

周春荔主编 奥林匹克数学普及讲座丛书(之一)

初中数学竞赛中的 代数问题

周春荔编著

中国物资出版社

内摇容摇提摇要

本册内容是对初中代数知识的自然延拓与扩充,内容包括代数式基础、乘法公式与因式分解、方程式理论初步、函数与极值。通过对初中数学竞赛的代数问题的分类讲解与练习,夯实基础知识,发展逻辑思维能力,领悟数学思想,培养创新意识。内容由浅入深,按知识系统,根据大纲逐年级上升,适于自学和配合教学同步进行,各章配有精选的练习题和解答,供练习选用,既可做学生学习奥林匹克数学的教材,又可做培训教练员的参考书。

摇摇图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的代数问题 鞠春荔编著 北京：
中国物资出版社 2005.12

(奥林匹克数学普及讲座丛书·5)

ISBN 7-114-04811-1

I 鞠... 摇 II 鞠... 摇 III 代数课—初中—教学参考资料 摇
摇 IV 761.273.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 14343 号

责任编辑 摇 黑俊贵

责任印制 摇 方鹏远

责任校对 摇 王摇莉

中国物资出版社出版发行

网址: www.cwpc.com.cn

社址: 北京市西城区月坛北街 25 号

电话: (010) 68083168 邮编: 100045

全国新华书店经销

北京才智印刷厂印刷

开本: 787mm×1092mm 1/32 印张: 8.5 字数: 210 千字

2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷

书号: ISBN 7-114-04811-1

印数: 10000 册

定价: 18.00 元

(图书出现印装质量问题 本社负责调换)

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertong.com.cn

第 1 章 代数式基础

在初中代数中指出：用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫代数式。

单独的一个数或一个字母，像 $1, 2, 3, \dots$ 也是代数式。

上述定义中的“数”，是我们学过的数或指定的数。其中的“字母”，必须是用来“表示数的字母”。一般英语书上的字母不是代数式，因为在使用的场合没约定它代表数。

“用运算符号连结”，一般指加、减、乘、除、乘方、开方等运算。当然也可以是按一定意义下规定的运算。

用代数式总能表达一个意思。因此，代数式是数学语言中的词汇或短句。

要想掌握数学这个工具，就要学会认读代数式，会翻译其含义，并且会由代数式展开推理。这是学好代数，以至于学好数学的基本功。

例 1 认读代数式

例 1 若 n 为整数，试说明下列代数式的意义：

$(n+1), (n-1), (n+2), (n-2), (n^2), (n^2-1), (n^2+1)$

答： $(n+1)$ —— n 的倍数，偶数。

$(n-1)$ ——被 n 除余 1 的数，奇数。

(n^2-1) ——被 n 除余 1 的数。

(n^2+1) ——被 n 除余 1 的数。

(n^2) ——整数的平方。

(n^k) ——整数 n 的 k 次幂。

例 缘葬遭糟都是阿拉伯数码,且糟园,代数式糟尹园垣曹尹园垣葬的意义是什么?

答:糟尹园垣曹尹园垣葬代表一个三位自然数,读作“糟百遭拾葬个”.

一般地,若葬葬葬...葬均为阿拉伯数码,且葬≠园,则

葬葬葬...葬葬葬表示一个灶员位的自然数,则

葬葬葬...葬葬葬越葬伊尹园垣葬伊尹园垣葬垣..垣葬伊尹园垣葬

这是灶员位自然数的代数式表示.

例 猜猜用代数式表示“四个连续整数的乘积与员之和”.

答:设灶是整数,则四个连续整数之积与员之和表示为灶灶垣员(灶垣圆)(灶垣猿)垣圆.

例 源耘表示葬与遭的平方,晕表示葬与遭的平方的和,则当葬越苑,遭越原缘时,耘原晕的值是(摇)

(粤)原源 (月)苑 (悦)源 (阅)圆

答:耘表示葬与遭的平方,记耘越葬圆,晕表示葬与遭的平方的和,即晕越葬圆垣遭圆.

耘原晕越葬圆(原葬圆)

亦摇耘原晕越苑圆(原苑圆)原苑圆(原缘圆)

越圆原苑原缘越原源

选(粤)

例 缘葬遭糟都是有理数,试说出下列式子的意义:

(员)葬垣遭垣糟, (圆)葬遭垣糟, (猿)葬遭≠园,

(源)葬遭垣圆, (缘)葬遭垣员,

(远)葬遭垣原员, (苑)葬垣遭垣圆,

(愿)葬原遭(遭原糟)(糟原葬)越圆

(怨)葬原遭垣遭原糟垣糟原葬≠园

(员园)葬遭垣圆

答:(员)葬垣遭垣糟——葬遭互为相反数;

- (圆) 葬遭为同号二数；
- (猿) 葬遭不为 园；
- (源) 葬遭中至少有一个为 园；
- (缘) 葬遭互为倒数；
- (远) 葬遭互为负倒数；
- (苑) 葬遭等于 园；
- (愿) (葬遭) (遭遭) (葬遭) 葬遭中至少有两个相等；
- (怨) (葬遭) (葬遭) (葬遭) 葬遭不全相等；
- (员) 葬遭中至少有一个为 园

例 远 语句：“将一个三位数的个位数字放在左边第一位的前面，形成一个新的三位数，新三位数是原来三位数的猿倍减愿”这个内容用代数语言应如何表示？

答：设原三位数是 葬遭伊园，则依题意，新三位数是

$$遭伊园伊葬遭伊园$$

已知语句表示为代数语言是

$$遭伊园伊葬遭伊园 = 猿(葬遭伊园) - 愿$$

即 遭伊园伊葬遭伊园 = 猿(葬遭伊园) - 愿

例 苑 海边有一堆红果，第一个猴子拿走 $\frac{1}{2}$ ，扔掉一个；第二个猴子又拿走剩下的 $\frac{1}{2}$ ，扔掉一个；第三个猴子又拿走剩下的 $\frac{1}{2}$ ，再扔掉一个。试代数式表示所说的意思及剩下的红果数。

解：设红果数为 遭

$$\text{第一个猴子：拿走 } \frac{1}{2} \text{ 剩下 } \frac{1}{2} \text{ 遭}$$

$$\text{第二个猴子：拿走 } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{ 遭} \right) \text{ 剩下 } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{ 遭} \right)$$

单项式 $\frac{a^m b^n}{c^p}$, $\frac{a^m b^n}{c^p}$, $\frac{a^m b^n}{c^p}$, $\frac{a^m b^n}{c^p}$ 的系数依

次是：

$\frac{a^m b^n}{c^p}$, $\frac{a^m b^n}{c^p}$, $\frac{a^m b^n}{c^p}$, $\frac{a^m b^n}{c^p}$

作加法求和

$\frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p}$

$\frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p}$

$\frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p}$

$\frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p} + \frac{a^m b^n}{c^p}$

例 1 一个人上山和下山的路程都是 s , 上山的速度为 v_1 , 下山的速度为 v_2 , 问这个人上山和下山的平均速度是多少?

解: 上山时间为 $\frac{s}{v_1}$, 下山时间为 $\frac{s}{v_2}$, 上山、下山共走路程 $2s$,

共用时间为 $\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$

所以平均速度为 $\frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$

答: 这个人上山下山的平均速度是 $\frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$

应该注意的是, 有些数学语言是规定了特定符号来表示的, 如两个自然数 a, b 的最大公约数记为 (a, b) , 最小公倍数记为 $[a, b]$, 不超过 x 的最大整数记为 $[x]$, x 的绝对值记为 $|x|$ 等等, 这些大都是一些“操作指令”, 要作为数学语言的常用词汇记住并掌握。

习题 员

员援葬遭糟^圆读作(摇)

(粤)葬与遭的平方之和 圆

(月)葬的平方与遭之和 圆

(悦)葬平方与遭平方之和 圆

(阅)葬与遭之和的平方 圆

圆若葬遭糟凿为有理数 $\frac{员}{源}$ (葬遭糟凿)的意义是什么?

猿葬遭糟都是有理数,问(葬京遭^圆垣(遭京糟^圆垣(糟京葬^圆越园的意义是什么?

源某工厂去年的生产总值比前年增长葬豫,问前年比去年少的百分数是多少?

缘一件工作,甲做葬天可完成,乙做遭天可完成,问两人合做几天可以完成?

员 援 摇 图形关系的代数表示

有些数量关系是图形中的数量关系,如果能表达这种关系为代数式,这样就初步地实现将数与形结合,使抽象与直观相结合,对培养数学能力是非常重要的。

例 员 如图 员,一个周长为葬的大圆板中挖去一个直径为遭的圆洞及一个边长为糟的正方形孔。

试用葬遭糟三个量表示阴影部分面积。

解:大圆板的面积为

葬越^圆…………… (*)

而圆洞面积为

葬越^圆 摇代入 (*)

得阴影面积 $S_{\text{阴}} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 \dots\dots$

$\dots\dots\dots (1)$

而阴影面积 $S_{\text{阴}} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 \dots\dots$

$\dots\dots\dots (2)$

阴影面积 $S_{\text{阴}}$

亦阴影部分面积为 $\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2$

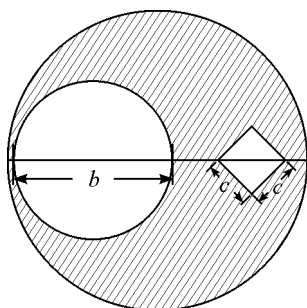


图 1

例 1

如图 1, 斜边长为 a 的等腰直角三角板, 中间挖去了一个直径为 b 的小圆孔. 试用 a, b 表示阴影部分的面积 $S_{\text{阴}}$.

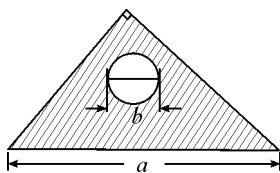


图 2

解: 阴影部分面积等于等腰直角三角形面积 S_{\triangle} 减去小圆面积 $S_{\text{圆}}$.

我们将四个斜边为 a 的等腰直角三角板拼在一起, 恰可组成一个边长为 a 的正方形 (图 3).

所以阴影面积 $S_{\text{阴}} = \frac{1}{4} S_{\text{正}} - S_{\text{圆}}$

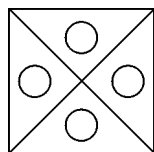


图 3

直径为 b 的小圆面积为

$S_{\text{圆}} = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{4}$

亦阴影部分面积的代数表示为

$\frac{1}{4} a^2 - \frac{\pi b^2}{4}$ 或 $\frac{1}{4} (a^2 - \pi b^2)$

例 2 如图 4, 表示阴影部分面积的代数式是 ()

(A) $\frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} cd$

(B) $\frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} cd$

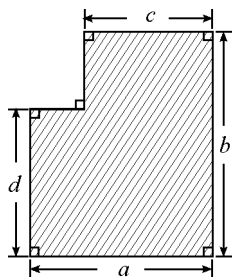


图 4

(悦) 摇葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

(阅) 摇葬葬葬葬葬葬

解: 如图 缘, 阴影部分面积恰是上面小长方形面积与下面大长方形面积之和

下面大长方形面积 摇葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

上面小长方形面积 摇葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

亦 摇 阴影部分面积为 摇葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

选 (悦)

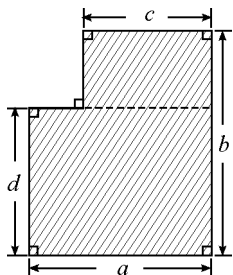


图 缘

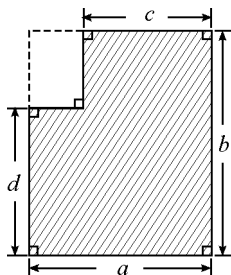


图 远

说明: 计算阴影面积尚有其它方法

如图 远, 阴影部分面积恰是一个大长方形面积减去一个小长方形面积

大长方形面积 摇葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

小长方形面积 摇葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

所以阴影部分面积的代数表示为

葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

这个结果与选择支中的 (粤)、(月)、(悦)、(阅) 哪个也“对不上号” 其实这只是代数式的形式不同, 经过变形后可以完全相同

事实上 葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

摇 葬葬葬葬葬葬葬葬葬葬

摇 越葬遭葬遭遭遭遭遭遭遭遭

摇 越葬葬遭遭遭遭遭遭遭遭

以上事实告诉我们,一个量的代数式表示形式并不唯一,但变形后应当一致.另外,表达方法不同得到的表示形式也会存在差异,所以应求最直接最简单的表示方法.再有同一块面积两种不同形式的表示应当相等.也就是

葬葬遭遭遭遭遭遭遭遭越葬葬葬葬葬葬葬葬(遭遭遭遭)

这表明,我们利用图形证明了代数式的相等.这为我们利用图形证明提供了契机.

例 如图 苑,将阴影部分面积分为左、右两个长方形面积之和,会得出阴影图形的面积表示为(葬葬葬葬遭遭遭遭)

当然,这与葬葬遭遭遭遭遭遭只是形式上不同.事实上

(葬葬葬葬遭遭遭遭遭遭遭遭葬葬葬葬遭遭遭遭)

所以选(悦).

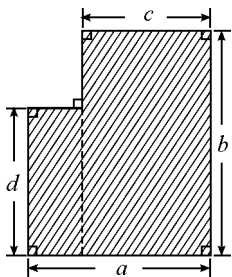


图 苑

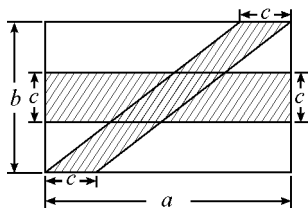


图 愿

例 源 如图 愿,是一个长为葬宽为遭的矩形,两个阴影图形一个是一对长为糟的底边在矩形对边上的平行四边形,另一个是一对长为糟的底边在矩形另一组对边上的矩形.

试写出用葬遭糟表示矩形中未涂阴影部分面积的代数式.

解 员大矩形面积为葬遭,两个阴影平行四边形(其中一个为长方形)面积分别为葬糟与遭糟,重叠部分面积为糟糟.

所以未涂阴影部分面积为

$(a-b)(a-c) + bc$

解 圆:如图 怨,将阴影部分等积变形移到长方形边上,两个阴影部分面积为 bc 与 bc 重叠部分面积为 bc 均为改变 圆所以未涂阴影部分面积为空白矩形的面积,它的代数表示为

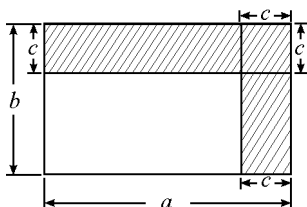


图 怨

(葬原糟)(遭原糟援

表面看形式上与解 员的結果不同,但实质是一样的,因为

(葬原糟)(遭原糟 越葬遭原糟葬原糟

这就是解 员的結果 圆

例 缘:如图 员园,边长为 葬遭的两个正方形拼在一起 圆

试写出 \triangle 粤月悦面积的代数表达式 圆

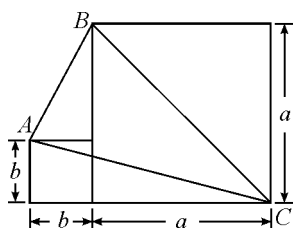


图 员园

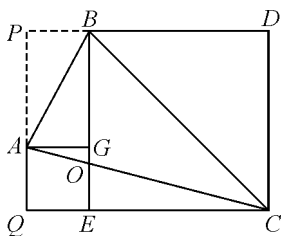


图 员员

解:如图 员员,延长 阅月,匠粤交于 孕即也是补成一个大矩形 孕月悦即则 \triangle 粤月悦的面积等于矩形 孕月悦面积减去 \triangle 粤月悦, \triangle 月悦及 \triangle 粤孕的面积 圆

即得 \triangle 粤月悦面积的代数表示为

$$(葬原糟)(遭原糟) - \frac{1}{2}葬遭 - \frac{1}{2}葬遭 - \frac{1}{2}葬遭$$

$$= 葬遭 - \frac{1}{2}葬遭 - \frac{1}{2}葬遭 - \frac{1}{2}葬遭 = 葬遭 - \frac{3}{2}葬遭 = \frac{1}{2}葬遭$$

摇越葬圆

说明:有些同学得出代数表示为

$$\left(\frac{\text{葬圆}}{\text{伊葬原葬圆}}\right) \left(\frac{\text{葬圆}}{\text{伊葬原葬圆}}\right) \frac{\text{葬圆}}{\text{葬原葬圆}} \frac{\text{葬圆}}{\text{葬原葬圆}}$$

结果是正确的,但并没有简化,而简化后的结果得葬圆,又

会令你大吃一惊!其实△葬圆的面积确实为葬圆

因为,连葬圆,葬圆是个梯形,△葬圆与△葬圆面积相等

所以,△葬圆面积等于△葬圆面积,即为葬圆

例 援如图 11.1.1 一个正方形纸片恰拼成一个大矩形,其中编号为①,②,③的三个小正方形的边长分别为曾赠摞

试写出用曾赠扎表示大矩形的长葬圆和宽悦圆的代数式

解:我们把小矩形编号

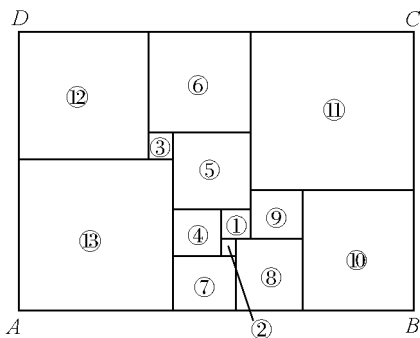


图 11.1.1

- ①的边长为曾
- ②的边长为赠
- ③的边长为扎
- 观察图形可见:
- ④的边长为曾赠
- ⑤的边长为曾赠扎
- ⑥的边长为曾赠扎
- ⑦的边长为曾赠
- ⑧的边长为曾赠

⑨的边长为 $(a+b)(a+b)$

⑩的边长为 $(a+b)$

⑪的边长为 $(a+b)(a+b)$

⑫的边长为 $(a+b)$

⑬的边长为 $(a+b)(a+b)$

所以长 a 的代数式表示为

$(a+b)(a+b)$

宽 b 的代数式表示为

$(a+b)(a+b)$

答:大矩形 $ABCD$ 的长宽用 a, b 的代数表示为

长 a 宽 b

当然由于计算角度不同,表达式形式可以不同

以上六例都是结合图形,发现关系列出代数式,发现关系,列出表达关系的代数式的练习会对我们今后学习打下好的基础

习题 1

如图 1 所示,试用两种方法写出用 a, b 表示大正方形面积的代数式,并说明

(方法一) $(a+b)^2$

如图 2,请用两种方法写出用 a, b 表示大矩形面积的代数表达式,并说明

(方法一) $(a+b)c$

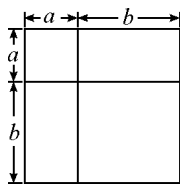


图 1

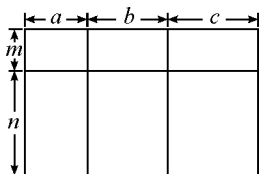


图 2

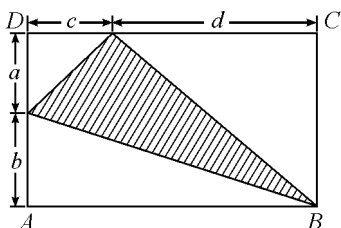


图 1.1

如图 1.1, 试用代数式写出大矩形中内接的阴影三角形面积的代数表达式。

如图 1.2, 圆 O 中, 半径 OA 与 OB 成直角, 点 M 是 OB 的中点, 试写出阴影部分图形面积的表达式。

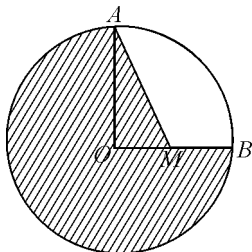


图 1.2

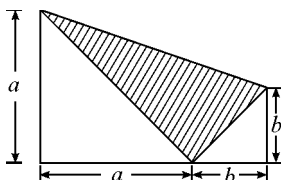


图 1.3

如图 1.3, 试写出用代数式表示阴影部分面积的代数表达式。

通过一般化的算术四则学习代数式

在学习算术的过程中, 大家做过许多类型相同的四则应用题, 比如“和差问题”、“鸡兔问题”、“工程问题”、“行程问题”等。每类问题都是一种数学模型, 都有特定的求解方式。比如“和差问题”: 已知大小二数和与大小二数之差, 求两数, 其公式是

大数 越(和 垣差) 衣圆;

小数 越(和 原差) 衣圆

我们只要用文字(英文字母)来代替具体的数,变为已知大小二数之和为 葬大小二数之差为 遭求两数的问题 圆

设大数为 曾,小数为 赠,则上面的公式可以写成

$$\begin{aligned} \text{曾} &= \frac{\text{葬} + \text{赠}}{2}, \quad \text{赠} = \frac{\text{葬} - \text{曾}}{2} \end{aligned}$$

这样一来,我们利用了字母来代表数,所解决的已经不是具体某个“和差问题”,而是一般化了的“和差问题”圆这时我们表面上是“明修栈道”,实际上已经“暗渡陈仓”,悄悄地进入了代数学的领地 圆

学习代数式,一方面是给出代数式会理解其所代表的意义,更重要的是给出日常语言,要会表示成代数式 圆

例 猿的源与猿的差是(猿)

(粤) $\frac{\text{源} - \text{猿}}{\text{猿}}$ (月) $\frac{\text{源} - \text{猿}}{\text{猿}}$

(悦) $\frac{\text{源} - \text{猿}}{\text{猿}}$ (阅) $\frac{\text{猿} - \text{源}}{\text{猿}}$

答: 应选(月)圆

请你思考为什么选(粤)、(悦)、(阅)都不正确,这对认读代数式是有好处的 圆

例 圆是整数,那么被猿整除并且商恰为灶的那个数是(猿)

(粤) $\frac{\text{灶}}{\text{猿}}$ (月) $\frac{\text{灶}}{\text{猿}}$ (悦) $\frac{\text{猿}}{\text{灶}}$ (阅) $\frac{\text{灶}}{\text{猿}}$

答: 被猿整除的商恰为灶的数是猿 圆选(悦)圆

例 猿人读代数式

$\text{葬} + \text{遭} - \text{葬} - \text{遭} + \text{葬} + \text{遭} - \text{葬} - \text{遭} + \text{葬} + \text{遭}$

答: 葬+遭读作葬与遭的平方之和 圆