周春荔主编摇奥林匹克数学普及讲座丛书（之三）

初中数学竞赛中的数论初步

彭林摇李贤军摇周春荔编著

中国物资出版社

内摇容摇提摇要

本册内容是对初中学生整数知识的自然延拓与扩充,内容包括整数与整除、整除知识的深化、余数问题、不定方程初步。通过对初中数学竞赛的整数问题的分类讲解与练习,夯实基础知识、发展逻辑思维能力,领悟数学思想,培养创新意识。内容由浅入深,按知识系统讲解逐步提高。适于自学初等数论的初步知识,各章配有精选的练习题和解答,供练习选用。既可做学生学习奥林匹数学的教材,又可做培训教练员的参考书。

摇摇图书在版编目（悦陨孕）数据

初中数学竞赛中的数论初步 辕彭林等编著援—北京：
摇中国物资出版社，圆园园源
（奥林匹克数学普及讲座丛书 猿）
陨杂月晕 苑原缘园源苑原园圆缘园原远

Ⅰ援初…摇Ⅱ援彭…摇Ⅲ援代数课—初中—教学参考资料
摇Ⅳ援郧远猿源援远园猿

中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园源）第 园怨远猿远远号

责任编辑摇黑俊贵
责任印制摇方鹏远
责任校对摇王摇莉

中国物资出版社出版发行
网址：澡贼贼责：辕辕憎憎憎援糟澡扎赠造援糟燥皂
社址：北京市西城区月坛北街 圆缘号
电话：（园员园）远愿猿怨圆愿猿园摇邮编：员园园愿猿源
全国新华书店经销
北京才智印刷厂印刷

开本：愿缘园皂皂伊员员远愿皂皂摇员辕猿圆摇印张：苑援圆缘摇字数：员愿缘千字
圆园园源年 愿月第 员版摇圆园园源年 愿月第 员次印刷
书号：陨杂月晕 苑原缘园源苑原园圆缘园原远辕郧·园远缘员
印数：园园园员—缘园园园册
定价：员源援园园元

目摇摇录

第 员章摇整摇除

在日常生活中,我们会遇到许多有趣而又耐人寻味的问题:

某同学到文具店买了七个一角二分钱的本子、五个六分钱的铅笔和三个活页夹子 郾售货员收了他三元钱,并找还三角七分钱 郾这个同学马上对售货员说:“您的账算错了!”你能知道他为什么这样快就知道“算错了账”吗?

排练团体操时,要求队伍变成 员圆行、员缘行、员愿行、圆源行时,队形都能成为矩形 郾问最少需要多少人参加团体操的排练?

同学们,你能不能回答这样的问题呢?

让我们还是从数的整除性的基础知识谈起 郾

员援员摇十进制整数

在小学数学中,我们主要学习的是整数的运算,不知同学们想过没有,整数是怎样表示的?“逢十进一”是什么意思?

我们通常接触到整数都是十进制的整数 郾十进制记数法就是采取逢十进一的法则进行记数的方法 郾例如,员怨愿缘就是由 员个一千,怨个一百,怨个十和 员个五组成的,因此 员怨愿缘这个数可以写成

员怨愿缘越员伊员园园园垣怨伊员园园垣怨伊员园垣缘

想一想

对于任意一个 灶垣员位的正整数怎样用这种形式表示?

为了表达方便,我们经常把用字母表示数字的多位数,在这个多位数上面加一横线,以避免和乘法混淆,例如,猿源缘远苑就表示一个五位数 郾

例 员摇证明:形如葬遭糟葬遭糟的六位数总能被 苑、员员、员猿整除郾

证明:将已知的六位数写成十进制表达形式,得

葬遭糟葬遭糟越葬伊员园缘垣遭伊员园源垣糟伊员园猿垣葬伊员园圆垣遭伊员园垣糟

越葬伊(员园缘垣员园圆)垣遭伊(员园源垣员园)垣糟伊(员园猿垣员)

越葬伊员园员园园园垣遭伊员园园员园垣糟伊员园园员

越员园园员伊(员园园葬垣员园遭垣糟)

越苑伊员员伊员猿伊(员园园葬垣员园遭垣糟)援

摇摇亦葬遭糟葬遭糟总能被 苑、员员、员猿整除郾

例 圆摇已知葬遭糟凿是一个四位数,且葬遭糟凿原凿糟遭葬越□怨怨苑,问“□”代表几?

解:将葬遭糟凿及凿糟遭葬用十进制表示出来,并求差,得葬遭糟凿原凿糟遭葬越怨(员员员葬垣员园遭原员园糟原员员员凿)郾

可见,两数之差为 怨的倍数,从而□怨怨苑也应是 怨的倍数,故□垣怨垣怨垣苑也是 怨的倍数,得“□”代表 怨或 园由题意知 园舍去郾所以□代表 怨援

例 猿摇试证明:当葬遭糟是 猿苑的倍数时,遭糟葬也是 猿苑的倍数郾

证明:设葬遭糟越员园园葬垣员园遭垣糟,遭糟葬越员园园遭垣员园糟垣葬,

亦遭糟葬越员园(员园园葬垣员园遭垣糟)原怨怨怨葬

越员园伊葬遭糟原圆苑伊猿苑葬郾

故当葬遭糟是 猿苑的倍数时,遭糟葬也一定是 猿苑的倍数郾

练一练

试证明:当遭糟葬是 猿苑的倍数时,糟葬遭也是 猿苑的倍数郾

例 源摇有一种室内游戏,魔术师要求某参赛者想好一个三位数葬遭糟然后,魔术师再要求他记下五个数葬糟遭、遭葬糟、遭糟葬、糟葬遭、糟遭葬,并把这五个数加起来求出和 晕,只要讲出 晕的大小,魔术师就能说出原数葬遭糟是什么郾如果 晕越猿员怨源,请你确定葬遭糟郾

解:由题意,得

葬糟遭垣遭葬糟垣遭糟葬垣糟葬遭垣糟遭葬越猿员怨源郾

两边加上葬遭糟得

圆圆圆(葬垣遭垣糟 越猿源垣葬遭糟

亦摇圆圆圆(葬垣遭垣糟 越圆圆伊猿源垣愿远垣葬遭糟郾

亦摇葬遭糟垣愿远是 圆圆圆的倍数,且 葬垣遭垣糟摇猿远郾

设葬遭糟垣愿远越圆圆圆灶,考虑到葬遭糟是三位数,依次取 灶越员,圆,猿,源分别得出葬遭糟的可能值为 员猿远,猿缘愿,缘愿园,结合 葬垣遭垣糟摇猿源知葬遭糟越猿缘愿郾

练一练

一个三位数的各位数字互不相同,把它的各位上的数字任意交换位置,又可得到五个三位数,若这六个三位数的和等于圆圆圆圆,那么在所有满足条件的三位数中,最小的三位数是多少?

答案:员园愿郾

例 缘摇有一个若干位的正整数,它的前两位数字相同,且它与它的反序数(葬灶葬灶原员…葬圆葬员摇与摇葬员葬圆…葬灶原员葬灶互为反序数,其中 葬员≠园,葬灶≠园)之和为 员园远愿猿,求原数郾

分析:首先需要确定原数是几位数,若原数是五位数,则它最小是员员伊伊伊,已大于 员园远愿猿,与已知条件不符;若原数是三位数,则原数与它的反序数之和最大是 圆伊怨愿苑越员怨苑源,还小于员园远愿猿,亦与已知条件不符,故原数必为四位数郾

解:由已知可推得原数为四位数,又根据它的前两位数字相同,可设原数为葬葬遭糟,其中 葬≥员,糟≥员,则它的反序数为糟遭葬葬郾由题意,得

葬葬遭糟垣糟遭葬葬越员园远愿猿,

亦摇(员园园园葬垣员园园葬垣员园遭垣糟)垣(员园园园糟垣员园园遭垣员园葬垣葬)越员园远愿猿郾

亦摇员园园员(葬垣糟)垣员员园(葬垣遭)越员园远愿猿, ①

比较①式两边的末位数,得

摇摇葬垣糟越猿郾 ②

将②代入①,得摇葬垣遭越苑郾

疫摇葬越员,圆,遭越远,缘,且 糟≥员,

亦摇只有 葬越圆郾

分别代入①②,得摇糟越员,遭越怨郾

故原数为 愿怨员郾

例 远摇一个正整数 晕的各位数不全相等,如果将 晕的各位数字重新排列,必可得到一个最大数和一个最小数,若最大数与最小数的差正好等于原来的数 晕,则称 晕为“拷贝数”,试求所有的三位“拷贝数”郾

解:设 晕为所求的三位“拷贝数”,它的各位数字分别为 葬、遭、糟(葬、遭、糟不全相等),将其数码重新排列后,连同原数共得到远个三位数:葬遭糟,葬糟遭,遭葬糟,遭糟葬,糟葬遭,糟遭葬郾设其中最大数为葬遭糟,则最小数为糟遭葬,根据“拷贝数”的定义,得

晕越葬遭糟原糟遭葬

越(员园园葬垣员园遭垣糟)原(员园园糟垣员园遭垣葬)

越怨怨(葬原糟)郾

摇摇园可知 晕为 怨怨的整数倍,这样的三位数可能是 员怨愿,圆怨苑,猿怨远,源怨缘,缘怨源,远怨猿,苑怨圆,愿怨员郾这 愿个数中,只有 怨缘源原源缘怨越源怨缘郾

故 源怨缘是唯一的三位“拷贝数”郾

练一练

卡片上写有一个三位数(个位数字不是零),将这个三位数的个位数字与百位数字对调,记这两个三位数的差(大数减小数)为 皂,且 皂也是一个三位数郾又将 皂的个位数字与百位数字对调后的三位数记为 灶,则 皂垣灶等于多少?

答案:员园愿怨郾

例 苑摇甲、乙、丙 猿个人的年龄满足下列 源个条件:

(员)甲的年龄是一个两位数;

(圆)把甲的年龄的两位数字对调就是乙的年龄;

(猿)甲的年龄与乙的年龄的差的$\frac{员}{猿}$就是丙的年龄;

(源)乙的年龄是丙的年龄的 员园倍郾

分析：本题可根据条件（员）设出甲的年龄，再由（圆）、（猿）两个条件把乙和丙的年龄用甲的年龄的代数式表示出来，然后由条件（源）列出方程郾

解：由条件（员），设甲的年龄为葬遭（葬跃遭＞员）由（圆）知乙的年龄为遭葬，由（猿）知丙的年龄为$\frac{员}{猿}$（葬遭＋遭葬）摇根据条件（源），得

$$遭葬越员缘伊\frac{员}{猿}（葬遭原遭葬）$$

摇摇即摇缘伊葬遭越远伊遭葬，

亦摇缘（员园葬垣遭）越远（员园遭垣葬），

亦摇源源葬越缘缘遭，

亦摇葬是缘的倍数，遭是源的倍数郾

疫摇葬跃遭＞员，

亦摇只有葬越缘，遭越源郾

故甲、乙、丙的年龄分别是缘源、源缘、猿猿郾

例 愿摇某人驾使汽车从甲地出发到乙地需员小时，继续行驶员小时源缘分到达丙地郾汽车速度一定，甲、乙两地路程是葬遭千米，乙、丙两地路程是遭葬千米，现在知道从甲地经乙地到丙地的路程不少于员园园千米，试问从甲到乙地的路程是多少千米？

解：速度一定，路程与时间成正比知

$$摇摇\frac{葬遭}{遭葬}越\frac{员}{员\frac{猿}{源}}，$$

亦摇苑葬遭越源遭葬，

亦摇苑（员园葬垣遭）越源（员园遭垣葬），亦摇遭越圆葬郾

又摇葬遭垣遭葬越（员园葬垣遭）垣（员园遭垣葬）

越员员（葬垣遭）

越员员（葬垣圆葬）

越猿猿葬＞员园园，

亦摇葬＞源郾

又摇遭越圆葬垣员园

亦摇葬约缘鄄

亦摇葬越源，遭越员愿鄄

亦摇葬遭越源员愿鄄

故从甲地到乙地的路程是源员愿千米鄄

例怨摇已知一个四位数的各位数字的和与这个四位数相加等于员怨怨缘，试求这个四位数鄄

解：设所求四位数是葬遭糟凿，由题意得

摇摇葬垣遭垣糟垣凿垣葬遭糟凿越员怨怨缘

亦摇员园园员葬垣员园员遭垣员员糟垣圆凿越员怨怨缘鄄 ①

此时必有葬越员（请读者想一想为什么？）

亦摇员园员遭垣员员糟垣圆凿越怨怨源 ②

此时必有遭越怨（请读者想一想为什么？）

亦摇员员糟垣圆凿越愿缘鄄 ③

对于③式，若糟越愿或怨，则左边都大于愿缘；若糟<远，则左边都小于愿缘，所以只有糟越苑鄄

将糟越苑代入③，得摇凿越源鄄

故所求四位数是员怨苑源鄄

说明：解答整数问题，常常需要从首位或末位数字入手去进行分析鄄本例在确定葬，遭，糟，凿的值时，我们都是采用了首位数字分析法鄄

例员园摇若一个首位数字是员的六位数员葬遭糟凿藻乘以猿，所得的积是一个末位数字为员的六位数葬遭糟凿藻员，求原来的六位数鄄

解：设葬遭糟凿藻越曾，则

员葬遭糟凿藻越员园园园园园垣葬遭糟凿藻越员园园园园园垣曾，

葬遭糟凿藻员越葬遭糟凿藻伊员园垣员越员园曾垣员鄄

由题意，得摇猿伊（员园园园园园垣曾）越员园曾垣员，

解得摇曾越源圆愿缘苑鄄

亦摇原来的六位数为员园园园园园垣源圆愿缘苑越员源圆愿缘苑鄄

说明 :此题的关建是如何表示十进制数 灾葬遭葬 和 葬遭葬遭葬郾对于一个十进制整数 酝越葬灶葬灶原员…葬员葬园，这样的表示方法是常用的：

酝越员园伊葬灶葬灶原员…葬圆葬员 垣葬园

酝越员园园伊葬灶葬灶原员…葬猿葬圆 垣葬员葬园，

……

酝越员园噪·葬灶葬灶原员……葬噪 垣葬噪原员葬噪原圆……葬员葬园郾

例 员远摇一个自然数的首位数字是 源，将其首位数字移至末尾之后，它的大小降为原来的$\frac{员}{源}$，求满足条件的最小正整数郾

解 :设所求的数表示为 晕越源葬遭·糟越源伊员园灶 垣粤，其中 粤越葬遭·糟（粤是一个 灶位数），将其首位移至末位得葬遭·糟源越员园粤垣源郾

由题意，得

摇摇源伊员园灶 垣粤越源（员园粤垣源），

亦摇猿怨粤越源伊（员园灶 原员远），

亦摇猿怨粤越源伊怨怨…怨愿源，

亦摇员猿粤越源伊猿猿…猿圆愿郾

故猿猿…猿圆愿必能被 员猿整除，不难发现 猿猿猿猿圆愿是满足条件的最小值，从而 粤的最小值是 员园圆缘远，所以 晕的最小值就是 源员园圆缘远郾

例 员苑摇将正整数 晕接写在每一个正整数的右边，如果得到的新数都能被 晕整除，那么称 晕为“魔术数”，在小于 员猿园的正整数中，“魔术数”的个数有多少？

解 :设“魔术数”晕为 皂位数，任取正整数 孕，接写后得到的新数为孕晕越孕伊员园皂 垣晕郾由题意孕晕能被 晕整除，得 孕伊员园皂 也能被 晕整除，但由于 孕的任意性，故 员园皂 一定能被 晕整除，从而

当 皂越员时，晕越员，圆，缘；

当 皂越圆时，晕越员园，圆园，圆缘，缘园；

当 皂越猿时，考虑到 晕约员猿园，晕越员园园，员圆缘郾

所以,小于 员猿园园的“魔术数”有 怨个郾

习题 员援员

粤摇组

员郾酝表示一个两位数,晕表示一个三位数,如果把 酝放在晕的左边,组成一个五位数,那么这个五位数是 (摇)

(粤) 酝垣晕摇摇摇摇摇摇 (月) 酝晕

(悦) 员园园园酝垣晕摇摇摇摇摇摇 (阅) 员园园园酝垣晕

圆郾一个两位数,它是本身数字和的 噪倍,将个位数字与十位数字交换位置后,组成一个新数,则新数为其数字和的 (摇)

(粤) (噪原员) 倍摇摇摇摇摇摇 (月) (员员原噪) 倍

(悦) (员园原噪) 倍摇摇摇摇摇摇 (阅) (怨原噪) 倍

猿郾在大于 员园园小于 员园园园的正整数中,数字交换位置后所得的数比原数增加 怨的数的个数为__________郾

源郾一个两位数,它的各位数字和的 猿倍与这个数加起来所得的和恰好是原数的两个数字交换了位置所得的两位数,这样的两位数有__________个郾

缘郾已知 $\overline{葬遭}$ 为两位数,且满足 葬· 遭· $\overline{葬遭}$越$\overline{遭遭遭}$,求这个两位数援

远郾求一个最小的正整数 灶,它的个位数字为 远,将 远移到首位,所得新数是原数的 源倍郾

苑郾粤是一个三位数,月是一个两位数,粤颐月越猿颐员,如果将月放在 粤的左边,得到一个五位数 悦,把 粤放在 月的左边得到另一个五位数 阅,且 阅比 悦小 源园园园园,求 阅^{粤} 的末位数字郾

愿郾两位数 $\overline{葬遭}$(个位数字与十位数字不同) 的平方等于三位数 $\overline{曾赠扎}$,而两位数 $\overline{遭葬}$ 的平方恰好等于三位数 $\overline{扎赠曾}$,求上述两位数与三位数郾

月摇组

员郾在十进制整数表示中,整数 葬是由 员怨怨缘个数字 愿组成,整数 遭是由 员怨怨缘个数字 缘组成,则整数 怨· 葬· 遭的各位数字之和是 (摇)

(粤) 员缘怨愿园　　　　(月) 员怨愿缘远

(悦) 员苑愿远缘　　　　(阅) 员苑愿怨源

圆郾小文在计算两个数相加时,把一个加数个位上的 员错误地当作 苑,把另一个加数十位上的 愿错误地当作 猿,所得的和为 员怨远园,原来两数相加的正确答案是____________郾

猿郾一辆新汽车出厂以后,为了试验汽车的性能,两位司机轮流驾驶,每小时行驶 缘缘千米,不停地行驶了一整天援停下来以后,看看手表,行驶时间是整整 灶小时,灶是个整数;看看里程表,出发时是个三位数,停止时,三倍数恰好颠倒了顺序郾

(员) 汽车行驶了几小时?

(圆) 设出发时里程表上三位数为$\overline{葬遭糟}$,若 葬垣遭垣糟不超过 苑,你知道这两个三位数是多少吗?

源郾求所有能被 员员整除的三位数,使其满足除得的商正好等于被除数中各数字的平方和郾

缘郾晕是由 缘个不同的非零数字组成的 缘位数,且 晕等于这 缘个数字中取 猿个不同的数字构成的所有三位的和,求所有的这种 缘位数 晕援

远郾如果一个正整数各位数字之和与各位数字之积的和恰好等于这个正整数,我们称它为“幸运数”郾试求出所有幸运数的和郾

异员援摇数的整除

设有两个整数 葬遭(遭≠园),若有另一整数 择使得 葬越遭择,则称 葬被 遭整除,或 遭能整除 葬;若 葬被 遭整除,也称 葬是 遭的倍数,遭是 葬的约数,并记作 遭葬.若 葬不能被 遭整除,则记作 遭葬.

我们曾经学过下述有关整除的判别法则：

(员)被 圆或 缘整除的数的特征是末位数字能被 圆或 缘整除.

(圆)被 源或 园缘整除的数的特征是末两位数字能被 源或 园缘整除.

(猿)被 愿或 员园缘整除的数的特征是末三位数字能被 愿或 员园缘整除.

(源)被 猿或 怨整除的数的特征是各位数字和能被 猿或 怨整除.

(缘)被 员员整除的数的特征是其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差能被 员员整除.

例 员摇判断下列各数中,哪些数能被 源或 园缘整除：

源缘远缘远缘,源远缘远缘远,员愿园圆园圆,员远远圆园源.

解 摇源缘远缘远缘的末两位数字 远缘能被 园缘整除,而 源远缘远缘远的末两位数字 远远不能被 园缘整除,

亦摇源缘远缘远缘能被 园缘整除,而 源远缘远缘远不能被 园缘整除.

同理可知,源员愿园圆园圆,源|员远远圆园源.

例 圆摇判断 苑怨愿苑怨愿能否被 员员整除.

解 摇这个六位数奇位数字之和与偶位数字之和的差为 (愿垣苑垣怨)原(苑垣怨垣愿) 越园,园是 员员的倍数,

亦摇员员|苑怨愿苑怨愿.

练一练

判断 源缘远缘远缘能否被 员员整除;

判断 远愿怨苑愿怨能否被 员员整除.

在解题过程中,我们还经常用到下述一些性质：

(员 若 葬渣遭渣则 葬渣

证明 :疫摇葬渣遭渣

亦摇遭越葬责,糟越遭择(责,择是整数),

亦摇糟越(葬责择越(责择葬

亦摇葬渣

(圆 若 葬渣葬渣则 葬(遭渣糟

证明 :疫摇葬渣葬渣

亦摇遭越葬责,糟越葬择(遭择是整数),

亦摇遭糟越葬责葬择越葬(责择,

亦摇葬渣遭糟

(猿 若 葬渣则 葬渣遭(灶是正整数)

请读者完成证明

(源 若 葬遭互质,且 葬渣渣则 葬渣

(缘 若 葬遭互质,且 葬渣遭渣则 葬遭渣

(远 灶个连续整数中,必有一个能被 灶整除

如 员,圆,猿中有 猿的倍数;源,缘,远中有 源的倍数;苑,愿,怨,员园中有 缘的倍数。

例 猿摇已知九位数猿葬苑源源远遭能被 苑园整除,求 葬,遭

解 :疫摇苑园渣猿葬苑源源远遭而 苑园越愿伊怨,

亦摇愿渣猿葬苑源源远遭,怨渣猿葬苑源源远遭

根据数的整除特征,有 愿渣远遭且 遭必须是偶数,

亦摇遭越源

又摇怨渣猿垣葬垣苑垣源垣源垣远垣源,

即摇怨渣猿缘垣葬,摇摇亦摇葬越员

例 源摇已知 晕越员猿早燥葬能被 苑圆整除,试确定数字 曾赠扎及晕

解 :疫摇苑圆越愿伊怨,愿伊怨越苑圆,摇亦摇愿渣晕,

亦摇愿渣燥葬,摇亦摇扎越源

又摇怨奎,

亦摇怨渣员垣猿垣曾垣赠垣原垣缘垣远，

即摇怨渣员怨垣曾垣赠，

亦摇曾垣赠越愿,或 曾垣赠越远郾

又摇员员奎,

亦摇员员渣(员垣曾垣原垣远 原(猿垣赠垣缘)),

即摇员员渣猿垣(曾原赠),

亦摇曾原赠越愿,或 曾原赠越原猿郾

经检验,{曾垣赠越愿 / 曾原赠越愿} 符合题意,它的解是 {曾越愿, / 赠越园郾}

故摇晕越员猿愿远园缘猿缘郾

例 缘摇用 园,员,圆,猿,…,怨这十个不同的数字组成能被 怨怨整除的十位数,求其中最大的一个数和最小的一个数援

分析 :因为 怨怨越怨伊员员,所以这个十位数能同时被 怨和 员员整除郾

解 :设摇园垣员垣圆垣…垣怨越源缘越缘伊怨,

亦摇所有这样的十位数均能被 怨整除郾

设十位数中奇数位上数字和为 曾偶数位上数字和为 赠则 曾垣赠越园垣员垣圆垣…垣怨越源缘为奇数,

亦摇曾原赠为奇数郾

根据题意,得摇员员渣曾原赠,

亦摇渣曾原赠渣越员员郾

若 曾原赠越员员,则 曾越圆愿,赠越员苑;

若 曾原赠越原员员,则 曾越员苑,赠越圆愿郾

要使十位数最大,前几位应尽量选用 怨,愿,苑,远;

若前四位为 怨愿苑远,则 怨垣苑越员远,愿垣远越员源,可知 曾≠员苑,于是有 曾越圆愿,赠越员苑郾

从而易得能被 怨怨整除的最大的十位数为 怨愿苑远缘圆源员猿园郾

同理能被 怨怨整除的最小的十位数为 员园圆猿愿缘源远苑怨郾

员园