}$$

所以  $\frac{1980}{18} < A < \frac{1997}{18}$ , 即  $110 < A < 110\frac{17}{18}$

解  $A$  的整数部分是 110.

## 练 习 题

### A 组

1. 用“<”和“>”填空:

$$\frac{555}{6666} ( \quad ) \frac{5555}{66666}, \quad \frac{71}{125} ( \quad ) \frac{13}{12}$$

2. 用“<”把下列分数连接起来:

$$\frac{13}{12}, \frac{9}{8}, \frac{3}{4}, \frac{14}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}$$

3. 比较  $\frac{55553}{55556}$  和  $\frac{66662}{66665}$  的大小.

4. 比较  $\frac{53^{2000}}{53^{1999}}$  与  $\frac{53^{2000} - 2000}{53^{1999} - 2000}$  的大小.

5. 比较  $\frac{12346}{98761}$  和  $\frac{12345}{98765}$  的大小.

6. 将  $\frac{98\ 765}{98\ 766}$ 、 $\frac{9\ 876}{9\ 877}$ 、 $\frac{987}{988}$ 、 $\frac{98}{99}$  这四个数按从小到大的次序排列出来。

7. 比较下面四个算式的大小。

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{29}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{19}$$

## B 组

8. 用“<”和“>”填空：

$$\frac{34\ 331\ 279}{34\ 331\ 281} \left( \quad \right) \frac{51\ 496\ 919}{51\ 496\ 922}, \quad \frac{34\ 331\ 279}{51\ 496\ 919} \left( \quad \right) \frac{34\ 331\ 281}{51\ 496\ 922}$$

9. 比较下面三个分数大小：

$$\frac{11}{222}, \quad \frac{111}{2\ 222}, \quad \frac{11 + 111}{222 + 2\ 222}$$

10. 比较  $\frac{777\ 777\ 775}{777\ 777\ 779}$  与  $\frac{888\ 888\ 883}{888\ 888\ 887}$  的大小。

11. 分数  $\frac{4}{9}$ 、 $\frac{17}{35}$ 、 $\frac{101}{203}$ 、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{151}{301}$  中，哪一个最大？

12. 比较  $\frac{111\ 111\ 110}{222\ 222\ 221}$  与  $\frac{444\ 444\ 443}{888\ 888\ 887}$  的大小。

13. 比较  $\frac{1\ 999^{2\ 000}}{2\ 000^{1\ 999}}$  与  $\frac{1\ 999^{2\ 000} + 2\ 000}{2\ 000^{1\ 999} + 2\ 000}$  的大小。

14. 有七个数， $0.\dot{4}\dot{2}$ 、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{11}{26}$ 、 $0.42\dot{4}$ 、 $\frac{26}{61}$  是其中的五个，已知从小到大排列的第三个数是  $\frac{11}{26}$ ，求从大到小排列的第三个数。

15. 求  $\frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{29}}$  的整数部分是多少？

## 测 试 题

1. 将下列每组三个分数按从小到大的次序排列起来：

(1)  $\frac{579}{580}$ 、 $\frac{44}{45}$  和  $\frac{1\ 652}{1\ 653}$  应为：\_\_\_\_\_。

(2)  $\frac{777}{9\ 999}$ 、 $\frac{7\ 777}{99\ 999}$ 和 $\frac{777+7\ 777}{9\ 999+99\ 999}$  应为:\_\_\_\_\_.

2. 用“<”把下列分数连接起来:

$$\frac{16}{15}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{17}{11}, \frac{7}{8}, \frac{8}{7}, \frac{2}{3}$$

3. 比较 $\frac{22\ 223}{22\ 224}$ 和 $\frac{33\ 332}{33\ 333}$ 的大小.

4. 比较 $\frac{43^{2\ 001}}{43^{2\ 000}}$ 与 $\frac{43^{2\ 001}-2\ 001}{43^{2\ 000}-2\ 001}$ 的大小.

5. 比较 $\frac{35\ 861}{35\ 862}$ 和 $\frac{52\ 971}{52\ 974}$ 的大小.

6. 将 $\frac{87\ 654}{87\ 655}$ 、 $\frac{8\ 765}{8\ 766}$ 、 $\frac{876}{877}$ 、 $\frac{87}{88}$ 这四个数按从大到小的次序排列出来.

7. 比较下面四个算式的大小:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{33}, \frac{1}{12} + \frac{1}{29}, \frac{1}{13} + \frac{1}{25}, \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$$

8. 用“<”和“>”填空:

$$\frac{11\ 111\ 431}{22\ 222\ 864} (\quad) \frac{11\ 111\ 361}{22\ 222\ 724}, \frac{11\ 111\ 431}{11\ 111\ 361} (\quad) \frac{22\ 222\ 864}{22\ 222\ 724}$$

9. 比较下面五个分数大小:

$$\frac{10}{519}, \frac{14}{725}, \frac{15}{776}, \frac{21}{1\ 088}, \frac{35}{1\ 814}$$

10. 比较 $\frac{100\ 000\ 005}{100\ 000\ 008}$ 与 $\frac{800\ 000\ 003}{800\ 000\ 006}$ 的大小.

11. 分数 $\frac{4}{7}$ 、 $\frac{12}{25}$ 、 $\frac{149}{300}$ 、 $\frac{5}{9}$ 、 $\frac{201}{402}$ 中,哪一个最大?

12. 比较 $\frac{222\ 222\ 220}{444\ 444\ 441}$ 与 $\frac{333\ 333\ 334}{666\ 666\ 669}$ 的大小.

13. 比较 $\frac{2\ 000^{2\ 001}}{2\ 001^{2\ 000}}$ 与 $\frac{2\ 000^{2\ 001}+2\ 001}{2\ 001^{2\ 000}+2\ 001}$ 的大小.

14. 求 $\frac{9}{10} + \frac{99}{100} + \frac{999}{1\ 000} + \dots + \frac{99\ 999\ 999\ 999}{100\ 000\ 000\ 000}$ 的整数部分.

## 第三讲 分数数列求和

### 一、知识要点和基本方法

异分母分数相加减,通常先通分,把异分母分数变成同分母分数后再相加减.有一些分数计算题如果按照常规方法计算就会十分复杂,必须运用某些技巧,寻找简便计算的方法.当分母之间存在某种特殊规律时,运用这些规律,就能使计算简化.如果分母是相邻的两个自然数的乘积,可以通过拆项的方法,使得其中一部分分数可以相互抵消,从而简化计算过程.

一般地,可利用下面的等式,巧妙地计算一些分数求和的问题.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\frac{A}{a_1}(a_1 + a_2)} + \frac{1}{\frac{A}{a_2}(a_1 + a_2)}$$

### 二、例题精讲

例 1 计算:  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{49 \times 50}$

解 原式 =  $\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) +$   
 $\cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right)$   
 $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$   
 $= 1 - \frac{1}{50}$