周春荔主编　奥林匹克数学普及讲座丛书(之三)

初中数学竞赛中的数论初步

彭林　李贤军　周春荔编著

中国物资出版社

内　容　提　要

本册内容是对初中学生整数知识的自然延拓与扩充，内容包括整数与整除、整除知识的深化、余数问题、不定方程初步。通过对初中数学竞赛的整数问题的分类讲解与练习，夯实基础知识、发展逻辑思维能力，领悟数学思想，培养创新意识。内容由浅入深，按知识系统讲解逐步提高。适于自学初等数论的初步知识，各章配有精选的练习题和解答，供练习选用。既可做学生学习奥林匹数学的教材，又可做培训教练员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的数论初步/彭林等编著.—北京:中国物资出版社,2004.8

(奥林匹克数学普及讲座丛书:3)

ISBN 7-5047-2201-4

Ⅰ.初… Ⅱ.周… Ⅲ.代数课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第070196号

责任编辑 黑俊贵
责任印制 方鹏远
责任校对 王 莉

中国物资出版社出版发行
网址:http://www.chph.cn
社址:北京市西城区月坛北街25号
电话:(010)68589540 邮编:100834
全国新华书店经销
北京才智印刷厂印刷

开本:850×1168mm 1/32 印张:7.25 字数:158千字
2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷
书号:ISBN 7-5047-2201-4/G·0461
印数:0001—8000册
定价:12.00元

第 1 章　整　除

在日常生活中,我们会遇到许多有趣而又耐人寻味的问题:

某同学到文具店买了七个一角二分钱的本子、五个六分钱的铅笔和三个活页夹子. 售货员收了他三元钱,并找还三角七分钱. 这个同学马上对售货员说:“您的账算错了!”你能知道他为什么这样快就知道“算错了账”吗?

排练团体操时,要求队伍变成 10 行、15 行、18 行、24 行时,队形都能成为矩形. 问最少需要多少人参加团体操的排练?

同学们,你能不能回答这样的问题呢?

让我们还是从数的整除性的基础知识谈起.

§1.1　十进制整数

在小学数学中,我们主要学习的是整数的运算,不知同学们想过没有,整数是怎样表示的?“逢十进一”是什么意思?

我们通常接触到整数都是十进制的整数. 十进制记数法就是采取逢十进一的法则进行记数的方法. 例如, 1995 就是由 1 个一千, 9 个一百, 9 个十和 1 个五组成的,因此 1995 这个数可以写成

$$1995 = 1\times 1000 + 9\times 100 + 9\times 10 + 5 .$$

想一想

对于任意一个 $n + 1$ 位的正整数怎样用这种形式表示?

为了表达方便,我们经常把用字母表示数字的多位数,在这个多位数上面加一横线,以避免和乘法混淆,例如,$\overline{37a56}$就表示一个五位数.

例 1 证明:形如$\overline{abcabc}$的六位数总能被 7、11、13 整除.

证明:将已知的六位数写成十进制表达形式,得

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= a\times 10^5+b\times 10^4+c\times 10^3+a\times 10^2+b\times 10+c\\&=a\times(10^5+10^2)+b\times(10^4+10)+c\times(10^3+1)\\&=a\times 100100+b\times 10010+c\times 1001\\&=1001\times(100a+10b+c)\\&=7\times 11\times 13(100a+10b+c).\end{aligned}$$

∴$\overline{abcabc}$总能被 7,11,13 整除.

例 2 已知$\overline{abcd}$是一个四位数,且$\overline{abcd}-\overline{dcba}=\square 999$,问"□"代表几?

解:将$\overline{abcd}$及$\overline{dcba}$用十进制表示出来,并求差,得$\overline{abcd}-\overline{dcba}=9(111a+10b-10c-111d)$.

可见,两数之差为 9 的倍数,从而□999 也应是 9 的倍数,故□+9+9+9 也是 9 的倍数,得"□"代表 9 或 0,由题意知 0 舍去.所以□代表 9.

例 3 试证明:当$\overline{abc}$是 37 的倍数时,$\overline{bca}$也是 37 的倍数.

证明:∵$\overline{abc}=100a+10b+c$,$\overline{bca}=100b+10c+a$,

$$\begin{aligned}\therefore \overline{bca}&=10(100a+10b+c)-999a\\&=10\times\overline{abc}-27\times 37a.\end{aligned}$$

故当$\overline{abc}$是 37 的倍数时,$\overline{bca}$也一定是 37 的倍数.

练一练

试证明:当$\overline{bca}$是 37 的倍数时,$\overline{cab}$也是 37 的倍数.

例 4 有一种室内游戏,魔术师要求某参赛者想好一个三位数$\overline{abc}$,然后,魔术师再要求他记下五个数$\overline{acb}$、$\overline{bac}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$、$\overline{cba}$,并把这五个数加起来求出和 N,只要讲出 N 的大小,魔术师就能说出原数$\overline{abc}$是什么.如果 $N=3194$,请你确定$\overline{abc}$.

解:由题意,得

$$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=3194.$$

两边加上$\overline{abc}$,得

$222(a+b+c)=3194+\overline{abc}$,

$\therefore\quad 222(a+b+c)=222\times14+86+\overline{abc}$.

$\therefore\quad \overline{abc}+86$ 是 222 的倍数,且 $a+b+c>14$.

设 $\overline{abc}+86=222n$,考虑到 $\overline{abc}$ 是三位数,依次取 $n=1,2,3,4$,分别得出 $\overline{abc}$ 的可能值为 136,358,802,结合 $a+b+c>14$,知 $\overline{abc}=358$.

练一练

一个三位数的各位数字互不相同,把它的各位上的数字任意交换位置,又可得到五个三位数,若这六个三位数的和等于 2220,那么在所有满足条件的三位数中,最小的三位数是多少?

答案:127.

例 5　有一个若干位的正整数,它的前两位数字相同,且它与它的反序数($\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}$ 与 $\overline{a_0 a_1 a_2\cdots a_{n-1} a_n}$ 互为反序数,其中 $a_0\neq0$,$a_n\neq0$)之和为 10879,求原数.

分析:首先需要确定原数是几位数,若原数是五位数,则它最小是 $\overline{11\times\times\times}$,已大于 10879,与已知条件不符;若原数是三位数,则原数与它的反序数之和最大是 $2\times999=1998$,还小于 10879,亦与已知条件不符,故原数必为四位数.

解:由已知可推得原数为四位数,又根据它的前两位数字相同,可设原数为 $\overline{aabc}$,其中 $a\geq1$,$c\geq1$,则它的反序数为 $\overline{cbaa}$. 由题意,得

$\overline{aabc}+\overline{cbaa}=10879$,

$\therefore\quad (10^3a+10^2a+10b+c)+(10^3c+10^2b+10a+a)=10879$,

$\therefore\quad 1001(a+c)+110(a+b)=10879$, ①

比较①式两边的末位数,得

$a+c=9$. ②

将②代入①,得　$a+b=17$.

$\because\quad a=17-b\geq17-9=8$,且 $c\geq1$,

$\therefore\quad$ 只有 $a=8$.

分别代入①②,得　$c=1$, $b=9$.

故原数为 8891.

例 6　一个正整数 N 的各位数不全相等,如果将 N 的各位数字重新排列,必可得到一个最大数和一个最小数,若最大数与最小数的差正好等于原来的数 N,则称 N 为“拷贝数”,试求所有的三位“拷贝数”.

解:设 N 为所求的三位“拷贝数”,它的各位数字分别为 a, b, c(a, b, c,不全相等),将其数码重新排列后,连同原数共得到 6 个三位数:$\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. 设其中最大数为$\overline{abc}$,则最小数为$\overline{cba}$,根据“拷贝数”的定义,得

$$\begin{aligned} N &= \overline{abc} - \overline{cba} \\ &= (100a + 10b + c) - (100a + 10b + a) \\ &= 99(a - c). \end{aligned}$$

0 可知 N 为 99 的整数倍,这样的三位数可能是 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990. 这 9 个数中,只有 $954 - 459 = 495$.

故 495 是唯一的三位“拷贝数”.

练一练

卡片上写有一个三位数(个位数字不是零),将这个三位数的个位数字与百位数字对调,记这两个三位数的差(大数减小数)为 m,且 m 也是一个三位数. 又将 m 的个位数字与百位数字对调后的三位数记为 n,则 $m+n$ 等于多少?

答案:1089.

例 7　甲、乙、丙 3 个人的年龄满足下列 4 个条件:

(1)甲的年龄是一个两位数;

(2)把甲的年龄的两位数字对调就是乙的年龄;

(3)甲的年龄与乙的年龄的差的$\frac{1}{3}$就是丙的年龄;

(4)乙的年龄是丙的年龄的 15 倍.

分析:本题可根据条件(1)设出甲的年龄,再由(2)、(3)两个条件把乙和丙的年龄用甲的年龄的代数式表示出来,然后由条件(4)列出方程.

解:由条件(1),设甲的年龄为$\overline{ab}(a>b\geq 1)$由(2)知乙的年龄为$\overline{ba}$,由(3)知丙的年龄为$\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$.根据条件(4),得

$$\overline{ba}=15\times\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$$

即　$5\times\overline{ab}=6\times\overline{ba}$,

∴　$5(10a+b)=6(10b+a)$,

∴　$4a=5b$.

∴　a是 5 的倍数,b是 4 的倍数.

∵　$a>b\geq 1$,

∴　只有 $a=5$,$b=4$.

故甲、乙、丙的年龄分别是 54,45,3.

例 8　某人驾使汽车从甲地出发到乙地需 1 小时,继续行驶 1 小时 45 分到达丙地. 汽车速度一定,甲、乙两地路程是$\overline{ab}$千米,乙、丙两地路程是$\overline{ba}$千米,现在知道从甲地经乙地到丙地的路程不少于 100 千米,试问从甲到乙地的路程是多少千米?

解:速度一定,路程与时间成正比知

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{1}{1\frac{3}{4}},$$

∴　$7\overline{ab}=4\overline{ba}$,

∴　$7(10a+b)=4(10b+a)$,∴　$b=2a$.

又　$\overline{ab}+\overline{ba}=(10a+b)+(10b+a)$

$=11(a+b)$

$=11(a+2a)$

$=33a\geq 100$,

∴　$a\geq 4$.

又　$b=2a<10$,

∴　$a<5$.

∴　$a=4, b=8$.

∴　$\overline{ab}=48$.

故从甲地到乙地的路程是 48 千米.

例 9　已知一个四位数的各位数字的和与这个四位数相加等于 1995,试求这个四位数.

解:设所求四位数是$\overline{abcd}$,由题意得

$$a+b+c+d+\overline{abcd}=1995,$$

∴　$1001a+101b+11c+2d=1995$.　①

此时必有 $a=1$(请读者想一想为什么?)

∴　$101b+11c+2d=994$　②

此时必有 $b=9$(请读者想一想为什么?)

∴　$11c+2d=85$.　③

对于③式,若 $c=8$ 或 9,则左边都大于 85;若 $c\leq 6$,则左边都小于 85,所以只有 $c=7$.

将 $c=7$ 代入③,得　$d=4$.

故所求四位数是 1974.

说明:解答整数问题,常常需要从首位或末位数字入手去进行分析.本例在确定 a, b, c, d 的值时,我们都是采用了首位数字分析法.

例 10　若一个首位数字是 1 的六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 所得的积是一个末位数字为 1 的六位数$\overline{abcde1}$,求原来的六位数.

解:设$\overline{abcde}=x$,则

$$\overline{1abcde}=100000+\overline{abcde}=100000+x,$$

$$\overline{abcde1}=\overline{abcde0}+1=10\times\overline{abcde}+1=10x+1.$$

由题意,得　$3\times(100000+x)=10x+1$,

解得　$x=42857$.

∴　原来的六位数为 $100000+42857=142857$.

说明:此题的关建是如何表示十进制数$\overline{1abcde}$和$\overline{abcde1}$. 对于一个十进制整数 $M = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$, 这样的表示方法是常用的:

$$M = 10 \times \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1} + a_0$$

$$M = 100 \times \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0},$$

……

$$M = 10^k \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_k} + \overline{a_{k-1} a_{k-2} \cdots\cdots a_1 a_0}.$$

例 11 一个自然数的首位数字是 4, 将其首位数字移至末尾之后, 它的大小降为原来的$\frac{1}{4}$, 求满足条件的最小正整数.

解:设所求的数表示为 $N = \overline{4ab\cdots c} = 4 \times 10^n + A$, 其中 $A = \overline{ab\cdots c}$(A是一个 n位数), 将其首位移至末位得$\overline{ab\cdots c4} = 10A + 4$.

由题意, 得

$$4 \times 10^n + A = 4(10A + 4),$$

$$\therefore \quad 39A = 4 \times (10^n - 4),$$

$$\therefore \quad 39A = 4 \times \underbrace{99\cdots9}_{n-1\text{个}9}6,$$

$$\therefore \quad 13A = 4 \times \underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}3}2.$$

故$\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{个}3}2$必能被 13 整除, 不难发现 33332 是满足条件的最小值, 从而 A 的最小值是 10256, 所以 N 的最小值就是 410256.

例 12 将正整数 N 接写在每一个正整数的右边, 如果得到的新数都能被 N 整除, 那么称 N 为“魔术数”, 在小于 130 正整数中, “魔术数”的个数有多少?

解:设“魔术数”N 为 m 位数, 任取正整数 P, 接写后得到的新数为$\overline{PN} = P \times 10^m + N$. 由题意$\overline{PN}$能被 N 整除, 得 $P \times 10^m$ 也能被 N 整除, 但由于 P 的任意性, 故 10^m 一定能被 N 整除, 从而

当 $m = 1$ 时, $N = 1, 2, 5$;

当 $m=2$ 时，$N=10,20,25,50$；

当 $m=3$ 时，考虑到 $N<130$，$N=100,125$。

所以，小于 130 的“魔术数”有 9 个。

习题 1.1

A 组

1. M 表示一个两位数，N 表示一个三位数，如果把 M 放在 N 的左边，组成一个五位数，那么这个五位数是(　　)

(A) $M+N$　　(B) MN

(C) $10000M+N$　　(D) $1000M+N$

2. 一个两位数，它是本身数字和的 k 倍，将个位数字与十位数字交换位置后，组成一个新数，则新数为其数字和的(　　)

(A) $(k-1)$倍　　(B) $(11-k)$倍

(C) $(10-k)$倍　　(D) $(9-k)$倍

3. 在大于 10 小于 100 的正整数中，数字交换位置后所得的数比原数增加 9 的数的个数为________。

4. 一个两位数，它的各位数字和的 3 倍与这个数加起来所得的和恰好是原数的两个数字交换了位置所得的两位数，这样的两位数有________个。

5. 已知 $\overline{ab}$ 为两位数，且满足 $a\cdot b\cdot\overline{ab}=\overline{bbb}$，求这个两位数。

6. 求一个最小的正整数 n，它的个位数字为 6，将 6 移到首位，所得新数是原数的 4 倍。

7. A 是一个三位数，B 是一个两位数，$A:B=3:1$，如果将 B 放在 A 的左边，得到一个五位数 C；把 A 放在 B 的左边得到另一个五位数 D，且 D 比 C 小 40014，求 D^A 的末位数字。

8. 两位数 $\overline{ab}$(个位数字与十位数字不同)的平方等于三位数 $\overline{xyz}$；而两位数 $\overline{ba}$ 的平方恰好等于三位数 $\overline{zyx}$，求上述两位数

与三位数.

B 组

1. 在十进制整数表示中,整数 a 是由 1985 个数字 8 组成,整数 b 是由 1985 个数字 5 组成,则整数 $9 \cdot a \cdot b$ 的各位数字之和是(   )

(A)15880   (B)17856

(C)17865   (D)17874

2. 小文在计算两个数相加时,把一个加数个位上的 1 错误地当作 7,把另一个加数十位上的 8 错误地当作 3,所得的和为 1946,原来两数相加的正确答案是__________.

3. 一辆新汽车出厂以后,为了试验汽车的性能,两位司机轮流驾驶,每小时行驶 55 千米,不停地行驶了一整天.停下来以后,看看手表,行驶时间是整整 n 小时,n 是个整数;看看里程表,出发时是个三位数,停止时,三倍数恰好颠倒了顺序.

(1)汽车行驶了几小时?

(2)设出发时里程表上三位数为 $\overline{abc}$,若 $a+b+c$ 不超过 7,你知道这两个三位数是多少吗?

4. 求所有能被 11 整除的三位数,使其满足除得的商正好等于被除数中各数字的平方和.

5. N 是由 5 个不同的非零数字组成的 5 位数,且 N 等于这 5 个数字中取 3 个不同的数字构成的所有三位的和,求所有的这种 5 位数 N.

6. 如果一个正整数各位数字之和与各位数字之积的和恰好等于这个正整数,我们称它为“幸运数”.试求出所有幸运数的和.

§1.2　数的整除

设有两个整数 $a,b(b\neq0)$,若有另一整数 q,使得 $a=b\times q$,则称 a 被 b 整除;或 b 能整除 a;若 a 被 b 整除,也称 a 是 b 的倍数;b 是 a 的约数,并记作 $b|a$. 若 a 不能被 b 整除,则记作 $b\nmid a$.

我们曾经学过下述有关整除的判别法则:

(1)被 2 或 5 整除的数的特征是末位数字能被 2 或 5 整除.

(2)被 4 或 25 整除的数的特征是末两位数字能被 4 或 25 整除.

(3)被 8 或 125 整除的数的特征是末三位数字能被 8 或 125 整除.

(4)被 3 或 9 整除的数的特征是各位数字和能被 3 或 9 整除.

(5)被 11 整除的数的特征是其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差能被 11 整除.

例 1　判断下列各数中,哪些数能被 4 或 25 整除:

457565,456575,184062,186240.

解:∵　456575 的末两位数字 75 能被 25 整除,而 457565 的末两位数字 65 不能被 25 整除,

∴　456575 能被 25 整除,而 457565 不能被 25 整除.

同理可知,$4|186240$,$4\nmid 184062$.

例 2　判断 789789 能否被 11 整除.

解:∵　这个六位数奇位数字之和与偶位数字之和的差为 $(8+7+9)-(7+8+9)=0$,是 11 的倍数,

∴　$11|789789$.

练一练

判断 456456 能否被 11 整除;

判断 67896789 能否被 11 整除.

在解题过程中,我们还经常用到下述一些性质:

(1)若 $a|b$, $b|c$,则 $a|c$.

证明:∵ $a|b$, $b|c$,

∴ $b=ap$, $c=bq$(p, q 是整数),

∴ $c=(ap)q=(pq)a$,

∴ $a|c$.

(2)若 $a|b$, $a|c$,则 $a(b\pm c)$.

证明:∵ $a|b$, $a|c$,

∴ $b=ap$, $c=aq$(b, q 是整数),

∴ $b\pm c=ap\pm aq=a(p\pm q)$,

∴ $a|(b\pm c)$.

(3)若 $a|b$,则 $a|nb$(n 是正整数).

请读者完成证明.

(4)若 a, b 互质,且 $a|bc$,则 $a|c$.

(5)若 a, b 互质,且 $a|c$, $b|c$,则 $ab|c$.

(6) n 个连续整数中,必有一个能被 n 整除.

如 11,12,13 中有 $3|12$;41,42,43,44 中有 $4|44$;77,78,79,80,81 中有 $5|80$·

例 3　已知九位数 $\overline{32a35717b}$ 能被 72 整除,求 a, b.

解:∵ $72|\overline{32a35717b}$,而 $72=8\times9$,

∴ $8|\overline{32a35717b}$, $9|\overline{32a35717b}$.

根据数的整除特征,有 $8|\overline{17b}$,且 b 必须是偶数,

∴ $b=6$.

又 $9|(3+2+a+3+5+7+1+7+6)$,

即 $9|(34+a)$,　　∴ $a=2$.

例 4　已知 $N=\overline{13xy45z}$ 能被 792 整除,试确定数字 x, y, z 及 N.

解:∵ $792=8\times9\times11$,　∴ $8|N$,

∴ $8|\overline{45z}$,　∴ $z=6$.

又　$9 | N$,

∴　$9 | (1+3+x+y+4+5+6)$,

即　$9 | (19+x+y)$,

∴　$x+y=18$,或 $x+y=17$.

又　$11 | N$,

∴　$11 | [(1+x+4+6)-(3+y+5)]$,

即　$11 | [3+(x-y)]$,

∴　$x-y=8$,或 $x-y=-3$.

经检验,$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=8 \end{cases}$符合题意,它的解是$\begin{cases} x=8, \\ y=0. \end{cases}$

故　$N=1380456$.

例 5　用 0,1,2,3,…,9 这十个不同的数字组成能被 99 整除的十位数,求其中最大的一个数和最小的一个数.

分析:因为 $99=9\times11$,所以这个十位数能同时被 9 和 11 整除.

解:∵　$0+1+2+\cdots+9=45=5\times9$,

∴　所有这样的十位数均能被 9 整除.

设十位数中奇数位上数字和为 x,偶数位上数字和为 y,则 $x+y=0+1+2+\cdots+9=45$ 为奇数,

∴　$x-y$ 为奇数.

根据题意,得　$11 | (x-y)$,

∴　$|x-y|=11$.

若 $x-y=11$,则 $x=28$,$y=17$;

若 $x-y=-11$,则 $x=17$,$y=28$.

要使十位数最大,前几位应尽量选用 9,8,7,6;

若前四位为 9876,则 $9+7=16$,$8+6=14$,可知 $x\neq17$,于是有 $x=28$,$y=17$.

从而易得能被 99 整除的最大的十位数为 9876524130.

同理能被 99 整除的最小的十位数为 1024375869.

说明:注意到 $x-y$ 与 $x+y$ 奇偶性相同,在得 $|x-y|=0$, 11, 22 时就可以排除 $|x-y|=0$ 与 $|x-y|=22$.

例 6　从 19 到 80 的所有两位数被连续地写成一个数 $x=19202122\cdots7980$. 求证:这个数能被 1980 整除.

分析:显然 $20|x$, 由 $1980=20\times9\times11$, 只要证 $9|x$, $11|x$.

证明:首先,显然有 $20|x$.

其次,由于各位上的数字和为 558 能被 9 整除,所以 $9|x$.

最后,因为 $(1+2\times10+3\times10+4\times10+5\times10+6\times10+7\times10+8)-(9+6\times45)=0$, 所以 $11|x$.

而 20, 9, 11 两两互质,且 $1980=20\times9\times11$, 故 $1980|x$. 这个数能被 1980 整除.

想一想

证明 $11|x$ 时,也可以证 $19+20+21+\cdots+79+80=99\times31$ 能被 11 整整除,这是为什么?

例 7　若 $4b+2c+d=32$, 试问 $\overline{abcd}$ 能否被 8 整除?请说明理由.

分析:要说明 $\overline{abcd}$ 能否被 8 整除,根据被 8 整除的数的特征,只要判断 $\overline{bcd}$ 能否被 8 整除.

解:∵

$$\begin{aligned}\overline{bcd}&=100b+10c+d\\&=96b+8c+(4b+2c+d)\\&=96b+8c+32\\&=8(12b+c+4),\end{aligned}$$

∴　$8|\overline{bcd}$,

∴　$8|\overline{abcd}$.

例 8　若 a, b, c, d 是互不相等的整数,且整数 x 满足等式

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$,

求证:$4|(a+b+c+d)$.

证明:∵　a, b, c, d 是互不相等的整数,

∴　$x-a, x-b, x-c, x-d$ 也是互不相等的整数.

∵ $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$,

∴ $x-a, x-b, x-c, x-d$ 均为 9 的约数,

而 $9=(-1)\times(+1)\times(-3)\times(+3)$,

∴ $(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)$

$=(-1)+(+1)+(-3)+(+3)=0$,

即 $a+b+c+d=4x$.

故 $4\mid(a+b+c+d)$.

例 9 求证: $1\underbrace{00\cdots0}_{8个0}1$ 能被 11 整除.

证明: $1\underbrace{00\cdots0}_{8个0}1=10^9+1=(10^3)^3+1$

$=(10^3+1)(10^6-10^3+1)$

$=(10+1)(10^2-10+1)(10^6-10^3+1)$

$=11(10^2-10+1)(10^6-10^3+1)$,

∴ $1\underbrace{00\cdots0}_{8个0}1$ 能被 11 整除.

例 10 若 $N=\overline{2x78}$ 是一个能被 17 整除的四位数,求 x.

解: $N=2078+100x=(122\times17)+17\times6x+4-2x$

$=17(122+6x)+(4-2x)$.

∵ $17\mid N, 17\mid17(122+6x)$,

∴ $17\mid4-2x$, ∴ $x=2$.

例 11 已知 x, y, z 均为整数,若 $11\mid(7x+2y-5z)$,求证: $11\mid(3x-7y+12z)$.

证明: ∵ $4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)$

$=11(3x-2y+3z)$,

又∵ $11\mid(7x+2y-5z), 11\mid11(3x-2y+3z)$,

∴ $11\mid4(3x-7y+12z)$,

又∵ 11, 4 互质,

∴ $11\mid(3x-7y+12z)$.