奥摇摇数

八年级 （初二）

摇摇摇摇摇主摇编摇魏有德
副主编摇赵颖钧摇王美明
张建鹏摇唐德全

参加编写老师
摇摇张德跃摇李晓玉摇杨周明摇程易明
兰摇昆摇谢党恩摇李摇勇摇孙远林
郑树全摇李壁强摇章摇伟摇何文锋
张志明摇师公强摇杨摇兵摇肖成勋

四川大学出版社

目摇摇录

第一部分

第二部分

第三部分

第一部分

第一讲摇含字母系数的一次方程组

附:含绝对值的一次方程组的解法

一、知识要点

员援关于未知数 曾赠的二元一次方程组

关于未知数 曾赠的二元一次方程组可以通过整理化简为（同解的）一般形式：

摇摇（*）蒺员曾垣遭员赠越糟员　①

蒺圆曾垣遭圆赠越糟圆　②

其中，蒺员，蒺圆，遭员，遭圆，糟员，糟圆为常数或字母系数（又叫做参数）郾

用加减消元法解方程组（*）：

摇① 伊遭圆 原② 伊遭员 得摇（蒺员遭圆 原蒺圆遭员）曾越糟员遭圆 原糟圆遭员　③

或② 伊蒺员 原① 伊蒺圆 得摇（蒺员遭圆 原蒺圆遭员）赠越蒺员糟圆 原蒺圆糟员　④

由于③或④都是含字母系数的一元一次方程，因此，有（如《奥数》七年级册第五讲含字母系数的一元一次方程的讨论）：

（员）当 蒺员遭圆 原蒺圆遭员≠园即$\frac{蒺员}{蒺圆}\neq\frac{遭员}{遭圆}$（即 曾赠的系数不成比例）时，方程组（*）有唯一的一组解（由③和④得）：

曾越$\frac{遭_{贠}糟_{圆}原遭_{圆}糟_{贠}}{葬_{贠}遭_{圆}原葬_{圆}遭_{贠}}$,摇赠越$\frac{葬_{贠}糟_{圆}原葬_{圆}糟_{贠}}{葬_{贠}遭_{圆}原葬_{圆}遭_{贠}}$;

(圆)当 葬$_{贠}$遭$_{圆}$原葬$_{圆}$遭$_{贠}$越园,而 遭$_{圆}$糟$_{贠}$原遭$_{贠}$糟$_{圆}$≠园(或 葬$_{贠}$糟$_{圆}$原葬$_{圆}$糟$_{贠}$≠园),即$\frac{葬_{贠}}{葬_{圆}}$越$\frac{遭_{贠}}{遭_{圆}}$≠$\frac{糟_{贠}}{糟_{圆}}$时,(③或④无解,因而)方程组(*)无解;

(猿)当 葬$_{贠}$遭$_{圆}$原葬$_{圆}$遭$_{贠}$越园,且 遭$_{圆}$糟$_{贠}$原遭$_{贠}$糟$_{圆}$越园(或 葬$_{贠}$糟$_{圆}$原葬$_{圆}$糟$_{贠}$越园),即$\frac{葬_{贠}}{葬_{圆}}$越$\frac{遭_{贠}}{遭_{圆}}$越$\frac{糟_{贠}}{糟_{圆}}$时,方程组(*)有无穷多组解援

这是因为,当$\frac{葬_{贠}}{葬_{圆}}$越$\frac{遭_{贠}}{遭_{圆}}$越$\frac{糟_{贠}}{糟_{圆}}$时,若设其比值为 噪则有 葬$_{贠}$越噪葬$_{圆}$,遭$_{贠}$越噪遭$_{圆}$,糟$_{贠}$越噪糟$_{圆}$,代入①式,约去 噪就得 葬$_{圆}$曾垣遭$_{圆}$赠越糟$_{圆}$,与②式完全一样,因此方程组(*)就同解于方程②,即同解于(一个)二元一次方程②,显然有无穷多组解援

类似地,对含字母系数的三元(或更多元)一次方程组有类似的讨论援

圆援含绝对值的一次方程组

解含绝对值的一次方程组的基本方法是用“零点分段法”化为同解的不含绝对值的一次方程组援

二、典型例解

员援解的讨论

【例 员】摇葬、遭为何值时,关于 曾、赠的方程组$\begin{cases}猿曾原(葬原员)赠越员园 \\ 怨曾垣(葬垣员)赠越遭\end{cases}$有:

(员)有唯一的一组解援(圆)无解援(猿)有无穷多组解援

【解】摇(员)当$\frac{猿}{怨}$≠$\frac{原(葬原员)}{葬垣员}$,即 葬≠ 原员园时,方程组有唯一的一

组解：摇曾越$\frac{远圆葬垣猿原遭}{猿葬垣猿远}$，摇赠越$\frac{猿遭原远愿}{猿葬垣猿远}$援

注：由$\frac{猿}{怨}$越$\frac{原原}{葬}$解得 葬越原远圆，所以$\frac{猿}{怨}\neq\frac{原原}{葬}$，即 葬≠原远圆援

（圆）当$\frac{猿}{怨}$越$\frac{原原}{葬}\neq\frac{远圆}{遭}$，即 葬越原远圆，遭≠猿远时，方程组无解援

注：由$\frac{原原}{葬}$越$\frac{远圆}{遭}$，即$\frac{原原}{原远圆}$越$\frac{远圆}{遭}$解得 遭越猿远，所以$\frac{原原}{原远圆}\neq\frac{远圆}{遭}$就是遭≠猿远郾

（猿）当$\frac{猿}{怨}$越$\frac{原原}{葬}$越$\frac{远圆}{遭}$，即 葬越原远圆，遭越猿远时，方程组有无穷多组解满足 猿曾原原赠越远圆 的所有（无穷多）数组（$曾_{燥}$，$赠_{燥}$）援

【例圆】摇解关于 曾赠扎 的方程组

$$
摇摇\begin{cases}
源曾原缘赠垣皂扎越猿 & ①\\
苑曾原远赠垣灶扎越猿 & ②\\
曾垣赠垣责扎越猿 & ③
\end{cases}
$$

【分析】摇先用消元法化成“含参数的二元一次方程组”，再进行讨论、求解援

【解】摇消去 曾可得关于 赠扎 的“含参数的二元一次方程组”：

$$
\begin{matrix}③×源原①得\\ ③×苑原②得\end{matrix}\ 摇摇\begin{cases}
怨赠垣（源责原皂）扎越怨 & ④\\
远赠垣（苑责原灶）扎越远愿 & ⑤
\end{cases}
$$

再消去 赠：④×圆原⑤得摇（责垣灶原圆皂）扎越园援　⑥

当 责垣灶原圆皂≠园时，⑥有唯一的解 扎越园，因而，原方程组有唯一的一组解：扎越园，赠越员（扎越园代入④得），曾越圆（将 赠越员，扎越园代入③得）援

当 责垣灶原圆皂越园时，⑥有无穷多个解郾又①、②式中 曾赠的系数不成比例，因而对每一个 扎值，都可由①、②联立解出 曾赠则原

方程组有无穷多组解 鄖

摇摇圆援求参数的值

【例猿】摇(员) 关于曾赠的方程组$\begin{cases}\text{猿曾垣源赠越猿猿}\\ \text{圆皂曾垣猿赠越圆}\end{cases}$的解曾赠的和等于员,则皂的值是摇摇摇援

(圆园园源·“希望杯”竞赛题)

(圆) 已知关于曾赠的方程组$\begin{cases}\text{猿曾原缘赠越圆皂}\\ \text{圆曾垣苑赠越皂原员愿}\end{cases}$的解中曾赠互为相反数,求皂的值,并求出它的解援

【解】摇(员) 由方程组解得曾越$\dfrac{\text{员}}{\text{怨原愿皂}}$,摇赠越$\dfrac{\text{远(员原皂)}}{\text{怨原愿皂}}$援

因摇$\dfrac{\text{员}}{\text{怨原愿皂}}$垣$\dfrac{\text{远(员原皂)}}{\text{怨原愿皂}}$越员,

则摇摇摇员垣远(员原皂) 越怨原愿皂援

解得摇摇皂越员源援(注:参见第九讲)

(圆) 将已知条件“曾赠互为相反数”即赠越原曾代入原方程组得

摇摇$\begin{cases}\text{猿曾垣缘曾越圆皂}\\ \text{圆曾原苑曾越皂原员愿}\end{cases}$摇即 $\begin{cases}\text{愿曾原圆皂越园}\\ \text{缘曾垣皂越员愿}\end{cases}$

解此关于曾皂的方程组得摇皂越愿,摇曾越圆援

从而可得摇赠越原圆(将皂越愿,曾越圆代入原方程得) 援

故原方程组的解中曾赠互为相反数时,皂越愿,并且原方程的解为曾越圆,赠越原圆援

【例源】摇已知皂是整数,(关于曾赠的) 方程

摇摇$\begin{cases}\text{源曾原猿赠越远} & ①\\ \text{远曾垣皂赠越圆远} & ②\end{cases}$

有整数解,求皂的值援 (第八届“华罗庚杯”竞赛题)

【分析】摇这里的含参数的一次方程除了要求有解外,还附加了两个条件:参数皂为整数,解也要为整数援因此,在讨论时,除

了要求参数 皂要保证方程组有解外,还要充分利用这两个 (已知的) 限制条件进行讨论援

【解】摇由② 伊圆原① 伊猿得摇 (圆皂垣怨 赠越猿缘援　③

因为 皂为整数,所以 (圆皂垣怨 为奇数 (显然也满足③,亦即方程组有解的条件 圆皂垣怨≠园援 ,要③有整数解 赠只有 圆皂垣怨越依员或 依猿缘,则 皂只可能取为 原源 原缘 源 原猿援

当 皂越原源时,由③知 赠越猿缘 从而代入①得 曾越原猿猿因此,方程组有整数解 (曾赠 越(原猿猿 猿缘 ;

同理,当 皂越原缘时,方程组有整数解 (曾赠 越(原园源 原猿缘 ;

当 皂越源时,方程组有整数解 (曾赠 越(猿 园 ;

当 皂越原猿时,方程组有整数解 (曾赠 越(园 原园 援

故所求的 皂值为 原源 原缘 源 原猿援

【例 缘 摇兄弟两人同时解关于 曾赠的方程组 $\begin{cases}\text{葬曾垣遭赠越圆}\\\text{糟曾原苑赠越怨援}\end{cases}$

哥哥正确解出 $\begin{cases}\text{曾越猿}\\\text{赠越原圆}\end{cases}$,弟弟因把 糟抄错了,解得 $\begin{cases}\text{曾越原圆}\\\text{赠越圆}\end{cases}$ 援求 葬遭糟的值援

【解】摇由于 曾越猿 赠越原圆是一组正确的解,则代入原方程组后有

摇摇 $\begin{cases}\text{猿葬原圆遭越圆} & ①\\\text{猿糟垣员源越怨援} & ②\end{cases}$

则由②可解得 糟越原圆援

又弟弟把 糟抄错了得的解为 曾越原圆 赠越圆但原方程组中的第一个方程不含 糟因此可将 曾越原圆 赠越圆代入其中得

摇摇 原圆葬垣圆遭越圆援　③

联立①、③两式可解得 葬越源 遭越缘援

故摇摇摇葬越源 遭越缘 糟越原圆援

猿援应用举例

【例远】摇若 源曾原猿赠原远扎越园，曾垣圆赠原苑扎越园（曾赠扎≠园），则代数式 $\frac{缘曾^{圆}垣圆赠^{圆}原扎^{圆}}{圆曾^{圆}原猿赠^{圆}原员园扎^{圆}}$ 的值等于（摇摇）援

（粤）$\frac{员}{圆}$摇摇摇（月）原$\frac{员怨}{圆}$摇摇摇（悦）原员缘摇摇摇（阅）原员猿

（圆园员猿·全国初中竞赛题）

【分析】摇由于所求的代数式中，分子、分母的各项都是二次式，若将已知的两个等式中的某一个字母（如，字母扎）看作“参数”，就可解出另两个“未知数”曾，赠的（关于扎的）一次式解形式，代入后（分子、分母）约去扎就可得出所求的值援

【解】摇由已知两等式有

摇摇源曾原猿赠越远扎，摇曾垣圆赠越苑扎援

联立上两式，求解得摇曾越猿扎，赠越圆扎（扎为“参数”）援

故摇摇摇原式越 $\frac{缘(猿扎)^{圆}垣圆(圆扎)^{圆}原扎^{圆}}{圆(猿扎)^{圆}原猿(圆扎)^{圆}原员园扎^{圆}}$

越 $\frac{源缘扎^{圆}垣愿扎^{圆}原扎^{圆}}{员愿扎^{圆}原员圆扎^{圆}原员园扎^{圆}}$ 越 $\frac{缘圆扎^{圆}}{原源扎^{圆}}$ 越原员猿援

【评注】摇也可把曾或赠看作“参数”求解援

【例苑】摇甲、乙两人到特价商店购买商品援已知两人购买商品的件数相同，且每件商品的单价只有愿元和怨元两种援若两人购买商品一共花费了员苑圆元，则其中单价为怨元的商品有摇摇摇件援

（圆园员员·全国初中联赛题）

【分析】摇此题涉及三个不知的量（件数：即每人购买的件数和单价为愿元、怨元的两个商品件数），但是只有两个等量关系（总件数关系和总价格关系），不可能直接解出这三个“件数”量，所以需把其中一个（件数）量当作“参数”来处理，解出其中的两个“件数”，再根据隐含条件“件数是正整数”求得范围和解援

【解】摇设每人都购买了 灶件商品，其中单价为 愿元的有 曾件，单价为 怨元的有 赠件（灶、曾、赠都为正整数），则根据题意可列方程组

摇摇{曾垣赠越灶 ／ 愿曾垣怨赠越远灶援

若视 灶为参数，则可解得摇{曾越苑灶原员愿园 ／ 赠越员愿园原远灶援

由于 灶、曾、赠均为正整数，所以，由 曾跃园知，灶跃 员愿园；由 赠跃园知，灶约 员愿园援所以 灶越源缘援

因此，单价为 怨元的商品有 赠越员愿园原远×源缘越员园（件）援

【评注】摇这类问题（三个未知数，两个方程）通常叫做不定方程组（详见第二十四讲），若对未知数无其他限制条件，一般是有无穷多组解援在有条件限制时，如上，就需讨论求解援

习题员

摇摇【巩固练习】

员援 为何值时，关于 曾、赠的方程{λ曾原赠垣圆越园 ／ 曾原λ赠垣圆λ原园越园有：

（员）有唯一解？（圆）无解？

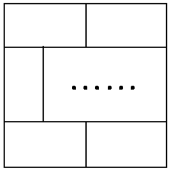
圆援（员）方程组{曾原赠越圆 ／ 皂曾垣赠越远的解 曾跃园，赠跃园，则 皂的取值范围为

摇摇摇摇援　　　　（圆园园远· 四川竞赛题）

(圆 在关于 鲁贝,鲁圆,鲁猿 的方程组 { 鲁贝 垣鲁圆 越葬贝 ; 鲁圆 垣鲁猿 越葬圆 ; 鲁猿 垣鲁贝 越葬猿 } 中,已知 葬贝 跃葬圆 跃葬猿,那么将 鲁贝,鲁圆,鲁猿 从大到小排列应该是摇摇摇援

(圆园园源· 杭州中考题)

猿援如右图,若将正方形分成 噪个完全相同的矩形(长方形),其中上、下各横排两个,中间竖排若干个,则 噪的值为(摇摇)援



(粤) 远　　　(月) 愿

(悦) 员园　　(阅) 员圆

(圆园园远· 全国初中竞赛题)

源援(员) 若 { 猿葬原源遭原缘糟越园 ; 葬原遭原糟越园 } ,则 (葬圆 垣遭圆 原糟圆)/(葬遭) 越摇摇摇援

(圆园园源· 全国我爱数学初中生夏令营)

(圆) 已知 (葬垣遭)/圆 越 (遭原糟)/猿 越 (糟垣葬)/源,则 (缘葬垣猿遭原苑糟)/(愿葬垣圆遭) 越摇摇摇援

(圆园园圆· “五羊杯”竞赛题)

缘援(员) 皂为正整数,已知二元一次方程组 { 皂曾垣圆赠越员园 ; 猿曾原圆赠越园 } 有整数解,即 曾,赠均为整数,则 皂圆 越摇摇摇援

(圆园园员· “希望杯”竞赛题)

(圆) 方程 (渣曾原猿渣原渣曾垣员渣)/(圆渣曾垣员渣) 越员的解是 曾越摇摇摇或摇摇摇援

(圆园园远· “希望杯”竞赛题)

摇摇【提高练习】

远援将 圆园园远写成若干个质数的乘积,如果 葬,遭,糟是这些质数中

的三个，且 葬约遭约糟那么，关于 曾赠的方程组 $\begin{cases}\text{遭曾原葬赠越员}\\ \text{葬曾原糟赠越原远缘}\end{cases}$ 的解

曾越摇摇摇，赠越摇摇摇援　　　　(圆园园源· “希望杯”竞赛题)

苑援某果品商店进行组合销售，甲种搭配：圆千克 粤水果，源千克 月水果；乙种搭配：猿千克 粤水果，愿千克 月水果，员千克 悦水果；丙种搭配：圆千克 粤水果，远千克 月水果，员千克 悦水果援已知 粤水果每千克 圆元，月水果每千克 园援愿元，悦水果每千克 园援远元援某天该商店销售这三种搭配的水果共得 源源员援圆元，其中 粤水果的销售额为 员远远元，则 悦水果的销售额为摇摇摇元援

(圆园园圆· 全国初中联赛题)

愿援有三种物品，每件的价格分别是 圆元、源元和 远元援现在用 远园元买这三种物品，总数共买 员远件，而钱要恰好用完，则价格为 远元的物品最多买几件？价格为 圆元的物品最少买几件？

(圆园园圆· 河南竞赛题)

怨援(员) 有一满池水，池底有泉总能均匀地向外涌流援已知用 圆源部 粤型抽水机 远天可抽干池水；若用 圆员部 粤型抽水机 愿天可抽干池水援设每部抽水机单位时间的抽水量相同，要使这一池水永远抽不干，至多只能用多少部 粤型抽水机抽水？

(圆) 父亲和儿子在 员园园米的跑道上赛跑，已知儿子跑 缘步的时间父亲能跑 远步，儿子跑 苑步的距离与父亲跑 源步的距离相等援现在儿子站在 员园园米中点处，父亲站在 员园园米跑道的起点处同时开始跑援问：父亲能否在 员园园米的终点处超过儿子？(编者注：父子每步长各一样)　　　　(圆园园员· 重庆竞赛题)

摇摇【创新应用】

员园援解下列方程组：

(员) 设 葬遭糟都不为 园且 遭葬垣匀遭垣糟≠ 园解方程组：曾/葬 越 赠/遭 越 扎/糟，遭曾垣匀赠垣糟扎越猿援

(圆) 解方程组：

曾员 垣曾圆 越曾圆 垣曾猿 越曾猿 垣曾源 越…
摇摇摇 越曾怨怨苑 垣曾怨怨愿 越曾怨怨愿 垣曾怨怨怨 越员
曾员 垣曾圆 垣曾猿 垣… 垣曾怨怨愿 垣曾怨怨怨 越员怨怨怨援

(第七届“华罗庚杯”竞赛题)

员园援(员) 解方程组 { 澡曾垣员遭越曾 垣 澡赠原员遭越 员缘 ; 澡曾垣员遭越 原 澡赠原原员遭援 }

(圆) [葬] 表示不大于 葬的最大整数，设 曾赠满足方程组：

摇摇摇摇 { 圆[曾] 原赠越原圆 ; 猿[曾原圆] 垣赠越原远 } 摇求 [曾垣赠] 的值援

附：含绝对值的一次方程组的解法

【例 愿】摇解方程组 { 渣赠原员渣越曾垣员 ; 曾原猿渣赠渣越原缘援 }

【解】摇用“零点分段法”去绝对值符号援

当 赠≥原员时，原方程组化为

摇摇 { 赠原员越曾垣员 ; 曾原猿赠越缘， } 摇摇解得摇曾越原 员/圆，摇赠越原 员/圆援

因 原 员/圆 跃原员，所以原方程组有此组解 曾越原 员/圆，摇赠越原 员/圆；

当 赠约原员时，原方程组化为

摇摇$\begin{cases}\text{曾耳贡越园} \\ \text{曾原猿赠越员,}\end{cases}$摇摇解得 曾越原员,摇赠越原$\frac{\text{圆}}{\text{猿}}$援

由于 赠越原$\frac{\text{圆}}{\text{猿}}\neq$ 原员,所以原方程组此时无解；

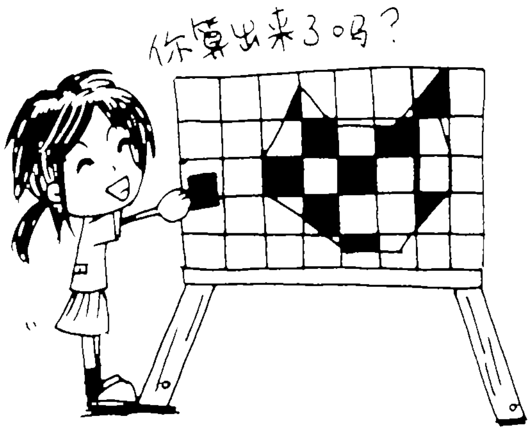
当 赠约原员时，原方程组化为

摇摇$\begin{cases}\text{原赠原员越曾耳员,} \\ \text{曾原猿赠越员,}\end{cases}$摇摇解得 曾越原$\frac{\text{缘}}{\text{源}}$,摇赠越原$\frac{\text{猿}}{\text{源}}$援

由于 原$\frac{\text{猿}}{\text{源}}$跃原员,所以原方程此时无解援

综上知，原方程组的解为 曾越原$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$,摇赠越原$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$援

【评注】摇含绝对值方程组的基本解法是用“零点分段法”去掉绝对值来分段求解援



第二讲摇一次方程组的应用问题

一、知识要点

与列一元一次方程解应用问题一样,列一次方程组解应用问题的关键仍是恰当的设未知数和寻求等量关系,只不过这里的未知数和等量关系都是多个(一般是几个未知数就要有几个等量关系摇参数不当作未知数)援

为寻求等量关系,有时还要通过画出题中的数量关系的示意图(表)来增强问题的直观性和条理性,以便更好发现它援

设未知数的方法通常有直接法和间接法,有时甚至要引入“参数”(参见例源)援

二、典型例解

员援直接法例解

【例员】摇慧秀中学在防“非典”知识竞赛中,评出一等奖源人,二等奖远人,三等奖圆园人,学校决定给所有获奖学生各发一份奖品,同一等级的奖品相同援若一等奖、二等奖、三等奖的奖品分别是喷壶、口罩和温度计,购买这三种奖品共计花费员员猿元,其中购买

喷壶的总钱数比购买口罩的总钱数多 怨元，而口罩的单价比温度计的单价多 圆元，求喷壶、口罩、温度计的单价各是多少元？

（圆园园远· 哈尔滨中考题）

【分析】摇如果我们直接设三个所求的量为未知数，则可根据题中的等量关系：①喷壶的总钱数 垣口罩的总钱数 垣温度计的总钱数 越远远远（元）；②喷壶的总钱数 原口罩的总钱数 越怨（元）；③口罩的单价 原温度计的单价 越圆（元），列出方程组求解援

【解】摇设喷壶、口罩、温度计的单价分别为 曾元、赠元、扎元，则由题中告诉我们的三个等量关系列方程组

摇摇 源曾垣远赠垣远扎越远远远；源曾原远赠越怨；赠原扎越圆　摇摇摇摇解得 曾越怨；赠越源援缘；扎越圆援缘

故喷壶、口罩、温度计的单价分别为 怨元、源援缘元、圆援缘元援

【评注】摇通常可利用简单的等量关系来减少未知数个数和方程个数援本题可利用等量关系③即“口罩的单价比温度计的单价多 圆元”来减少一个未知数和一个方程援

设喷壶、口罩的单价分别为 曾元、赠元，则温度计的单价为（赠原圆）元援因而，依题意可列方程组

摇摇 源曾垣远赠垣远（赠原圆）越远远远；源曾原远赠越怨　摇摇摇解得 曾越怨；赠越源援缘援

故喷壶、口罩的单价分别为 怨元、源援缘元，温度计的单价为

摇摇赠原圆越源援缘原圆越圆援缘（元）援

圆援间接法例解

【例 圆】摇小王的学校举行了一次年级考试，考了若干门课程后，又加试了一门，小王考得 怨愿分，这时小王的平均成绩比最初的平均成绩提高了 员分援后来又加试了一门，小王考得 苑园分，这时小王的平均成绩比最初的平均成绩下降了 员分，则小王共考了（含