前摇言

数学是古老而又年轻、庞大而又单一的科学，应用极为广泛，几乎所有的科学都因应用了数学得到极大的发展援数学是圆员世纪中小学生面前的一座高山援山上云雾缭绕，山上风景万千援爬山是艰苦的，但登山是一件乐事援

数学竞赛源远流长，可以追溯到员远世纪三次方程的求解“擂台赛”援现代数学竞赛，可以追踪到员愿怨源年匈牙利中学数学竞赛援中国现代数学竞赛活动源于员怨缘远年京、津、沪、汉四城市的高中数学竞赛，复兴于员怨苑愿年的全国和京、沪、津、陕、皖、川、辽、粤八省市中学数学竞赛援员怨缘怨年起举办的历届国际数学奥林匹克（陨酝韵），规模宏大，影响深远援

数学竞赛帮助广大学生激发学习兴趣，启迪思维，培养能力，提高知识水平援竞赛试题和解答展现出一幅比数学教科书更绚丽多姿的画卷，其璀灿鲜艳的花朵，琳琅满目的果实，其气象万千的景致，峰回路转的情调，使人目不暇接，流连忘返援

本卷的题解、分析、讨论和点评，给出对问题的深入思考和细致评述，让我们理解问题的实质和变化、源由和关系援粤、月、悦三类问题，适合各种需要援内容既依据新教学大纲、数学竞赛大纲，又适当超前、综合和提高援既按照代数、几何、初等数论、组合数学和图论等数学分支分开专题，又别出心裁从数学问题求解方法入手，精选若干专题，混合编排，照顾不同的需求——“源于课本，高于课本”，使多数参加课外活动的学生可用、合用、易用、乐用援

本卷由华南师范大学数学系硕士生导师、《中学数学研究》月刊副主编吴康副教授任主编，佛山科技学院教务处处长王向东教授任副主编援参加编写的有吴康，王向东，广西科学院副院长、广西计算机学会理事长罗海鹏研究员，广西大学梧州分校科研处处长、圆园园员年广西壮族自治区科学技术进步奖一等奖荣获者苏文龙研究员，桂林中学高级教

师、原数学科组长黄文斐，汕头大学理学院原副院长、原国家教委考试中心命题组成员、曾员苑次参加全国高考命题和研究生入学考试命题的钱昌本副教授，澳门培正中学校长李祥立硕士，全国初等数学研究工作协调组成员、《不等式研究通讯》主编、福州二十四中副校长杨学枝高级教师，广州执信中学高级教师、原数学科组长凌锦华副教授，茂名一中特级教师、原数学科组长黎建明，湛江教育学院数学系主任林观尚讲师，深圳高级中学特级教师、深圳市中学学科带头人冯跃峰，上海二中特级教师杨德胜，广东阳春一中校长、高级教师梁晓硕士，阳春市广播电视大学校长彭山高级讲师，广州市二中高级教师、数学科组长曹亮敏，华南师大附中高级教师、广东奥林匹克学校高中数学教练组组长李兴怀，广州市教研室教研员许世红硕士，广东连州中学副校长李科明，佛山市石湾区教研室教研员郑俊盛高级教师，湛江一中高级教师陈光捷，广东吴川一中数学科组长林观有，河源职业技术学院讲师邱建霞，华南师大课程与教学论专业竞赛数学方向硕士研究生杨萍援其中，吴康、王向东、黄文斐、钱昌本、冯跃峰、李兴怀是中国数学奥林匹克高级教练员，吴康、李兴怀曾出任中国数学奥林匹克集训队教练，李祥立曾出任猿员~猿愿届陨酝韵裁判团成员和澳门队领队，吴康曾出任澳门队教练，他们指导过员怨愿远~圆园园圆历年国际数学奥林匹克中国金牌选手中的滕峻、刘雄、何宏宇、陈□、汪建华、袁汉辉、刘炀、彭建波、韩嘉睿、李鑫、朱琪慧等员远名，以及银牌、铜牌选手荆秦、潘子刚、林强、韦国恒、王健梅、查宇涵、邹钢、颜华菲、何建勋等十多名援

本书编写得到单■博士、周春荔教授、曹汝成副教授、杨光特级教师等的热情关怀和精神上的鼓舞，作者谨向他们致以衷心的感谢，也谨向编写过程中使用的众多参考文献的作者致谢，限于水平，疏漏之处敬请读者批评指正援

编者

目摇录

第Ⅰ部分摇例题精析及训练

第Ⅱ部分摇数学竞赛套题

第五章摇国内套题

• 第Ⅰ部分摇例题精析及训练

第一章摇代数

异冤郾集合与简易逻辑

A 类题

A1.（灵怨远年全国高中数学联赛题）集合｛曾渣原员≤ 遭课$_{曾}^{员}$ 灵远约原$\frac{员}{圆}$，曾∈ 晕｝的真子集的个数是______援

分析：由不等式 原员≤ 遭课$_{曾}^{员}$ 灵远约原$\frac{员}{圆}$的解集及条件 曾∈ 晕可确定出集合 杂越｛曾渣原员≤ 遭课$_{曾}^{员}$ 灵远约原$\frac{员}{圆}$，曾∈ 晕｝的元素个数援由集合 杂的元素个数即可求出集合 杂的真子集个数援

解：利用换底公式将不等式 原员≤ 遭课$_{曾}^{员}$ 灵远约原$\frac{员}{圆}$变形，得 原员≤ $\frac{员}{遭课\frac{员}{曾}}$ 约原$\frac{员}{圆}$，

即 员≤ 遭课曾约圆援由此得 灵园≤ 曾约灵园园援因为 曾∈ 晕，所以，曾越灵园，灵员，灵圆，…，怨怨援集合 杂共有 怨园个元素，它的真子集个数为

悦圆愿 垣悦圆 垣悦圆 垣… 垣悦圆 越圆 原员郾

点评 摇一般地，当一个集合 粤有 灶个元素时，它的子集个数为 圆灶，真子集个数为 圆灶原员援这个结论在解题时可直接引用援

A2.（第四十三届美国中学数学竞赛题）设 杂为集合 员，圆，猿，…，缘园 的具有下列性质的子集 杂中任意两个不同元素之和不被 苑整除援那么 杂中元素最多可能有多少个？

分析 摇对于两个不同的自然数 葬与 遭如果要求（葬垣遭）不被 苑整除，就是要求它们的和被 苑除所得的余数不为 园援我们把集合 员，圆，…，缘园 按照其中元素被 苑除所得的余数相同与否进行归类，余数相同的组成一个集合，这样得到 苑个子集，然后从这 苑个子集中适当抽取满足题意的元素组成集合 杂援

解 摇将集合 粤越 员，圆，…，缘园 划分为 苑个子集 ：粤园，粤员，粤圆，…，粤远，其中 粤蚤中的每个元素除以 苑后余数为 蚤（蚤越园，员，圆，…，远），即

粤园越 苑，员源，圆员，圆愿，猿缘，源圆，源怨 ，

粤员越 员，愿，员缘，圆圆，圆怨，猿远，源猿，缘园 ，

粤圆越 圆，怨，员远，圆猿，猿园，猿苑，源源 ，

粤猿越 猿，员园，员苑，圆源，猿员，猿愿，源缘 ，

粤源越 源，员员，员愿，圆缘，猿圆，猿怨，源远 ，

粤缘越 缘，员圆，员怨，圆远，猿猿，源园，源苑 ，

粤远越 远，员猿，圆园，圆苑，猿源，源员，源愿 援

杂最多包含 粤园的一个元素援但是，若 杂包含其他任何一个子集的一个元素时，则它必可以包含这个子集的全部元素援因为 粤员包含 愿个元素，其他每个子集包含 苑个元素，且 杂不能同时包含 粤员与 粤远的元素，或者 粤圆与 粤缘的元素，或者 粤猿与 粤源的元素援故最大子集 杂包含 员垣愿垣苑垣苑越圆猿个元素援

A3.（员怨怨远年上海高中数学竞赛题）设 杂越 员，圆，猿，源 ，灶个数依次排成一列 葬员，葬圆，…，葬灶，且具有下列性质 对于 杂的任一非空子集 月，在该数列中有相邻的 月 项恰好组成集合 月援求 灶的最小值援

分析 摇因为含 杂中的一个固定元素的二元子集有 猿个，所以 杂中的任一元素在数列中至少出现两次，由此估算 灶的最小值为 愿援

解 摇杂中的每个数在数列 葬员，葬圆，…，葬灶 中至少出现 圆次援这是因为，若 杂中某个数在这个数列中只出现 员次，则由于含此数的 杂的二元子集共有 猿个，但在数列中含此数的相邻两项至多只有两种取法，因而 猿个含这个数的二元子集不可能都在数列相邻两项中出现援

由此 灶≥愿援

另一方面,愿项数列 猿员圆猿源员圆源满足条件摇故 灶的最小值为 愿援

点评 :只证明 灶≥愿时,还不能说明 灶的最小值为 愿摇接下来的构造说明 灶能取 愿援

A4. (员怨怨缘年美国数学奥林匹克竞赛题)对任意非空实数集 杂令 σ(杂)为 杂的全部元素之和摇已知由 灶个正整数组成的集 粤考虑 杂跑遍 粤的非空子集时,所有不同的和 σ(杂)组成的集摇求证这些和可以分为 灶类,每一类中最大的和与最小的和的比不超过 圆援

分析 :如果找出了一种分类方法,就得到了本题的解援

证明 :设 粤越{葬员,葬圆,…,葬灶},葬员约葬圆约…约葬灶摇令 枣造越葬员垣葬圆垣…垣葬造,藻造越皂葬曾{葬造,枣造原员},则 枣造越枣造原员垣葬造≤圆藻造(员≤造≤灶),定义 枣园越园援

显然和 葬员垣葬圆垣…垣葬皂(蚤员约蚤圆约…约蚤皂)必在某个区间(枣造原员,枣造]中摇因为

葬员垣葬圆垣…垣葬皂跃枣造原员越葬员垣葬圆垣…葬造原员,

所以 蚤皂≥造摇从而

葬员垣葬圆垣…垣葬皂跃藻造援

于是摇葬员垣葬圆垣…垣葬皂∈[藻造,枣造]援

这样 σ(杂)被分为 灶类,在 藻造与 枣造之间的和组成第 造类(员≤造≤灶)摇枣造本身在第 造类,而 藻造越枣造原员时,藻造不在第 造类;藻造跃枣造原员时,藻造在第 造类摇每一类中最大的和与最小的和的比不超过 圆援

A5. (第三十六届 陨酝韵预选题)在表示整数集,酝员越{赠圆垣粤赠垣月渊赠∈在},酝圆越{圆赠圆垣圆赠垣悦渊赠∈在}摇求证:对于任意整数 粤与 月,总能找到整数 悦,使 酝员∩酝圆越∅援

分析 :找到适当的模是关键摇利用同余关系进行分类援

证明 :圆赠圆垣圆赠垣悦≡悦(皂燥凿源)援

若 粤为奇数,则

赠圆垣粤赠垣月≡赠圆垣月≡园(皂燥凿圆)援

即摇赠圆垣粤赠垣月(皂燥凿源)仅有两类:一类为 圆一类为 园援

若 粤为偶数,赠为偶数时,则

赠圆垣粤赠垣月≡园(皂燥凿源)援

赠为奇数时,则

赠圆垣粤赠垣月≡员垣粤(皂燥凿源)援

即摇赠^{圆}垣粤赠圆月（皂燥凿 源）仍仅有两类援

因此，可取 悦不属于以上两类（皂燥凿 源），此时 酝$_{员}$ ∩ 酝$_{圆}$ 越 ∅ 援

点评 所有整数被 源除的余数有四种情形，按余数将所有整数归为四类援本题证明中，模 源的选取是关键，整数 悦存在且有无限多个援

A6.（员怨怨缘年全国高中数学联赛题）设 酝越{员，圆，…，员怨怨缘}，粤⊆酝，且当 曾∈粤时 员缘曾∉粤，求 灶（粤）的最大值援

分析 因为$\left[\frac{员怨怨缘}{员缘}\right]$越员猿猿，所以当 噪越怨，员园，员员，…，员猿猿时，噪与 员缘噪不能同时在 粤中，灶（粤）≤员怨怨缘原（员猿猿原愿）越员愿苑园，再构造一个 粤使 灶（粤）越员愿苑园即可援

解 由题设，当 噪越怨，员园，…，员猿猿时，噪与 员缘噪不能同时在 粤中，故至少有

员猿猿原愿越员圆缘

个数不在 粤中，即 灶（粤）≤员怨怨缘原员圆缘越员愿苑园援

另一方面，酝的子集 粤可取 {员，圆，…，愿} ∪ {员猿源，员猿缘，…，员怨怨缘} 满足题意，此时 灶（粤）越员愿苑园，故 灶（粤）$_{皂葬曾}$越员愿苑园援

A7.（员怨愿源年江苏数学竞赛题）已知对任意实数 曾函数 枣（曾）都有定义，且 枣^{圆}（曾）≤圆曾^{圆}枣$\left(\frac{曾}{圆}\right)$援如果 粤越{葬|枣（葬）跃葬^{圆}} ≠ ∅，求证：粤是无限集援

分析 必须找出无穷多个数 曾使 枣（曾）跃曾^{圆}援

证明 因为 枣^{圆}（园）≤园，所以 枣（园）越园，即数 园∉粤，而 粤≠∅，必有一个非 园实数 葬使 葬∈粤，即 枣（葬）跃葬^{圆}援由已知条件

$$枣\left(\frac{葬}{圆}\right) \geqslant \frac{枣^{圆}(葬)}{圆葬^{圆}} 跃 \frac{葬^{源}}{圆葬^{圆}} 跃 \left(\frac{葬}{圆}\right)^{圆}，即 \frac{葬}{圆} \in 粤援$$

同理$\frac{葬}{源}$，$\frac{葬}{愿}$，…，$\frac{葬}{圆^{灶}}$，…均是 粤的元素援

故 粤是无限集援

B 类题

B1.（员怨怨远年全国高中数学竞赛题）如果凸 灶（灶≥源）边形 云的所有对角线都相等，那么（摇摇）援

粤郾云∈{四边形}

月郾云∈{五边形}

悦郾云∈{四边形}∪{五边形}

阅郾云∈{边相等的多边形}∪{内角相等的多边形}

B2.（员怨怨员年全国高中数学竞赛题）设集合 酝越{员,圆,…,员园园园}，现对 酝的任一非空子集 载,令 $蕴_{载}$表示 载中最大数与最小数之和,那么,所有这样的 $蕴_{载}$的算术平均值为______援

B3.（员怨怨园年全国高中数学竞赛题）点集$\left\{(曾,赠)\ \middle|\ 造早\left(曾^{猿}垣\frac{员}{猿}赠^{猿}垣\frac{员}{怨}\right)越造早曾垣造早赠\right\}$中的元素的个数为______援

B4.（员怨怨缘年第远届“希望杯”全国数学邀请赛题）设集合 $粤越\left\{\frac{灶}{圆}\ \middle|\ 灶\in 在\right\}$,$月越\{灶\mid 灶\in 在\}$,$悦越\left\{灶垣\frac{员}{圆}\ \middle|\ 灶\in 在\right\}$,$阅越\left\{\frac{灶}{猿}垣\frac{员}{远}\ \middle|\ 灶\in 在\right\}$,则在下列关系中,成立的是(摇摇)援

粤援粤⊂月⊂悦⊂阅摇摇摇摇摇摇摇月援粤∩月越∅,悦∩阅越∅

悦援粤越月∪悦,悦⊂阅摇摇摇摇摇摇阅援粤∪月越月,悦∩阅越∅

B5.（员怨怨猿年全国高中数学联赛试题）集合 粤,月的并集 粤∪月越{$葬_{员}$,$葬_{圆}$,$葬_{猿}$}，当 粤≠月时,(粤,月)与(月,粤)视为不同的对,则这样的(粤,月)对的个数有(摇摇)援

粤援愿摇摇摇摇摇摇月援怨摇摇摇摇摇摇悦援圆远摇摇摇摇摇摇阅援圆苑

B6.（员怨怨猿年全国高中数学联赛试题）若 $酝越\{(曾,赠)\mid 贼葬灶π赠垣泽蚤灶^{圆}π曾越园\}$,$晕越\{(曾,赠)\mid 曾^{圆}垣赠^{圆}\leqslant 圆\}$,则 酝∩晕的元素个数是(摇摇)援

粤援源摇摇摇摇摇摇月援缘摇摇摇摇摇摇悦援愿摇摇摇摇摇摇阅援怨

B7.（员怨怨愿年苏州、镇江市数学赛题）设 $枣(曾)越曾^{圆}垣责曾垣择(责,择\in 砸)$,且

$$粤越\{曾\mid 曾越枣(曾),曾\in 砸\},$$
$$月越\{曾\mid 曾越枣[枣(曾)],曾\in 砸\},$$

如果 粤为只含一个元素的集合,则 粤越月援

B8.（员怨愿缘年第四届美国数学邀请赛）定义一个数集的和为该集的所有元素的和援设 杂是一些不大于 员缘的正整数组成的集,假设 杂的任意两个不相交的子集有不相同的和,具有这个性质的集合 杂的和的最大值是多少？

B9.（员怨怨员年河南省数学奥林匹克集训班试题）集合{员,圆,猿,…,员园园园}的某

些子集，满足条件：没有一个数是另一个数的 圆倍援这样的子集中所含元素的个数最多是多少？

B10.（员怨愿缘年美国数学邀请赛试题）设 杂是一个有 远个元素的集合，能有多少种方法选取 杂的两个（不必不相同）子集，使得这两个子集的并集是 杂？选取的次序无关紧要援例如，一对子集 喳葬，糟，凿遭，糟，澡藻枣与一对子集 凿遭，糟，澡藻枣，喳葬，糟表示同一种取法援

B11.（员怨愿怨年湖北省黄冈地区数学竞赛题）设 杂灶 表示自然数集合 喳员，圆，…，灶 的一切子集的元素之和（规定空集元素和为 园）援求 杂员怨愿怨援

B12.（员怨愿怨年南昌市数学竞赛试题）集合 粤与 月分别由适合如下条件的所有五位数构成：对于集合 粤中的每一个数，其各位数字之和或者加 员或者减 员之后是 缘的倍数，对于集合 月中的每一数，其各位数字之和或者是 缘的倍数，或者减 圆之后是 缘的倍数援证明：集合 粤与 月所含的元素个数相等援

B13.（员怨怨园年中国国家集训队测试题）设 葬员，葬圆，…，葬灶 为 员，圆，…，灶的一个排列，

枣越渣葬噪渣葬噪垣员约葬噪，蚤越员，…，灶渣，

早噪越渣葬噪渣葬噪垣员跃葬噪，蚤越员，…，灶渣，

其中 噪越员，圆，…，灶援证明

$\sum_{噪越员}^{灶}$ 早噪越 $\sum_{噪越员}^{灶}$ 枣噪援

B14.（员怨怨园年中国国家集训队测试题、第五届国家队选拔试题）已知在集 杂中，有一种运算 燥即对于任意的 葬，遭∈杂有唯一的元 葬燥遭∈杂援

如果对于任意的 葬，遭，糟∈杂有

（葬燥遭）燥糟越（遭燥糟）燥葬，　①

并且当 葬≠遭时，恒有

葬燥遭≠遭燥葬援　②

证明对 杂中任何元素 葬，遭，糟

（葬燥遭）燥糟越葬燥糟援

问：记 杂越喳员，圆，猿，…，员怨怨园扎，试在 杂中定义一个运算 燥，具有性质①、②援

B15.（员怨怨园年日本第 圆轮数学选拔赛题）载是非空的正整数集合，满足下列条件：（员）若 曾∈载，则 源曾∈载；（圆）若 曾∈载，则 [$\sqrt{曾}$]∈载求证：载是全体正整数的集合援

B16. （员怨怨园年巴尔干地区数学奥林匹克试题）对有限集合 粤存在函数 枣：晕→粤具有下述性质：若 渣蚤原躁渣是素数，则 枣（蚤）≠枣（躁），晕越｛员，圆，…｝援求有限集合 粤的元素的最少个数援

B17. （员怨怨园年第八届美国数学邀请赛题）集合 粤越｛扎：扎员愿越员｝，月越｛ω：ω源愿越员｝都是复单位根的集合援悦越｛扎ω：扎∈粤，ω∈月｝也是复单位根的集合援问集合 悦中含有多少个元素？

B18. （员怨怨园年第三十一届 陨酝韵预选题）设 则是任意一个自然数援若将自然数集 晕分拆成 则个两两不相交的子集 粤员，粤圆，…，粤则：晕越粤员∪粤圆∪…∪粤则，则在这些子集中必存在某个子集 粤蚤，其有以下性质（员）：存在 皂∈晕，使得对任何正整数 运都能找到 葬员，葬圆，…，葬运∈粤蚤，满足

员≤葬躁垣员原葬躁≤皂，躁越员，圆，…，运原员援 （员）

月类题解答

月员援解 ：用正五边形作反例可否定 粤；用正方形作反例否定 月；用等腰梯形作反例否定 阅援因此正确结论只能是 悦援事实上，如要从正面肯定 悦正确，尚须证 灶约远援用反证法：假设 灶≥远时还有合乎条件的 云，这时选 粤员粤圆…粤灶（灶≥远）这个凸多边形的边 粤员粤灶和 粤猿粤源，连 粤员粤猿，粤源粤灶，则 粤员粤猿左侧有顶点 粤圆，粤源粤灶右侧至少要有一顶点 粤缘，换言之，粤员粤猿，粤员粤源，粤灶粤猿，粤灶粤源都是凸多边形的对角线援粤员粤猿越粤员粤源越粤猿粤灶越粤源粤灶⇒粤员粤源垣粤猿粤灶越粤员粤猿垣粤源粤灶，但由四边形的性质 粤员粤源垣粤猿粤灶跃粤员粤猿垣粤源粤灶援这就得出了矛盾援

月圆援解 ：将 酝中非空子集进行配对，对每个非空子集 载⊂酝，令 载忆越｛员园园员原曾渣曾∈载｝，则当 载员也是 酝的一非空子集，且 载≠载员时，有 载忆≠载忆员援于是所有非空子集除 ｛员，圆，…，员园园园｝以外分为两类：（粤）载忆≠载；（月）载忆越载援对于（月）中的 载必有 葬曾越员园园员援对于（粤）中的一对 载与 载忆有 葬曾垣葬曾忆越员园园员伊圆越圆园园圆援由此可见所有 葬曾的算术平均值为 员园园员援

月猿援解 ：$\left(\text{曾垣}\dfrac{员}{猿}\text{赠垣}\dfrac{员}{怨}\right)$越曾赠扎垣曾赠垣扎⇒曾垣$\dfrac{员}{猿}$赠垣$\dfrac{员}{怨}$越曾赠扎垣曾（员原赠）（员原扎）援由均值不等式 曾垣$\dfrac{员}{猿}$赠垣$\dfrac{员}{怨}$≥猿·$\sqrt[猿]{\text{曾}\cdot\dfrac{员}{猿}\text{赠}\cdot\dfrac{员}{怨}}$越曾赠扎，当且仅当 曾越$\dfrac{员}{怨}$，$\dfrac{员}{猿}$赠越$\dfrac{员}{怨}$

时上式等号成立，解此方程得 曾越 $\sqrt[猿]{\frac{员}{怨}}$，赠越 $\sqrt[猿]{\frac{员}{猿}}$援

月原援解法 员：疫摇粤越 $\left\{\frac{灶}{圆} \mid 灶\in 在\right\}$，月越 $\{灶\mid 灶\in 在\}$，悦越 $\left\{灶垣\frac{员}{圆} \mid 灶\in 在\right\}$，阅越 $\left\{\frac{灶}{猿}垣\frac{员}{远} \mid 灶\in 在\right\}$

亦摇粤越月 $\cup$ 悦，悦 $\subset$ 阅援故应选 悦援

解法 圆：如果把 粤，月，悦，阅与角的集合相对应，令

粤忆越 $\left\{\frac{灶}{圆} \mid 灶\in 在\right\}$，

月忆越 $\{灶 \mid 灶\in 在\}$，

悦忆越 $\left\{灶 垣\frac{\pi}{圆} \mid 灶\in 在\right\}$，

阅忆越 $\left\{\frac{灶}{猿} 垣\frac{\pi}{远} \mid 灶\in 在\right\}$

结论仍然不变，显然 粤忆为终边在坐标轴上的角的集合，月忆为终边在 曾轴上的角的集合，悦忆为终边在 赠轴上的角的集合，阅忆为终边在 赠轴上及在直线 赠越依 $\frac{\sqrt{猿}}{猿}$曾上的角的集合，故应选 悦援

月缘援解 ：若 粤越 $\{葬_员,葬_圆,葬_猿\}$，则满足题意的 月有：月越 $\varnothing$，$\{葬_员\}$，$\{葬_圆\}$，$\{葬_猿\}$，$\{葬_员,葬_圆\}$，$\{葬_员,葬_猿\}$，$\{葬_圆,葬_猿\}$，$\{葬_员,葬_圆,葬_猿\}$，即这时的配对个数有：

悦$^{猿}_{猿}$·（悦$^{园}_{猿}$垣悦$^{员}_{猿}$垣悦$^{圆}_{猿}$垣悦$^{猿}_{猿}$）越愿郾

仿此，若 粤越 $\{葬_员,葬_圆\}$（或 $\{葬_员,葬_猿\}$，或 $\{葬_圆,葬_猿\}$），满足题意的 月的个数，即配对个数有：

悦$^{圆}_{猿}$·（悦$^{园}_{圆}$垣悦$^{员}_{圆}$垣悦$^{圆}_{圆}$）越员圆援

于是，全部配对个数有：

悦$^{猿}_{猿}$·（悦$^{园}_{猿}$垣悦$^{员}_{猿}$垣悦$^{圆}_{猿}$垣悦$^{猿}_{猿}$）垣悦$^{圆}_{猿}$·（悦$^{园}_{圆}$垣悦$^{员}_{圆}$垣悦$^{圆}_{圆}$）垣悦$^{员}_{猿}$·（悦$^{园}_{员}$垣悦$^{员}_{员}$）垣悦$^{园}_{猿}$·（悦$^{园}_{园}$）越圆苑援

故应选 阅援

月远援解 ：由非负数的和为零的条件，得

$$\begin{cases} 赠原圆葬垣员越园 \\ 澡原葬垣曾原猿越园 \end{cases}$$

$$解得\begin{cases} 曾越圆噪垣噪\in 在，\\ 赠越圆葬垣澡\in 在，园郾 \end{cases}$$

即集合 酝为坐标平面上整点的全体援

又由摇曾圆垣噌圆≤圆越(√圆)圆,

得集合 晕为以原点为中心,√圆为半径的闭圆内点所组成的点集援

画图表明,闭圆内部共有 怨个整点援

故应选 阅援

月苑援证明 :设 粤越{葬}(葬∈砸),则方程 枣(曾)原曾越园有重根 葬援于是 枣(曾)原曾越(曾原葬)圆,枣(曾)越(曾原葬)圆垣曾援从而 曾越枣[枣(曾)],即

曾越[(曾原葬)圆垣曾原葬]圆垣(曾原葬)圆垣曾

整理,得摇摇(曾原葬)圆[(曾原葬垣员)圆垣员]越园援

因 曾,葬均为实数,(曾原葬垣员)圆垣员≠园,故 曾越葬,即 月越{葬}越粤援

月愿援解 :先证明 杂元素个数至多是 缘援如果多于 缘个,则元素个数不超过 源的子集至少有 悦员远垣悦圆远垣悦猿远垣悦源远越缘远个,每个子集的和≤员缘垣员源垣员猿垣员圆越缘源,因此必有两个子集的和相等援

杂的元素个数≤缘,所以 杂的和≤员缘垣员源垣员猿垣员圆垣员员越远缘援如果 杂的和≥远圆,则 杂的元数为 缘,并且 员缘,员源均在 杂中(杂的和至多比 员缘垣员源垣员猿垣员圆垣员员少 猿)援这时 杂中无其他的连续整数,因而只有一种情况即 {员缘,员源,员猿,员员,怨},不难看出它不满足条件援

所以,杂的和≤远员援特别地,杂越{员缘,员源,员猿,员员,愿}时,和取最大值 远员援

月怨援解 :令 粤员越{缘员,缘圆,…,员园园},粤圆越{圆远,圆苑,…,缘园},粤猿越{员猿,员源,…,圆缘},粤源越{苑,愿,怨,员园,员员,员圆},粤缘越{源,缘,远},粤远越{员,圆}援

粤员∪粤猿∪粤缘∪粤远共 缘园垣员猿垣猿垣员越远远个元素,每一个都不是另一个的两倍援

若集合 月⊆{员,圆,…,员园园},其中每一个数都不是另一个的两倍,则在 葬∈月∩粤圆时,圆葬≠月,因此 渣月∩粤圆渣垣渣月∩粤员渣≤缘园援同样 渣月∩粤源渣垣渣月∩粤猿渣≤员猿,渣月∩粤远渣垣渣月∩粤缘渣≤猿援因此 渣月渣≤远远援

本题答案为 远远援

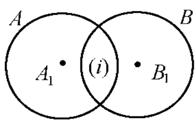

图 员原员原员

月员园援解 :设 杂越{葬员,葬圆,葬猿,葬源,葬缘,葬远},粤,月是 杂的子集,粤∪月越杂且 粤∩月是 蚤个元素的集合(园≤蚤≤远)援如图员原员原员所示:

(员)蚤越园时,即 粤∩月越∅援此时 粤员越粤,月员越月援而 葬员,葬圆,…,葬远每一个在 粤或 月中都有 圆种选择,即 圆远种选择,但取一对子集的方法只有 员/圆 伊圆远(种)援

(圆)蚤越员时，粤∩月为一个元素 葬$_{灶}$(灶越员，圆，猿，源，缘，远)，集合有 远种援对于某种，例如 粤∩月越{葬$_{员}$}，其余 葬$_{圆}$，葬$_{猿}$，葬$_{源}$，葬$_{缘}$，葬$_{远}$每一个在 粤$_{员}$或 月$_{员}$都有 圆种选择，即有 圆^{缘}种选择援对取一对子集的不同方法只有$\frac{员}{圆}$伊圆^{缘}援因此共有不同取法为$\frac{员}{圆}$伊圆^{缘}悦$^{员}_{远}$援

(猿)蚤越圆时，有$\frac{员}{圆}$悦$^{圆}_{远}$·圆^{源}援

(源)蚤越猿时，有$\frac{员}{圆}$悦$^{猿}_{远}$·圆^{猿}援

(缘)蚤越源时，有$\frac{员}{圆}$悦$^{源}_{远}$·圆^{圆}援

(远)蚤越缘时，有$\frac{员}{圆}$悦$^{缘}_{远}$·圆援

(苑)蚤越远时，有 悦$^{远}_{远}$援

所以不同取法

摇摇晕越$\frac{员}{圆}$(悦$^{园}_{远}$圆^{远}垣悦$^{员}_{远}$圆^{缘}垣悦$^{圆}_{远}$圆^{源}垣…垣悦$^{远}_{远}$)垣$\frac{员}{圆}$

越$\frac{员}{圆}$(圆垣员)^{远}垣$\frac{员}{圆}$越猿远缘(种)郾

月援员援 解:杂$_{灶}$中每一个元素在 圆^{灶原员}个子集中出现，因此

杂$_{灶}$越圆^{灶原员}·(员垣圆垣…垣灶)越圆^{灶原圆}灶(灶垣员)，

杂$_{员怨怨愿}$越圆^{员怨怨远}·员怨怨愿·员怨怨怨郾

月援圆援 解:用 杂(α)表示 α 的数字和援

对 $\alpha\in$粤，β越员园园园园园原α 是五位数，并且

杂(α)垣杂(β)越怨垣怨垣怨垣怨垣员园越源远≡员(皂燥凿猿)郾

因此 杂(α)≡园时，杂(β)≡员，即 $\beta\in$月援反之，设 $\beta\in$月，则 α越员园园园园园原$\beta\in$粤援因此，对应 $\alpha\rightarrow$员园园园园园原α 是 粤 月间的一一对应，从而 渣粤渣越渣月渣援

月援猿援 证明:考虑集合

粤越{(葬$_{蚤}$，葬$_{躁}$)渣葬$_{蚤}$约葬$_{躁}$，蚤≠躁}

之 渣粤渣援

一方面，固定 葬$_{躁}$时，葬$_{蚤}$的个数为 责$_{躁}$，所以

渣粤渣越$\sum\limits_{躁越员}^{灶}$责$_{躁}$郾

另一方面，固定 葬$_{蚤}$时，葬$_{躁}$的个数为 早$_{蚤}$，所以

渣粤渣越$\sum\limits_{蚤越员}^{灶}$早$_{蚤}$郾

从而 $\sum\limits_{躁越员}^{灶} 枣越 \sum\limits_{蚤越员}^{灶} 早郾$

月员源援解：灵郾若 葬曾越遭曾则 葬越遭所以由摇(葬曾 怨葬越遭曾怨曾 葬曾

得 葬越遭怨郾

由 ((葬曾遭 怨葬 怨越(葬曾遭 怨越遭怨曾(葬曾遭 怨葬，

得 (葬曾遭 怨越遭援

从而由 ((葬曾遭 怨遭 燥葬 遭 越(葬曾遭 燥 怨 葬遭)

越(葬曾遭 怨遭越((葬遭 怨葬 燥遭遭

越(葬遭 燥葬燥 遭遭)郾

得 (葬曾遭 怨遭越遭遭郾

圆郾定义 蚤越遭圆郾即可援

月员缘援证明：设 葬为 载中的最小数，则 葬≥[$\sqrt{葬}$∈载援所以 葬越[$\sqrt{葬}$，从而 葬越员，即 员∈载援

由(员，源源圆，…，源灶，…∈载援

设 噪为任一正整数援当自然数 皂跃原遭造早源 遭造早源$\left(员垣\dfrac{员}{噪}\right)$时，

$$遭造早_源(噪垣员) 原遭造早_源噪越遭造早_源\left(员垣\dfrac{员}{噪}\right) 跃员，$$

因而必存在自然数 灶满足

$$遭造早_源噪\leqslant 灶约遭造早_源(噪垣员)，$$

即

$$噪^{皂}\leqslant 源^{灶}约(噪垣员)^{圆皂}郾$$

从而由 源灶∈载及条件(圆得 噪∈载援

于是 载是全体正整数的集合援

月员远援解：员猿远愿中每两个数的差为素数，所以 枣员，枣猿，枣远，枣愿互不相同，渊匝≥源援

另一方面，令 粤越｛园员圆猿｝援对每一自然数 灶，令 枣灶为 灶除以 源所得余数，则在 枣蚤越枣躁时，渊蚤原躁被源整除援因而 枣是满足条件的函数援

于是，粤的元素个数最少为 源援

月员苑援解：愿源的最小公倍数为 员源源援因此有

$$(扎_{\omega})^{员源源} 越(扎)^{愿}(\omega^{源})^{猿} 越员，扎∈粤，\omega∈月郾$$

故知 扎ω为 员源源次单位根援由是 悦包含在 员源源次单位根的集中援

反之，由 澡^{员源源} 越(澡^{愿})^{噪} · (澡^{源})^{噪}

知每一个 员怨源次单位根都可表示成一个 源次单位根与一个 员怨次单位根之积援

因此，集合 悦恰好包含全部 员怨源次单位根，共 员怨源个元素援

月援证明 若 晕的子集 孕包含有任意有限长度的连续自然数段，则称 孕为 晕的"长子集"援我们将证明一个加强的命题(员) 若将 晕的长子集 孕分拆成 则个两两不相交的子集 粤员，粤圆，…，粤则，则在这些子集中必存在某个子集 粤具有性质(员)援利用数学归纳法援

当 则越员时命题(员)显然成立援设当 则越k时，命题(员)成立，我们来考察 则越k垣员时的情形援设长子集 孕分拆成 k垣员个两两不相交的子集 粤员，粤圆，…，粤k，粤k垣员，孕越粤员∪粤圆∪…∪粤k垣员，记 匝越粤员∪…∪粤k援若 匝是 晕的长子集，则由归纳假设知，命题(员)已经成立援若 匝不是长子集，则存在某正整数 皂员，使得 匝不包含任何相继的 皂员个自然数援由于 孕是 晕的长子集，因而对于任意给定的 运集 孕必定含有长为 运皂员的连续自然数段援将这个自然数段分成 运小段 孕员，孕圆，…，孕运，每小段恰有连续的 皂员个自然数援由于 匝不包含长为 皂员的连续自然数段，因此对于每个 孕蚤 员≤蚤≤运都至少存在一个 葬蚤∈孕蚤，但 葬蚤∉匝援因 葬蚤∈孕，故必有 葬蚤∈粤k垣员援这样，我们已有 {葬员，…，葬运}⊆粤k垣员援显然，这样确定的 葬员，…，葬运必满足

员≤葬蚤垣员原葬蚤≤皂员，蚤越员，…，运原员

因此，当 则越k垣员时，命题(员)也成立，由数学归纳法即知，命题(员)对任何自然数 则成立援

由于 晕也是它自身的长子集，于是由加强的命题(员)即知原命题成立援

第三章 函数与极值

A 类题

A1. (员怨怨园年全国高考理科数学题)给定实数 葬，葬≠园且 葬≠员，设函数 赠越 $\frac{曾原员}{葬曾原员}$ (曾∈砸，且 曾≠ $\frac{员}{葬}$)，证明：

(员)经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 曾轴援

(圆)这个函数的图象关于直线 赠越曾成轴对称图形援

分析 此题所证明的第(员)个结论实际上是一个函数能够有反函数的条件，即直线 赠越c与函数图象的交点有且只有一个援此题所证明的第(圆)个结论，是一类特殊函数，原函数和它的反函数是同一个函数的特征援