

总主编 单 樽 熊 斌

奥数教程

· 高 三 年 级 ·

余红兵 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程. 高三年级 / 余红兵编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2000. 10
ISBN 7-5617-2349-0

I. 奥… II. 余… III. 数学课-高中-教学参考资料
IV. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 66417 号

奥数教程

· 高三年级 ·

总主编 单 樽 熊 斌
策划组稿 倪 明 宋维锋
编 著 余红兵
特约编辑 许维颖
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
发行部 电话 021-62571961
 传真 021-62860410
社 址 上海市中山北路 3663 号
 邮编 200062

印刷者 印刷厂
开 本 890×1 240 32 开
印 张 7.5
字 数 215 千字
版 次 2000 年 11 月第一版
印 次 2000 年 11 月第一次
书 号 ISBN 7-5617-2349-0/G·1100
定 价 元

出 版 人 朱杰人

目 录

基 础 篇

第一讲	排列与组合	1
第二讲	二项式系数	7
第三讲	计数:对应与递推	16
第四讲	计数:容斥原理	25
第五讲	数的整除	35
第六讲	素数	47
第七讲	同余(一)	57
第八讲	不定方程(一)	67
第九讲	多项式的整除	77
第十讲	多项式的零点	89
第十一讲	整系数多项式	99
第十二讲	多项式的插值与差分	108

提 高 篇

第十三讲	单位根及其应用	121
第十四讲	生成函数方法	131
第十五讲	集合与子集族	143
第十六讲	图论问题	154
第十七讲	组合问题	164
第十八讲	同余(二)	174
第十九讲	不定方程(二)	182
第二十讲	数论问题	190

综合练习..... 201

习题答案或提示..... 204

第一讲 排列与组合

组合数学,也称作组合分析,是一个重要的数学分支,肇源极古.

组合数学与许多数学分支相交叉,因而很难(也不必要)对它下一个正式的定义.由本书涉及的组合数学的内容,读者可大致了解其基本的特点.

组合数学中的一个重要课题是计数问题,其大意是确定满足某种限制条件的元素个数.“排列”与“组合”则是这一课题中最简单和基本的内容.

一、加法原理和乘法原理

加法原理及乘法原理,是组合计数的基本的原则,也是进一步研究其他组合问题的基础.

1. 加法原理 做一件事,完成它的方法可分为 n 个互不相交的类,在第一类中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法,……,在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,则完成这件事共有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

加法原理的精神是“整体”等于“部分”之和,应用加法原理,就是将“整体”(完成一件事的方法)分成若干个互不相交的类,使得每一类中的元素个数易于计算.至于如何分组,当然得根据具体问题而定.

注 1 加法原理可用集合的语言表述为下面更为一般的形式:

设 S 是一个(有限)集合, S_1, S_2, \dots, S_n 是 S 的一个划分,即

S_1, S_2, \dots, S_n 中任两个均不相交, 而它们的并集为 S , 则

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|,$$

这里及以后, 记号 $|X|$ 均表示有限集 X 的元素个数.

然而, 如果 S_1, S_2, \dots, S_n 并非两两不交, 为计算 $|S|$, 则需要稍深入的方法——所谓容斥原理, 这一原理将在第四讲中讨论.

2. 乘法原理 如果做第一件事有 m_1 种方法, 第一件事做完后做第二件事有 m_2 种方法, \dots , 第一, 第二, \dots , 第 $n-1$ 件事做完后做第 n 件事有 m_n 种方法, 则先做第一件事, 再做第二件事, \dots , 最后做第 n 件事就有

$$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$$

种方法.

应用乘法原理的要点是, 将完成一件事的过程分解为若干个步骤, 而每个步骤中的方法数目易于确定.

乘法原理也可用集合的语言表述, 但这一形式稍有些抽象, 并且本书中并不需要, 因此我们不作讨论.

二、几类基本计数问题

这一节我们介绍排列与组合中几类典型的计数问题, 许多计数问题可化归为这些模型之一来处理.

1. 排列

(1) 无重排列 从 n 个不同元素中有序且不重复地选取 k ($1 \leq k \leq n$) 个元素, 称为从 n 个不同元素中取出 k 个元素的一个无重排列, 简称为 k -排列, 所有这样的排列个数记作 P_n^k .

由乘法原理得出

$$P_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

(选第一位元素有 n 种方法, 选定第一位后, 由于元素不允许重复, 选择第二位有 $n-1$ 种方法, \dots , 最后选第 k 位有 $n-k+1$ 种方法.)

特别地, 如果 $r = n$, 就得到 n 个不同元素的全排列公式 (即 n 个不同元素的 n -排列的种数):

二/ 奥数教程·高三年级

$$P_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

为了方便起见,约定 $0! = 1$, 则上面公式可改写成

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(2) 重复排列 从 n 个不同元素中有序且可重复地选取 k ($k \geq 1$) 个元素,称为 n 个不同元素的一个 k -可重排列.

由乘法原理易知, n 个不同元素的 k -可重排列数为 n^k . (选第一位元素有 n 种方法,选定第一位后,第二位仍有 n 种选取方法, ..., 最后,第 k 位也有 n 种选法.)

(3) 有限重复元素的全排列 设 n 个元素可分为 k 个组,同一组中元素彼此相同,不同组间的元素不相同. 设 k 个组的元素个数依次为 n_1, n_2, \dots, n_k ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), 则这 n 个元素的全排列称为有限重复元素的全排列,其排列数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

为了证明,我们设有 n_1 个 x , n_2 个 y , ..., n_k 个 z . 任取一个这种全排列,设想将其中的 n_1 个 x 分别赋以下标 $1, 2, \dots, n_1$, 则这种添下标的方法有 $n_1!$ 种,对其中 n_2 个 y 也赋以下标,则有 $n_2!$ 种方式,如此进行,直到对 n_k 个 z 也赋以下标,则有 $n_k!$ 种方式.

这样,由乘法原理推出,由每个满足要求的排列恰产生 $n_1! n_2! \cdots n_k!$ 个赋下标的排列. 又易知两个不同的满足要求的排列所产生的赋下标的排列之间没有相同的. 反过来,任意一个赋下标的排列都可以这样得到. 因此所求的排列数的 $n_1! n_2! \cdots n_k!$ 倍便是全部赋下标的排列数,而后者恰是 n 个不同元素的全排列数,即 $n!$, 由此得出所说的结果.

注 2 上面的解法,运用了一个非常重要的想法:对应. 但这个对应并非是一一对应(一个符合要求的排列对应一个由 $n_1! n_2! \cdots n_k!$ 个赋下标的排列构成的集合).

对应,是处理计数及其他许多组合问题的重要思想. 请参考下面的问题及第三讲.

注3 如果所有 n_i 都是 1 (从而 $k = n$), 则我们的公式化为 n 个不同元素的全排列公式.

注4 有重复元素的全排列数当然是整数, 因此我们得到一个“副产品”:

(i) 设 n_1, n_2, \dots, n_k 都是正整数, 则

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

是整数.

特别地, 取 $k = 2$, 并改记 $n_1 = m, n_2 = n$, 则由

$$\frac{(m+n)!}{m! n!} = \frac{(m+n) \cdots (n+1)}{m!}$$

是整数, 易于推出:

(ii) 任意的连续 m 个整数的积被 $m!$ 整除.

(ii) 是一个非常基本的结论, 用处很多. 我们顺便提一下, 反复用(ii)也不难导出(i).

(4) 圆周排列 从 n 个不同元素中(无重复地)取出 k ($1 \leq k \leq n$) 个元素排在一个圆周上, 称为 n 个不同元素的一个 k -圆排列. 如果一个 k -圆排列旋转可以得到另一个 k -圆排列, 则认为这两个圆周排列相同.

n 个不同元素的 k -圆排列数为

$$\frac{P_n^k}{k} = \frac{n!}{k \cdot (n-k)!}$$

特别地, 用全部 n 个不同元素作成的圆周排列的总数为 $(n-1)!$

为了证明, 我们注意, 对每一个固定的 k -圆排列, 在任意两个元素之间将圆周剪开, 恰产生 k 个不同的“直线排列”, 即 k -排列; 不同的 k -圆排列产生的 k -排列彼此也必不同. 又易见任一个 k -排列都可以这样得到. 因此 k -圆排列数的 k 倍等于 k -排列的数目, 即 P_n^k , 由此得出结论.

2. 组合

(5) 无重组合 从 n 个不同元素中, 无序且不重复地取 k ($1 \leq k$
四/ 奥数教程·高三年级

$\leq n$) 个元素,称为从 n 个不同元素中取 k 个元素的一个(无重)组合,简称 k -组合. 从 n 个不同元素中取 k 个元素的组合数记为 $\binom{n}{k}$, 则

$$\binom{n}{k} = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

实际上,对每一个固定的 k -组合,将其元素作全排列共产生 $k!$ 个不同的 k -排列. 显然,不同的 k -组合产生的排列互不相同,且每个 k -排列均可以这样得到. 因此 $k! \binom{n}{k} = P_n^k$, 这就是所说的结果.

注 5 由于组合数当然是整数,我们又一次得出了“任意的连续 m 个整数之积被 $m!$ 整除”.

(6) 重复组合 从 n 个不同元素中,无序但可重复地选取 k ($k \geq 1$) 个元素,称为 n 个不同元素的一个 k -可重组组合.

n 个不同元素的 k -可重组组合数为 $\binom{n+k-1}{k}$.

为了证明,不妨设 n 个元素为 $1, 2, \dots, n$. 设选取的 k 个元素为

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k (\leq n),$$

则显然

$$(1 \leq) a_1 + 0 < a_2 + 1 < \dots < a_k + k - 1 (\leq n + k - 1).$$

将 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 与 $\{a_1 + 0, a_2 + 1, \dots, a_k + k - 1\}$ 对应,后者是 $1, 2, \dots, n + k - 1$ 的一个 k -组合.

反过来, $1, 2, \dots, n + k - 1$ 的任一个 k -组合

$$(1 \leq) b_1 < b_2 < \dots < b_k (\leq n + k - 1)$$

也恰对应于 $1, 2, \dots, n$ 的一个 k -可重组组合

$$(1 \leq) b_1 \leq b_2 - 1 \leq \dots \leq b_k - (k - 1) (\leq n).$$

因此,上面说的对应是一一对应,从而所求的 k -可重组组合数等于 $1, 2, \dots, n + k - 1$ 的 k -组合数,即 $\binom{n+k-1}{k}$.

注 6 问题的一种不同解法请看第三讲中例 1 及注 1, 而关于有限重复的组合, 可参考第十四讲中例 5.

练 习 题

A 组

1. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 这六个数字组成三位数, 如果 (i) 三位数中数码不重复出现, (ii) 数码可以重复出现. 问: 可以分别确定多少种不同的三位数?

2. 用 1, 2, 3, \dots , 9 这九个数字可组成多少个数码不重复且 8、9 不相邻的七位数?

3. 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单, 任两个舞蹈节目不相邻, 有多少种排法?

4. 9 个房间, 将其中 2 间刷成白色, 3 间刷成绿色, 4 间刷成黄色, 有多少种方案?

5. 用字母 a, b, c 组成 5 个字母的“单词”, 每个“单词”中 a 至多出现 2 次, b 至多 1 次, c 至多 3 次, 求这种“单词”的个数.

6. n 个男生和 n 个女生围成一圈, 任两个男生不相邻, 任两个女生也不相邻, 有多少种排法?

7. 将 $n+1$ 个不同的球放入 n 个不同的盒子中, 每个盒子都不空, 有多少种放法?

8. 同时掷 k 颗相同的骰子, 可产生多少种不同的结果?

B 组

9. 从 1 到 300 之间任取 3 个不同的数, 使得这 3 个数的和被 3 整除, 问: 共有多少种取法?

10. 平面上给定 5 个点, 已知连接这些点的直线互不平行, 互不垂直, 也不重合. 过每一点向其余四点的连线作垂线, 求这些垂线的交点最多能有多少 (不计已知的 5 点)?

第二讲 二项式系数

组合数 $\binom{n}{k}$ 也称为二项式系数, 是组合数学中的一个重要角色.

本节简单讨论二项式系数的基本性质以及用它们表出的一些恒等式 (经常称为组合恒等式).

一、二项式系数的基本性质

组合数 $\binom{n}{k}$ 具有下面的三重面目:

(1) 组合意义: n 个不同元素的 k -组合的个数.

(2) 显式表示: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(3) 二项展开式的系数, 即有恒等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{或} \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

上面的恒等式称为二项式定理, 因而我们也将 $\binom{n}{k}$ 称为二项式系数.

注 1 通常, $\binom{n}{k}$ 中的 n 和 k 都是正整数, 为了以后的方便, 我们对 $n \geq 0$ 约定 $\binom{n}{0} = 1$ (注意“0 元集”即空集, n 个元素中不取任何元素组合的方式仅一种); 而当 k 为负整数或 $0 \leq n < k$ 时, 约定 $\binom{n}{k} = 0$ (因 n 元集中不能取出 k 个元素). 易见这些约定与上面 (2), (3) 相

一致.

二项式系数最基本的性质是下面的三条:

(4) 对称性:对整数 k 和 $n \geq 0$, 有 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(5) 递推关系:对整数 k 和 $n \geq 1$, 有 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(6) 单峰性:若 n 是正偶数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n};$$

若 n 是正奇数, 则

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

特别地, n 阶二项式系数 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ 中最大数是 $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

(这里及以后 $\lfloor x \rfloor$ 均表示不超过实数 x 的最大整数.)

(6) 的证明留给读者完成. 为了证明(4)和(5), 可设 n, k 都是正整数(其余情形由注 1 中的约定易知结论成立).

(4)和(5)当然极易由 $\binom{n}{k}$ 的显式表示(2)导出来, 这里略去其细节. 下面是基于计数的论证:

设 X 是 n 元集合, 显然, (关于 X 的)互补对应, 是 X 的 k 元子集的集合到 $n-k$ 元子集的集合的一一对应. 因 X 的 k 元子集和 $n-k$ 元子集分别有 $\binom{n}{k}$ 和 $\binom{n}{n-k}$ 个, 由此得出(4).

另一方面, X 的 $\binom{n}{k}$ 个 k 元子集可分为(不相交的)两类, 一类不

含 X 的某个指定的元素 a , 另一类包含 a . 前者共有 $\binom{n-1}{k}$ 个 k 元子集, 后者有 $\binom{n-1}{k}$ 个 k 元子集. 由加法原理 (第一节注 1) 即得 (5).

注 2 像上面这样通过考虑组合意义导出证明的论证, 常称为组合论证. 其基本精神是, 建立两个集合的一一对应, 或用两种不同的方法计数同一个集合, 由此导出所需的等式. 本节还有几个这样的例子.

现在我们谈谈涉及二项式系数和的 n 个基本等式.

$$(7) \quad \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

$$(8) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

$$(9) \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

$$(10) \quad \binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{k-2} + \cdots + \binom{m}{k} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

(7) 的证明 第一种证法基于递推. 反复用递推公式 (5), 我们有

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}, \text{ 以及}$$

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2},$$

$$\binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} = \binom{n+4}{3}, \dots,$$

由此即得出 (7).

更正式的表述是将 (7) 式左边记为 a_k , 则 (对 $k \geq 0$)

$a_{k+1} - a_k = \binom{n+k+1}{k+1}$. 由(5)式及归纳法易导出证明.

第二种方法基于计数: 设 X 是 $n+k+1$ 元集合, 将其 $\binom{n+k+1}{k}$ 个 k 元子集分为(互不相交的) $k+1$ 个类(记 a_1, \dots, a_k 是 X 的指定的 k 个元素): 第一类, 不含 a_1 ; 第二类, 含 a_1 但不含 a_2 ; 第三类, 含 a_1, a_2 但不含 a_3, \dots , 第 $k+1$ 类, 含 a_1, a_2, \dots, a_k . 易见, 第一类, 第二类, \dots , 第 k 类, 第 $k+1$ 类分别有 $\binom{n+k}{k}, \binom{n+k-1}{k-1}, \dots, \binom{n+1}{1}, \binom{n}{0} = 1$ 个 k 元子集, 由加法原理即得(7).

不难看到, 这一论证是(5)的证明的推广.

(8)的证明 第一种方法是利用二项式定理(在(3)的恒等式中取 $x=1$).

第二种方法基于计数 n 元集合 X 的子集个数. 一方面, X 的所有子集, 可分成 n 类: 0 元子集(即空集), 1 元子集, 2 元子集, \dots , n 元子集. 由加法原理知, X 的子集共有 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ 个.

另一方面, X 的每个子集都是从 X 中选取若干个元素组成的. 所以每个子集恰对应这几个元素的一种取舍方式. 由于每个元素都有选与不选两种可能, 因此, 从 X 中选元素组成子集, (由乘法原理)就有 $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ 种方式. 综合两种计数的结果即得(8).

(9)的证明 (9)是二项式定理(取 $x=-1$)的一个直接推论, 这也可以用组合的想法证明. 为此, 我们将(9)改写为

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots.$$

这等价于: n 元集合 X 的具有偶数个元素的子集个数, 等于 X 的具有奇数个元素的子集个数.

现在取定 X 的一个元素 a , 对 X 的任一子集 A , 如 $a \in A$, 将 A

—○/ 奥数教程·高三年级

与 $A \setminus \{a\}$ 对应; 如 $a \notin A$, 将 A 与 $A \cup \{a\}$ 对应. 易见这一对应是 X 的奇数个元素的子集的集合到 X 的偶数个元素的子集的集合的一一对应, 由此导出所说的等式.

(10) 的证明 从 m 个男士与 n 个女士中选取 k 人小组, 这共有 $\binom{m+n}{k}$ 种方式. 另一方面, 这样的 k 人小组可分为 $k+1$ 个类: 第 i 个类由 i 个男士与 $k-i$ 个女士组成 ($i=0, 1, \dots, k$). 显然(由乘法原理)第 i 个类中有 $\binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ 个小组, 因此, k 人小组共有 $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$. 由加法原理便导出了(10).

注3 (7)也可用(2)(与(7)的第一种证法实质相同地)得出证明, 但通过(2)证明(8), (9), (10)则并不容易.

注4 等式(10)通常称为范德蒙(Vandermonde)恒等式, 其另一种证明见第十四讲的例1.

范德蒙恒等式可看作 $\binom{m+n}{k}$ 关于 $\binom{m}{i}$ 和 $\binom{n}{j}$ ($i, j \leq k$) 的展开式, 这与二项式定理有某些类似.

在等式(10)中取一些特殊的 m, n, k 值, 能得出许多有趣的结果. 例如, 令 $m = n = k$ 并利用(4), 我们有

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

二、组合恒等式

组合恒等式是组合数学中的一个重要内容, 其中涉及二项式系数之和的等式最有兴趣. 上一节已介绍了一些这样的基本恒等式, 及几种证明方法(归纳与递推, 应用二项式定理, 组合论证). 这里再举两个通过恒等变形来论证的例子.

最基本的变形是将和式中的单项变形, 使和式化为更易于处理的形式, 这是组合恒等式较为有效的一种证明方法.

下面两个恒等式在恒等变形中用处很多.

$$(11) \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

$$(12) \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}.$$

为证明(11)和(12),二项式系数的显式表示大派用场.由(2)易知(11)成立是显然的,又由

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{m!(k-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!} \\ &= \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}, \end{aligned}$$

就证明了(12). (请注意,在(12)中取 $m=1$ 就得到(11).)

例 1 证明

$$(i) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

(i)的证明:由(11)式, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. 因此

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

(这儿利用了基本等式(8)). 我们看到,(11)的功效在于将求和指标 k “吸收”进二项式系数,从而将和化归为已知的和.

又请注意,上面最后一个和式中的 k 实际上为前面的 $k-1$,从而求和范围由 $1 \leq k \leq n$ 变为 $0 \leq k \leq n-1$. 恒等式的证明中,经常采用这种“换元”但不设新元,而仅改变求和范围的做法.

(ii)的证明:利用 $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$, 以及 $k^2 =$

$k(k-1) + k$ 可将和变形为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + n \cdot 2^{n-1} \text{ (利用(i))} \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} + n \cdot 2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

例 1 也可以用计数的方法证明.

先证明(i), 考虑从 n 个人中选取若干人(人数不限)组成委员会的方法数, 其中每个委员会选出一个主席. 对 $k = 0, 1, \dots, n$, 先选 k 人委员会, 再从中选择主席的方法数为 $\binom{n}{k}k$, 由加法原理可知, 所说的方法数等于(i)的左边的和. 另一方面, 如果我们首先选择主席, 再计算包括该主席的所有委员会的数目, 则所说的方法数是(i)的右端. 综合两方面的结果, 就证明了(i) (参考(8)的组合证明).

如果在上述每个委员会中增选一个秘书(主席与秘书可以由同一人兼任), 则可导出(ii)的一个组合证明. 事实上, 对 $k = 0, 1, \dots, n$, 先选 k 人委员会, 再从中选择主席、秘书的方法数为 $\binom{n}{k} \cdot k^2$, 从而总的方法数是(ii)的左边.

现在先选择主席和秘书. 主席与秘书为同一人的方式有 n 种, 包括该主席的委员会有 2^{n-1} 种选法; 而主席不同于秘书的选法有 $n(n-1)$ 种, 包括这两人的委员会有 2^{n-2} 种选法. 因此, 总的选法数是 $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = (n+1)2^{n-2}$. 综合两方面的结果, 即得出(ii).

例 2 证明
$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}.$$

证明 这易于由(12)推出来. 我们有