

# 奥林匹克数学方法选讲

黄国勋摇编著

上海教育出版社

## 前摇摇头

数学奥林匹克,从 1959 年罗马尼亚首届中学毕业生数学竞赛算起,已有一百一十多年的历史;中国数学奥林匹克,从 1956 年北京、上海等地的中学生数学竞赛算起,已有将近半个世纪的历史;国际性数学奥林匹克,从 1959 年在罗马尼亚布加勒斯特举办的首届算起,也已有四十多年的历史。数学奥林匹克,受到许多国家的高度重视与大力支持。

数学奥林匹克,其目的在于激发青年学生学习数学的兴趣,也是发现人才、培养人才的一种特殊而有效的形式。数学奥林匹克曾选拔了不少优秀人才。匈牙利数学奥林匹克优胜者中,波兰在复变函数论、匈牙利在航天动力学、波兰在测度论、波兰在泛函分析、波兰在逼近论、波兰在组合数学、波兰在图论分别做出了杰出的贡献。美国普特南数学奥林匹克优胜者中,波兰(1959 年)、波兰(1960 年)、波兰(1961 年)、波兰(1962 年)先后获被誉为“数学诺贝尔奖”的菲尔兹奖;1959 年世界数学家大会上被邀请作一小时报告者中,至少有 10 人是波兰的获奖者。

数学奥林匹克,是一种智力的比赛。数学奥林匹克试题,大多出自名家之手,并且经过巧妙构思、精心制作编撰出来的。因此,数学奥林匹克试题中有许许多多令人击掌称赞的好题目。求解或求证一道数学奥林匹克佳题,往往既不需要冗长的推理论证,也不需要繁琐的演绎计算,但需要“灵感”。有这种“灵感”,才能够在“踏破铁鞋无觅处”之时,有那“得来全不费功夫”的顿悟。什么是灵感,按照古代希腊大科学家亚里士多德(公元前 384—前 322)的说法,灵感就是在一刹那间,通过突然闪现在脑中的猜测而抓住事物本质的联系。那些数学奥林匹克优胜者们,就具备在考场上的顿悟,立即抓住题目的本质联系的能力,从而使

问题迎刃而解。但是，“灵感”的到来，不仅需要具备一定的知识为基础，而且需要形象思维和逻辑思维能力的支持。因此，人们普遍认为，知识的积累是重要的，而能力的培养更为重要。

当代美国著名数学家、教育家波利亚(П.М.Полыа)说过：“什么是数学技能呢？数学技能就是解题能力——不仅能解决一般的问题，而且能够解决需要某种程度的独立思考、独创性、想象力和判断力的问题。”一百多年积累下来的数学奥林匹克试题宝库，为人们提供了这种需要一定程度的独创性、想象力和判断力才能解决的数学问题。

本书的题目大都选自国内外的数学奥林匹克佳题，而且重点选择中学数学教学范围之外的趣题，题型为中学数学教学所罕见。为了有助于读者掌握解题技巧，本书按解题方法分门别类，有奇偶性分析与不变性分析、染色技巧与集合分类、抽屉原理、图论方法、映射技巧、贡献法与容斥原理、极端原则与无限下推法、归纳证明与归纳构造、正向推算与逆向推算、旋转圆盘法与状态转移法、配对技巧等，最后是奥林匹克试题的推广。

要读懂书中的例题，只需具备最基本的中学数学常识；要弄通各例题的解题的奥妙，则需要多动脑筋；要掌握所列各种解题方法与技巧，就需要付出辛勤的劳动。这正如波利亚所说：“解题是一种实践性技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴，只能通过模仿和实践来学到它。”本书前十一章共有 114 个例题，可以向读者提供模仿的范例，而第十二章可以向读者提供实践的机会。第十二章通过 12 道奥林匹克佳题的加强与推广，引出 12 个没有给出证明的“命题”与 12 个没有给出答案的“问题”，读者可以作为练习之用。我们没有为各章编写习题，因为我们认为，如果读者能模仿第十二章的做法，则不难通过对各章中例题的进一步思考，为自己设计出合适的习题。这样做，对于解题能力的提高，一定大有好处。

十多年来，作者曾在广西南宁数学奥林匹克夏令营、广西桂林数学奥林匹克夏令营以及南宁二中、南宁三中、柳州地区高中为中學生讲过“数学奥林匹克中的解题技巧”，也曾在广西大学、广西民族学院、

广西师范学院、玉林师范学院与福建的漳州师范学院为大学生讲过“奥林匹克数学数学方法”，在广东潮汕地区第五期数学奥林匹克教练员培训班讲课。作者综合历年来所写的讲稿，经过多次修改与充实，编成了这本《奥林匹克数学方法选讲》。作者希望本书对中学生、大学生、中学数学教师以及青年业余数学爱好者都会有所帮助：既可拓展数学知识视野，又能提高数学解题能力。

由于作者的水平所限，书中难免有不妥之处，尚深望读者不吝批评指正。

黄国勋

二〇〇四年 远月于广西大学

# 目摇摇摇录

## 前言

|                      |    |
|----------------------|----|
| 一、奇偶性分析与不变性分析 .....  | 员  |
| 二、染色技巧与集合分类 .....    | 愿  |
| 三、抽屉原理 .....         | 獭  |
| 四、图论方法 .....         | 源  |
| 五、映射技巧 .....         | 远  |
| 六、贡献法与容斥原理 .....     | 愿  |
| 七、极端原则与无限下推法 .....   | 怨  |
| 八、归纳证明与归纳构造 .....    | 员苑 |
| 九、正向推算与逆向推算 .....    | 员忽 |
| 十、旋转圆盘法与状态转移图法 ..... | 员忽 |
| 十一、配对技巧 .....        | 员愿 |
| 十二、奥林匹克试题推广 .....    | 员蒙 |

## 一、奇偶性分析与不变性分析

可以把全体整数分为两大类,一类是奇数,一类是偶数。一个整数,必定或是奇数,或是偶数,不能既是奇数又是偶数。两个奇偶的两个整数之和是偶数,不同奇偶的两个整数之和是奇数;奇数个奇数之和是奇数,偶数个奇数之和是偶数。应用这些众所周知的简单事实来分析、解决数学问题的方法,叫做奇偶性分析。

在存在性问题的证明中,常应用奇偶性分析方法。比如,著名的哥尼斯堡七桥问题,1736年欧拉(莱布尼兹)就是应用奇偶性分析的方法,证明了:不存在能够走遍这样的七座桥而且每座桥恰好经过一次的遍历路线。

采用奇偶性分析的方法来证明某种结构不存在,通常是先假定这种结构存在,进而论证这种结构的某一种数量表征从这一角度看应是奇数,而从另一角度看应是偶数,由此导出矛盾,最终推翻该结构存在的假定。

下题是1896年匈牙利数学奥林匹克试题。匈牙利数学奥林匹克始于1894年。

【例1】摇开学时,某班级同学们互相握手致意。证明:与奇数位同学握过手的人,有偶数位。

证明 假设该班级有  $n$  名学生,有  $n$  人对同学握过手。与奇数位学生握过手的学生记为  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , 并分别以  $b_1, b_2, \dots, b_k$  表示与该学生握过手的人数;与偶数位学生握过手的学生记为  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , 并分别以  $d_1, d_2, \dots, d_m$  表示与该学生握过手的人数。因为每一次握手都有两名学生,所以

( $b_1 + b_2 + \dots + b_k$ ) 与 ( $d_1 + d_2 + \dots + d_m$ ) 相等,其中  $b_1, b_2, \dots, b_k$  都是奇数,  $d_1, d_2, \dots, d_m$  都是偶数。如果  $k$  是奇数,



瑞典、荷兰等国陆续加入,至今已成为名副其实的国际性数学奥林匹克。国际数学奥林匹克每年的试题由参赛国提供,为公正起见,当年的东道国不提供试题。东道国的选题委员会先从各参赛国提供的预选题中筛选出若干道题,提交给当年的主试委员会。主试委员会最后确定六道题作为奥林匹克试题,并安排在两天内考试,每天考三道题,每次时间为 4 小时 45 分钟。

【例 1】设在三维欧氏空间任意给定  $n$  个格点,其中任意三点不共线。证明:从中可以找到这样的三个点,使得以它们为顶点的三角形的三条中线的交点(重心)也是格点。

证明 设  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$  是空间中三个不共线的点。以这三个点为顶点的三角形的重心坐标  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

为了使  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  是格点,必须有  $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$  都被 3 整除。用同余式的记号表示,即是

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

记号  $a \equiv b \pmod{m}$  表示  $a$  除以  $m$  的余数等于  $b$  除以  $m$  的余数,这里  $a$  可以是  $a$  被  $m$  除的余数。

把所有的整数按被 3 除的余数为 0, 1, 2, 分为下述三类:

0  $\pmod{3}$ , 1  $\pmod{3}$ , 2  $\pmod{3}$ 。

先看  $n$  个格点的第一个坐标数。它们分属于 0  $\pmod{3}$ , 1  $\pmod{3}$ , 2  $\pmod{3}$ , 因而其中必有某  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  个格点其第一个坐标数同属于某个同余类。再看这  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  个格点的第二个坐标数,它们分属于 0  $\pmod{3}$ , 1  $\pmod{3}$ , 2  $\pmod{3}$ , 因而其中必有某  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  个格点其第二个坐标数同属于某个同余类。继续看这  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  个格点的第三个坐标数,如果其中有某

猿个格点的第三个坐标数分属 园皂(黠猿), 员皂(黠猿), 圆皂(黠猿), 则这猿个格点符合要求;否则,其中必有某猿个格点的第三个坐标数同属某个同余类,则这猿个格点也符合要求援

例猿的证明采用了同余类技巧,是奇偶性分析的自然推广援员苑年国际数学奥林匹克还有另一道预选题,与例猿的解法一样,可采用同余类(模猿同余)技巧援这道题是越南提供的:在直角坐标平面上有灶个格点,灶>猿,其中任意三点都构成一个三角形,而且其重心不是格点援求符合上述要求的最大点数援

下题是 圆苑年国际数学奥林匹克试题,也是采用同余类分析技巧来解的援

【例源】员圆张卡片上分别写有数字 员到 员圆援一位魔术师把这员圆张卡片放入颜色分别是红色、白色、蓝色的三个盒子里,每个盒子里至少放入了一张卡片援

一位观众从三个盒子中挑出两个,并从中各选取一张卡片,然后宣布这两张卡片上的两个数的和数援魔术师知道这个和数之后,便能够指出哪一个是没有被观众取出卡片的盒子援

问共有多少种放卡片的方法,使得这个魔术总能够成功?(两种方法被认为是不同的,如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子援)

答摇共有 员圆种援

分析摇“复杂问题简单化”援灶越员圆,太大援先从灶越猿,源,缘开始,寻找解题的关键与思路援

为简便起见,将整数蚤的卡片所放入的盒子的颜色定义为该整数的颜色,以 则憎,遭依次代表红色、白色、蓝色援如下的排列

则憎 遭遭憎 则遭憎

表示数 员,圆,猿,源,缘,远,苑,愿依次是红色、白色、蓝色、蓝色、白色、红色、蓝色、白色,即自左至右算,排在第蚤位的字母(则憎,遭)表示数蚤的颜色援

当灶越猿时,因为每盒不空,所以红色、白色、蓝色各有一个数,其排列方式(即猿张卡片的放法或猿个数的染色方法)有猿!越远种:赠遭·源

则增,遭增,遭则 憎遭,憎遭援这 远种排列方式其实质(对本题而言)是相同的,因此,只要考虑其中的一种排列,比如 则增,即数 员是红色,数 圆是白色,数 猿是蓝色援因为,当从红色盒、白色盒各取一数时,有

$$\text{员垣圆越猿} = \text{圆} \pmod{3} \text{ (皂獐猿)};$$

当从红色盒、蓝色盒各取一数时,有

$$\text{员垣猿越源} = \text{员} \pmod{3} \text{ (皂獐猿)};$$

当从白色盒、蓝色盒各取一数时,有

$$\text{圆垣猿越缘} = \text{圆} \pmod{3} \text{ (皂獐猿)援}$$

这表明,由两数之和关于模 猿的余数可以确定没有从中取出卡片的盒子的颜色:圆 (皂獐猿),是蓝色盒;员 (皂獐猿),是白色盒;圆 (皂獐猿),是红色盒援因此,当 灶越源时,使魔术总能成功的放卡片方法有 远种援

当 灶越原时,因为每盒不空,所以三个盒里的卡片数字为 员,员,圆援其放法总计有 猿<sub>源</sub>越远种援下面以红色的数字有 圆个,白色、蓝色的数各有 员个为例,有下面 员圆种排列方式:

$$\text{则增 则增 则则 则增 则增 则则 则增 则增 则则}$$

$$\text{则增 则增 则增 则增 则增 则增 则增 则增 则增}$$

其中的 则增,则增与 憎则,遭增四种符合魔术师的要求,其余 愿种都不符合要求援对于 则增的排列,可得到与 灶越源时 则增非列的相同结论:两数之和  $\equiv$  圆,员,圆 (皂獐猿)表明没有取出卡片的盒子依次是蓝色盒、白色盒、红色盒援对于 憎则的排列,易知当取出的两数之和等于 缘时,没有从中取卡片的盒子是红色盒;当取出的两数之和  $\leq$  源时,没有从中取卡片的盒子是蓝色盒;当取出的两数之和  $\geq$  远时,没有从中取卡片的盒子是白色盒援

对于 灶越缘,可以进行类似的分析,从而得到如下的解题思路援分为两种情况考虑:存在连续三个数其颜色互不相同;不存在三个连续的数其颜色互不相同援

证明摇分两种情形讨论援

情形 员:存在某个 蚤数 蚤蚤蚤,蚤蚤蚤的颜色互不相同,设其颜色排列为 则增援如果放卡片的方法符合魔术师的要求,那么数 蚤蚤蚤若 蚤

$\text{垣} \leq \text{员}(\text{圆})$  必为 则色或数  $\text{蚤}(\text{员})$  若  $\text{蚤}(\text{员}) > \text{员}(\text{圆})$  必为 遭色, 即出现 赠遭或遭赠的排列援证明如下: 设  $\text{蚤}(\text{员}) > \text{员}(\text{圆})$  因为  $\text{蚤}(\text{员}) > \text{蚤}(\text{圆})$  垣  $\text{蚤}(\text{圆})$ , 所以  $\text{蚤}(\text{圆})$  的颜色既不能是  $\text{蚤}(\text{员})$  的颜色 憎, 也不能是  $\text{蚤}(\text{圆})$  的颜色 遭, 否则, 当取出的两数之和等于  $\text{圆} \text{蚤}(\text{圆})$  时, 魔术师无法作出绝对准确的判断, 所以  $\text{蚤}(\text{圆})$  的颜色只能是 则色援设  $\text{蚤}(\text{圆})$  同理可以推知,  $\text{蚤}(\text{员})$  的颜色只能是 遭色援因此, 符合魔术师要求的排列只可能是下述 远种: 三种不同的颜色按 赠遭, 赠憎, 憎遭, 憎赠, 遭憎, 遭赠之中的某一种, 比如是按 赠遭的模式反复出现:

则憎遭则憎遭则憎遭... 则憎遭则

上述 员至 员(圆) 的 员(圆) 个数字的排列符合魔术师的要求: 当两数之和 = 圆( 皂豕猿) 时, 没有从中取卡片的盒子是蓝色盒; 当两数之和 = 员( 皂豕猿) 时, 没有从中取卡片的盒子是白色盒; 当两数之和 = 圆( 皂豕猿) 时, 没有从中取卡片的盒子是红色盒援

情形 圆: 不存在三个连续的数其颜色互不相同援设 员是 则色, 令  $\text{蚤}$  为最小的不是 则色的数, 并不妨设  $\text{蚤}$  是 憎色; 设 噪为最小的 遭色的数, 并不妨设  $\text{蚤}(\text{噪})$  因为  $\text{蚤}(\text{员})$  是 则色,  $\text{蚤}$  是 憎色, 所以  $\text{蚤}(\text{员})$  不是 遭色, 即有  $\text{蚤}(\text{员}) > \text{员}(\text{圆})$

先证明  $\text{噪} > \text{员}(\text{圆})$  如果  $\text{噪} \leq \text{员}(\text{圆})$ , 因为  $\text{蚤}(\text{噪}) > \text{蚤}(\text{员})$  垣  $\text{噪}(\text{员})$ , 如果  $\text{噪}(\text{员})$  是 遭色或 憎色, 则当取出的两数之和等于  $\text{蚤}(\text{噪})$  时, 魔术师无法作出绝对正确的判断, 因此,  $\text{噪}(\text{员})$  只能是 则色援但是,  $\text{蚤}(\text{噪}) > \text{蚤}(\text{员})$  垣  $\text{噪}$  若  $\text{蚤}(\text{员})$  不是 遭色, 则当取出的两数之和等于  $\text{蚤}(\text{噪})$  时, 魔术师无法作出绝对正确的判断, 因此有  $\text{噪} > \text{员}(\text{圆})$

再证明, 对任意的 躁(员), 躁不是 则色的援否则, 设有某个 躁(员) 是 则色的援如果 躁(怨) 是 则色的, 因  $\text{蚤}(\text{躁}) > \text{蚤}(\text{员})$  垣  $\text{躁}(\text{怨})$ , 则当取出的两数之和等于  $\text{蚤}(\text{躁})$  时, 魔术师无法作出绝对正确的判断, 所以 怨不是 则色的, 从而 怨只能是 憎色的援因为 躁(怨) > 躁(员) 垣  $\text{躁}(\text{怨})$ , 所以若 躁(员) 不是 遭色, 则当取出的两数之和等于 躁(怨) 时, 魔术师无法作出绝对正确的判断, 所以 躁(员) 只能与 员(圆) 同色, 即为 遭色, 这与只有 员(圆) 是 遭色的已知结论矛盾援这表明, 只有数 员是 则色的援于是得到, 数 员, 圆, 猿, ... ,

怨,怨,员的颜色如下排列:赠赠...憎憎援下面证明,这种排列符合魔术师的要求,他可以作出如下绝对正确的判断:当所取出的两数之和约员时,没有从中取卡片的盒子是蓝色的;当所取出的两数之和越员时,没有从中取卡片的盒子是白色的;当所取出的两数之和跃员时,没有从中取卡片的盒子是红色的援因为,赠赠..憎憎,赠赠..遭遭,遭遭..赠赠,赠赠..憎憎,赠赠..遭遭都符合要求,即共有远种援

总之,共有员种放卡片的方法使魔术师能够作出绝对正确的判断援

下题是员怨园年国际数学奥林匹克试题援

【例】缘摇求满足下述性质的自然数灶集合{灶,灶垣员,灶垣圆,灶垣猿,灶垣原,灶垣缘}可以分为粤,月两组,使得粤中各数的乘积与月中各数的乘积相等援

解摇设灶是满足题中要求的自然数,粤与月是符合题中要求的分组,即粤中各数的乘积与月中各数的乘积相等,不妨设此积数为

$$葬越素素...素,$$

其中素,素,...,素是葬的素因子援因此,如果粤中有某个数灶垣噪含有素因子素,则月中必有某个数灶垣噪也含有素因子素援因噪躁故可设噪垣噪因为灶垣噪与灶垣噪都含有素因子素,所以素整除(灶垣噪)原灶垣噪越噪原噪援因为员<噪原噪缘,所以素只能是圆,猿援但是,灶垣员,灶垣圆,灶垣猿,灶垣原这四个数中若有某一个数含有素因子缘,则灶,灶垣员,灶垣圆,灶垣猿,灶垣原,灶垣缘这六个数中只可能有一个数含有素因子缘,与上面已知的结论矛盾援因此,灶垣员,灶垣圆,灶垣猿,灶垣原这四个数,它们的素因数只能是圆与猿;这四个数恰有两个奇数两个偶数,而奇数不可能含素因子圆,即这两个奇数分别是遭越猿与糟越猿;因为遭原糟越圆设遭跃糟,所以猿原猿越圆援但是,猿原猿≠圆,且是猿的倍数,故有猿原猿跃圆,与猿原猿越圆矛盾援这表明,满足题中要求的灶不存在援

员怨园年墨西哥提供给国际数学奥林匹克的一道预选题,可以看作是上例的延伸:把乘积数改为和数,把灶改为员怨园,把缘改为噪援这道

题目是：求正整数  $n$ ，使得集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  能够分成两个不相交的子集  $A$  与  $B$ ，使得  $A$  中各数之和与  $B$  中各数之和相等。本题的答案是： $n=0$  且  $n \geq 1$ ，或者  $n=3$ 。所采用的方法是奇偶性分析的推广，即采用同余类技巧（模 3 同余）。

愿伊愿棋盘用 112 张多米诺（图 1-1）骨牌（即 1 伊 2 骨牌）完全覆盖（骨牌不重叠、不伸出棋盘外），比如图 1-1 所示，可以使得沿任意一条格子线把棋盘剪成两部分时，都一定会剪断某些骨牌。对于 2 伊 2 棋盘，情况如何呢？下题是 1954 年全俄数学奥林匹克试题。全俄数学奥林匹克，是原苏联加盟共和国一级的数学奥林匹克。全俄数学奥林匹克每年举办一次，分为八年级、九年级、十年级三组进行。

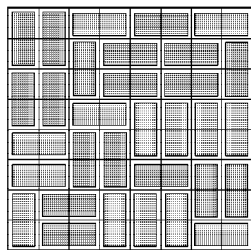


图 1-1

【例 1】摇在 2 伊 2 棋盘上，用 1 张多米诺骨牌完全覆盖。证明：对于任意一种覆盖方式，都可以找到一条水平的，或者竖直的格子线，沿这条格子线把棋盘剪成两个部分时不会剪断任何一张骨牌。

证明：沿某条格子线把 2 伊 2 棋盘剪成为两个部分，如果有某些骨牌被剪断的话，那么，被剪断的骨牌不可能是奇数张，否则，两部分的小方格数都必是奇数，这对 2 伊 2 棋盘是不会出现的。假设若存在一种覆盖方式，使得沿任意一条格子线把 2 伊 2 棋盘剪成两部分时，都会剪断某些骨牌，那么，因为剪断的骨牌不会是奇数张，所以至少被剪断 2 张。2 伊 2 棋盘有 3 条格子线，而每张骨牌都恰好能被一条格子线剪断，因此，覆盖这 2 伊 2 棋盘的多米诺骨牌至少有 6 张。这与 2 伊 2 棋盘被 1 张多米诺骨牌完全覆盖的事实矛盾。

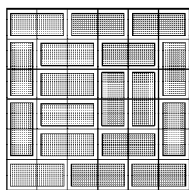


图 1-2

例如，在图 1-2 中，沿第 1 条水平格子线不会剪断骨牌。

下题是 1954 年中国数学奥林匹克试题。

【例 2】摇能否把  $1, 1, 2, 2, \dots, n-1, n-1$  这些数排成一行，

使得两个员之间夹着一个数,两个圆之间夹着两个数,...,两个员之间夹着一千九百八十六个数?请证明你的结论援

解摇不可能援假若这圆伊员个圆和猿个圆个数能按题中要求排成一行

葬,葬,葬,...,葬援

因为两个奇数圆伊员,圆伊员中间夹着圆伊员个数,所以这两个奇数在上述的排列中,或是都排在奇数号位上,或是都排在偶数号位上;因为两个偶数圆伊圆,圆伊圆中间夹着圆伊圆个数,所以这两个偶数在上述的排列中,有一个排在奇数号位上,而另一个排在偶数号位上援在圆伊员个位置中,奇数号位置与偶数号位置各占一半,即各有员个援

现在考虑这员个奇数号位置援从上面的分析可知,排在奇数号位置上的任意一个奇数必然成对地出现,所以有偶数个(设为圆伊圆个)奇数排在奇数号位置上;而排在奇数号位置上的偶数恰好有圆伊圆个:圆,源,远,...,员援因此,有

圆垣圆猿越员援

这不可能援这表明,符合题中要求的排法不存在援

□

上题是前苏联提供的国际数学奥林匹克预选题的特款援前苏联员年提供下述预选试题:求所有具有下述性质的自然数灶,能够把圆灶个数员,员,圆,圆,猿,猿,...,灶,灶排成一行,使得当噪越员,圆,猿,...,灶时,在两个噪之间恰有噪个数援

此题的答案是:灶越原皂或灶越原皂原员,其中皂是自然数援比如圆猿圆猿猿,圆猿圆猿圆猿援

前苏联提出的这道国际数学奥林匹克员年的预选题虽然未被选上,但其特款被中国数学奥林匹克选为员年的试题,后来,又经改造,成为员年加拿大数学奥林匹克的试题:一副牌有圆灶张,其中一张“王”,而员,圆,...,灶各两张援把这圆灶张牌排成一行,使得“王”在正中央,且对每个噪,噪越员,圆,...,灶,两个噪之间恰有噪原员张牌援问:当灶≤员时,对怎样的灶,上述安排是可能的?对怎样的灶,上述安排是不可能的?此题的答案是:当猿灶灶是奇数时,

上述安排是不可能的 ; 对于  $灶 \leq 员$ , 当  $灶 > 猿$ , 源, 苑, 愿时, 上述安排是可能的 : 员猿王 圆猿; 员猿源王 猿圆; 员猿猿源王 缘源圆; 缘源员猿苑王 愿圆猿猿援

【例 愿摇把写有 员, 圆, 猿, 源, 缘, 远, 苑, 愿的八张 员伊员卡片, 放进一个 猿伊猿的方格盘上, 如图 员猿 蚤所示援问 : 能不能通过卡片在方格盘内的上下左右滑动( 卡片不许重叠 ), 使图 员猿 蚤变成图 员猿 蚤?

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 8 | 7 |   |

(i)

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 |   |

(ii)



解摇不可能援如将图 员猿 蚤的八个数字, 自上而下、由左到右排列, 则图( 蚤)可排成

员, 圆, 猿, 源, 缘, 远, 苑, 愿 ( \* )

而图( 蚤)可排成

员, 圆, 猿, 源, 缘, 远, 苑, 愿 ( \*\* )

式 ( \*\* ) 中的八个数, 是依从小到大的排列 ; 而式 ( \* ) 中的八个数, 除了愿排在比它小的 苑之前外, 其余任意两数都是小的在前大的在后援在一个排列中, 如果一对数码的前后位置是大的在前小的在后, 则称它们在该排列中形成一个逆序援显然 ( \* ) 中的排列的逆序数为 员 ( \*\* ) 中的排列的逆序数为 圆援任何一张卡片在 猿伊猿方格盘上左右滑动, 都不影响八个数的排列次序, 故 猿伊猿方格盘中八个数的排列的逆序数不变援任何一张卡片在 猿伊猿方格盘上下滑动一次, 都使得这张滑动的卡片与另两张卡片的前后位置倒换了过来援如果滑动的卡片上的数码都大于另两张卡片上的数码, 则上滑时, 逆序数增加 圆, 下滑时逆序数减少 圆; 如果滑动的卡片上的数码都小于另两张卡片上的数码, 则上滑时逆序数减少 圆, 下滑时逆序数增加 圆; 如果滑动的卡片上的数码与另两张卡片上的数码相比, 比其中的一张大, 比另一张的小, 则不论上滑或下滑, 逆序数

都保持不变。总而言之，卡片滑动一次，逆序数或是加 1，或是减 1，或是不变。图 1-3 中的逆序数为 11，不论以后如何滑动卡片，其逆序数都必然是奇数。但是，图 1-4 中的逆序数为 10，是偶数，因此，通过卡片的上下左右滑动，不可能把图 1-3 变成图 1-4。

有种滑块游戏，曾在欧洲风靡一时。把源伊原棋盘的右下角那一格剪掉，如图 1-4 所示。把分别写着 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 的十四张卡片放进残缺的源伊原方格盘上的十四个方格中，如图 1-4 所示。问：能不能通过卡片在方格盘里的上下左右滑动，使十四张卡片的排列变成图 1-5？

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
|    | 1  | 2  | 3  |
| 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 |
| 12 | 14 | 13 |    |

(i)

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
|    | 1  | 2  | 3  |
| 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 |    |

(ii)

图 1-4

解决滑块问题，与代数学中的重要概念偶排列、奇排列密切相关。一个由数码组成的排列，如果排列中的逆序数是偶数，则称为偶排列；如果逆序数是奇数，则称为奇排列。按照例 1 的移动规则，奇排列不可能变成偶排列，因此图 1-3 不可能变成图 1-4。图 1-4 的滑块游戏，可仿此得到解决。

例 1 属于变换问题，或称操作问题。有关变换问题，都包含三个要素：起始状态、终止状态、变换规则。解决例 1 的关键在于：对起始状态、中间状态、终止状态赋予某种数量表征（逆序数），进而指出起始状态具有“奇性”，终止状态具有“偶性”，而该变换规则具有保持“奇偶不变”的性质，因而每个中间状态都具有“奇性”，从而最终证明了在该变换规则下，不可能把例 1 中的图 1-3 变成图 1-4。在这里，把奇偶性分析方法与不变性分析方法结合了起来。

有关变换的问题有两类，第一类是要证明，在该变换规则下，不可

能经过有限次的变换,把起始状态变成所要求的终止状态;第二类是要证明,在该变换规则下,有可能经过有限次的变换,把起始状态变成所要求的终止状态援

解决第一类问题常用不变性分析方法:对起始状态、终止状态的某种本质特征(就该问题而言)作出描述,指出起始状态具有性质孕,终止状态不具有性质孕而具有性质匝,然后证明,在该变换规则下的任意一个中间状态都具有性质孕,即性质孕是该变换下的不变性,从而最终证明了,不可能经过有限次的变换,把起始状态变成所要求的终止状态援

解决第二类问题常用的方法是构造法:给出能够把起始状态变成终止状态的一系列变换程序,即设计出这种变换程序援

下题是 员怨怨年南斯拉夫数学奥林匹克试题援南斯拉夫数学奥林匹克始于 员怨缘年援

【例 怨】摇在圆周上按任意顺序写上四个 员与五个 园援然后进行下面的变换:在相同的两个相邻数字之间写上 园,而在不同的两个相邻数字之间写上 员,并擦掉原来的九个数字援接着进行同样的变换,如此继续援证明:不管这种变换进行多少次,都不可能得到九个都是 园的数字援

证明摇否则,不妨设在第 噪次变换之后,第一次得到九个都是 园的数字援于是,在第 噪原员次变换之后得到的九个数,一定都相同,因而这九个数一定都是 员援这样一来,就可推导出,在第 噪原员次变换后得到的九个数,一定是每两个相邻的数都不相同,有一个是 园另一个是 员援由此又推导出,在第 噪原员次变换后得到 园的个数与 员的个数应当一样多,因而得到偶数个数援但是,开始时是九个数,而且在变换过程中一直保留着九个数,即一直保留着奇数个数,不可能在第 噪原员次变换后得到偶数个数援  $\square$

下题是 员怨源年国际数学奥林匹克预选题,由瑞典提供援

【例 员】摇 员怨源位姑娘围着一张圆桌,玩一副 员怨源张牌的游戏援开始时,姑娘甲手中拿着所有的牌援如果至少有一位姑娘手上拿着不  
· 园 ·