

第一章 两个基本的观念转变

开宗明义 本书的一个重要意图 是要提倡一种符合国际数学教育心理学发展潮流的理论倾向，那就是：努力用建构主义的理念来引导和探讨数学教育中的理论和实践活动，努力用现代认知理论的观点来解释、分析和评价教学过程中的现象和问题，以促进数学教育改革过程中的观念转变，有利于数学教育工作者对当前的由应试教育向素质教育转轨的意义的理解和认识。为此，我们将首先讨论这两个与数学教育心理学有密切关系的观念问题，希望不仅对全书，也能对大家在看待数学教育中的所有情境和问题时有一个比较明确的定向。

一、从传统的教学观向建构主义教学观转变

1. 心理学与哲学认识论的关系

心理学理论由于自身的性质和特点，在传统上与哲学认识论有着密切的渊源关系。数学教育心理学所研究的学生的认知，是一种具体的、个体的、短期的认识过程，而哲学认识论则是揭示人类知识的属性和人类总体的、长期的认识发展规律。因此，前者是探讨微观过程，后者则研究宏观过程。显然，宏观理论对微观探讨起着一种本质上的指导作用，它将引导心理研究的方向。反之，如果数学学习心理学有了适当的认识论定位，就获得了理论准备和思想武器，而如果心理学研究得出的结论能上升到认识论的高度，也就具有了深刻性和普遍性。

认识论所涉及的首要的、根本的问题是：知识是什么？由此就

可派生出很多有关的问题，例如：知识是如何获得的？活动、感知、语言符号等在知识发展过程中起什么作用？针对数学而言，相应就会产生如下问题：数学是什么？它的本质是什么？数学与人类的经验是什么关系？对这些看似纯理论的问题的回答，对于数学教育来说却是很实际、很重要的，因为它们可能直接影响到教师和学生，对教和学中的过程和行为形成不同的观念。例如，有些人认为，数学是一种永恒的、不变的、毋庸置疑的真理，是我们的前辈像早年探险家在航海探险中发现了新大陆那样所发现的一批事实，其中的艰难不是人人有能力克服的，我们后人只需承认它掌握它就可以了。按照这些看法，就可能形成一套相应的学习数学的方法。例如，让学生根据现有的经公理化方法组织起来的一个个数学分支来接受这些现成的知识。而如果认为数学是从人类的社会实践中总结、创造出来的一套关于客观世界的数量关系与空间形式的知识，其中的实践过程是当今学生最需要体验、学习、掌握的，那么就会采用另一套学习数学的方法，产生不同的效果。

2. 数学哲学论点的含意

20 世纪上半叶由 Russell 悖论引发的关于数学基础的数学哲学辩论，出现了逻辑主义、直觉主义和形式主义的三派观点。这些试图确定数学本质的观点，实际上也涉及关于数学本身的认识论问题。

逻辑主义者认为，数学的思想、方法和概念都是从属于逻辑的，因此可以将其看成是逻辑的一个子集。数学命题完全可以用一般性的逻辑命题来表达。它们是否成立则可从它们的形式而不是从它们在特定情境下的具体解释来确定。这个观点的一个例子是：从 $Z-F$ 公理下的集合论推导出整个数学。这种想法实际上有一个前提，即数学是外部存在的。这就是常说的“Plato 主义”的观点。逻辑主义观点没有成功的根本原因在于数学是不能脱离情境的。一旦抽去了具体情境，数学也就无法展开和发展了。

直觉主义的观点认为，经典数学会产生悖论，原因就在于引入了超出人类直觉的概念和工具。要将悖论排除掉，就必须规定只能采用归纳性方法和构造性证明，否则就会发生歧义，引出矛盾。这样一来，直觉主义者就只承认经典数学中的一部分内容，这些内容必须是以自然数为基本出发点，用构造方法和构造性证明得到的。例如他们不承认反证法因此也不承认“排中律”。按照他们的设计，现存数学就必须抛弃许多内容，并且把逻辑看成是数学的子集。这种否定许多数学原理和内容的观点当然得不到大多数数学家的赞同。

形式主义的看法是，可以将数学建成在形式化公理控制之下的形式系统。只要将公理系统恰当地建立起来，使公理能满足最基本的条件（完备性、独立性和相容性，即公理的数量不多不少，公理之间无矛盾）并且所讨论的元素也是形式化的（即完全忽略所讨论的元素的具体意义，它们可以是点、线、面，也可以是桌子、椅子、啤酒杯），那么人们就可以用一阶语言将整个分支的数学内容推导和编排出来。形式主义的方案在一些数学分支中取得了很大的进展，但最终仍被 Gödel 的定理否定了。

三个学派提出的数学哲学论点，本意是要解决数学基础的理论问题，但在客观上包含了各自对数学本身的看法。逻辑主义所谈的数学内容就是经典数学的要素：定义、公理和定理。直觉主义则将数学看成是通过构造方式和归纳步骤，由最初的推理得到的。在形式主义者眼中，数学是由形式公理结构形成的一大套形式命题系统。它们各有立论的侧重点，但从认识论的角度看，它们又有一个共同的特点：即都将数学当作是已经完成了的数学结论的集合体，等待作某种方式的组织，这样的视角是不适宜数学教育方面的解释的。因为，学生的任务不只是从外部欣赏数学家们创造的现成的理论，接受它的意义，而是要理解和掌握数学，需要学生进入数学产生和形成的内部动态过程，弄清它生长的动力、原因和方法，把握数学的思想。

Lakatos(1987)另辟蹊径从数学研究、创造的角度来讨论数学哲学,从而引出了新的认识论含义。通过对 Euler 多面体公式的建立、证明和提反例、作修正的过程的分析,他指出,数学在生长中是难免有错的,需要依靠假设、尝试、证明、接受反驳、调整等一系列复杂的、有实践性意义的过程来建立。所以,深入到内部看,数学不是铁板一块,不是顺顺当当地就得出结论,得到增长和发展的。在经历从不全面到全面,从不严格到严格,从不合理到合理的过程时,需要人们多次的尝试、修正工作,这些工作都有一定程度的经验性。Lakatos 认为数学证明或广义地讲数学研究和数学学习是一个思想实验或“准实验”要有投入者的亲身实践和体验。同时这些经验常常要经过人们的交流、解释、批驳等合作性活动通过开放性的探讨使数学的可靠性建立在“数学共同体”的公共信念之上,取得共识。它们不应只当作个人拍脑袋、闭门思过、苦思冥想的结果。

Lakatos 观点的新颖之处,在于视数学为一个活的过程,而不是已经终结的定论。在数学生长的过程中,充满了寻找真理但又“难免有错”的想法和活动。对于个人来说,亲自参与数学的经验性活动是至关重要的,而且又必然需要有社会交流,推动数学的发展。他的观点对建构主义理论有着强烈影响。

3. 发生认识论的新视角

当前令人关注的、从心理方面对数学认识论产生巨大影响的理论是著名学者 Piaget 提出的。虽然他于 1980 年去世,但他的发生认识论已经在数学教育界引起了普遍的响应。他的观点与早期的建构主义哲学相结合,经后人努力,逐步发展成现在数学教育的建构主义理论,对数学的认识提供了比较令人满意的解释和导向。

(1) 认识的基础是活动

关于“什么是知识?”,什么是基本的认识活动?等问题,一直是认识论的首要问题,在哲学上早就有过争议。人的认识是从天上掉

下来的，还是人的头脑里固有的？先验主义认为，人的认识是天生的，只是后来将其加到了实际事物上。机械的反映论认为，知识存在于外界，人获得认识，学到知识，完全来自于客体，这甚至可用“写照”、“复制”这样的词来加以描述。在这两种截然相反的观点之间，Piaget(1986, 1990) 以其独特的眼光，把实践和认识当作一个整体来看待。他不赞成把认识完全归于客体，也不赞成将其完全归于主体。认识既不是来自主体，也不是单纯地起源于客体，而恰恰是产生于它们之间。用他自己的话来说，“认识既不是起因于一个有自我意识的主体，也不是起因于业已形成的（从主体的角度来看）会把自己烙印在主体之上的客体”。他提出，“认识起因于主客体之间的相互作用。这种作用发生在主体与客体之间的中途，因而同时既包含着主体又包含着客体”。这就是他展开理论的起点。

具体地讲，在认识过程中，无论是从主体到客体，还是从客体到主体，都存在着起中介作用的一些中介物。与其他认识论的看法不同，Piaget 认为，认识并不是简单地来自感觉和知觉，“一开始起中介作用的并不是知觉，而是可塑性要大得多的活动本身”；所有认识都包含有新东西的加工制作的一面”。Piaget 称这种加工制作为“活动”和“动作”，它是主客体之间唯一一个可能的联结点。不可分离的交互作用产生了作为知识源泉的动作，因此，知识可以追溯到个体对客体的活动，对情境的处理。认识就是从活动开始的。

Piaget 并未对“活动”作严格定义，但实际上是指主、客体之间的任何相互作用。它涵义很广，包括了主动或被动的、有意或无意的活动，也就是说，任何相互作用都会对主体产生认识意义。

Piaget 提出，“认识一个对象并不是去描摹它，而是意味着对它发生作用，意味着构成转变的系统”，知识就是转变系统。他认为，活动、动作有两种，一种是直接作用于外界的个别动作，如摸、推、拉、掷等动作元素，另一种是个别动作组成的协调动作。前者称为物理动作，后者则称为逻辑数学动作。主体的物理动作作用于客

体可以改变它的位置、动作或某些性质。逻辑数学动作不改变个别客体的原有特性和关系，而是使各个客体结合在一个新的结构中，从而具有原先不具备的特性。这个时候，知识来源于动作，而不是来源于客体，它所体现的是主体活动的性质。在对客体作活动时，外部的动作和活动逐步“内化”为思维上的操作活动，成为思维运算。通过外部和内部活动，主体就发生不同的知识。Piaget 明确地将人类的知识分为两类，一类是物理知识，另一类是逻辑数学知识。它们都派生于人的活动，产生于实际的具体的动作，但抽象的对象和意义不同。通过个别动作的作用，从具体对象本身抽象演绎出来的，叫物理知识；从协调动作或逻辑数学动作抽象演绎出来的即是逻辑数学知识。他分别称这两种抽象为简单抽象（或经验抽象）和反省抽象。“反省”除了有反射、自省的含意外，还指层次的提高、重组思维的心理过程。

Piaget 的这些观点既指出了数学知识的客观性，又指出了它与普通意义上的客观性的区别，体现了主体活动的客观性和客观规律的主体性。对于我们理解和解释数学、数学思维的抽象性、形式化特点是很有启发的。对于数学教育来说，我们可以把上述思想看作是“数学教学是数学活动的教学”这个观点的心理学理论根据。按照 Piaget 的理论，数学的认识是一种活动和反省抽象的过程。学生作为认识主体，通过发挥自己的能动性，在行动上和思想上转变对象，并掌握这种转变的机制，从中得出数学概念和结论，获得知识。因此，数学教学就不应仅仅教数学结论，而要展开数学活动，以形成心理运算的基础。一方面不能没有活动，另一方面也不能为活动而活动，仅仅通过思维来看出活动结果，而须将学生的注意力集中到动态的思维过程上，通过思维运算和反省抽象来认识理解和掌握数学的结论。

(2) 知识产生于建构

Piaget 赞成认知心理学关于认知结构的概念，并进一步提出结

构或整体只是系统组成规律的结果，首要的事情是使结构得以形成的自然过程或逻辑程序。为此，他提出了“建构”即结构的构造、改进和更新的概念。他指出“发生认识论主要的成果是这样一个发现，我们获得知识的唯一途径是凭借连续不断的建构”，“认识的获得必须用一个将结构主义和建构主义紧密结合起来的理论来说明。也就是说，每一个结构都是心理发生的结果，而心理发生，就是从一个较初级的结构过渡到一个不那么初级的（或较复杂的）结构”（Piaget, 1986, 1990）人们获得知识的途径，就是连续不断地建构。这里所指的结构，除了我们平时理解的知识点及其网络外，首先是指形成各知识点的稳定的关系模式，即图式。

“建构”的观点与“活动”的观点有着紧密的联系，或者说建构是对活动机制的进一步说明。在学习的基础活动上，最基本的学习方法就是建构。学习不是简单地感知，被动地接受，而须学生自己积极、能动地在行为上、心理上构造，通过连续不断地建构得以发展。

Piaget 的“发生认识论”的本意是要通过对人类知识的发生和智慧的发展的分析，对整个人类的认识提供解释并作出指导。对于数学认识或数学学习来说，数学的发展史及其分析，则从知识发展的角度为它提供了认识论依据。

学生的数学学习实际上是在学校教育条件下重新发现和认识人类数学知识的过程。Piaget 的结构和建构的思想启发我们要重视发挥认知结构在教学中的作用，使其逐步完善，尤其不应将数学知识看作是静止的。它来自于一个动态的建构。我们的教学就是要教学生如何发挥主动性，自己去建构自己的数学世界，建构起自己对它的理解。

4. 建构主义理论的精辟思想

我们的时代正在呼唤新的数学哲学和数学教育哲学，来为世界

范围内的数学教育改革导向和服务。这种哲学理论要求有显著、鲜明的时代特点，能起一种战略性定向作用。数学教育的建构主义理论就是一个比较能适应这种转变的哲学理论，它吸取了近几十年来哲学、心理学、思维科学、数学教育领域研究的合理成分和最新成果，结合数学的基本性质和特点，对数学教育作了几乎是全方位的阐述，以其较高的着眼点和对数学学习的合理解释而引人注目。

建构主义理论的出发点，可用一句话概括，那就是 von Glasersfeld 所说的：“知识不是被动接受的，而是认知主体积极建构的”（参见 Steffe *et al.* 1994）。建构主义以这种新颖的认识论观念，展开了它的认知适应的思想，活动构造的思想，认知主体的思想，人际交互的思想，等等。这些思想共同阐述了数学知识的性质，学习的性质，教学的性质，构成了建构主义的数学观、学习观和教学观，对数学教育心理学理论起着定向作用，指导我们去认识数学的教育（或教学）形态，根据教育情境下的数学的特点，以及学生认知的特点，形成符合素质教育要求的数学教育心理学的观点。这些观点可以概括如下：

（1）建构主义的数学观

数学不是建立在独立于人类思想之外的、纯客观的事实之上的，数学对象是思维对象。它不是像实际的线、球那样的物质的东西，而是人类构造出来的心理上的对象。它应当看成是人类创造或发明的结果，而不是发现或找到的结果。当然，对象一经构造出来，就会具有它自身的良好性质，以及相互之间的特定关系，有一定的内部的规律。

但是，数学理论又不是任意创建出来的，是要根据生活和科学的需要，通过人们自身的数学活动，从已有的数学对象及关系中产生的。一般的人，包括学生，他们的能力可能比不上数学家，但是通过类似的数学活动，他们也可以单独地获得数学或理解数学。所以，数学应该看作是活的、动态的、开放的、可能有错的数学活动的结果而

不是一成不变的、静态的、封闭的、绝对正确的结论。在数学活动中，除了要用到数学的特殊的方法，例如逐次抽象、演绎证明外，也必定要用到一般的科学思维的策略，例如归纳、类比等。两者结合起来，探索合理、有用的理论并追求严格性。

数学是处理数量关系和空间形式的模式的科学，它将人的能动的经验性活动概念化。而数学的概念、定理、法则体现了这类活动的思维规律，也是进一步建立各种情境的模型的工具。因此，它们不是一大套死板的、无关联的方法，只能用来分别处理各自的具体问题，而是体现了处理情境的思想和策略。以这个标准来看学校中的数学，应有好数学、坏数学之分。我们需要剔除坏数学，让学生学习好的数学。

(2) 建构主义的学习观

上述观点可以用来看待整个人类建构的数学，也应当用来认识学生学习的性质。虽然学生要学的数学都是历史上前人早已建构好了的，但对于学生来说，仍是全新的、未知的，需要他们用自己的学习活动来再现类似的过程。在数学学习中，我们不再将数学知识看成是已有的结论或知识的记录。这样，学习也就不再被解释成把现成的、包装好了的知识仔细地吸收和内化，而是一个广义的组织概念、情境的活动（包括思维活动）的过程（参见 Cobb *et al.* 1991）。学生以认知主体的身份亲自参加丰富生动的活动，在与情境的交互作用下，重新组织内部的认知结构，建构起自己对内容、意义的理解。这种身份是任何人（包括教师）不能包办代替的，应该得到充分的正视。

由于学生各人已有的认知结构有差别，能力也不同，学习的要求和方式不一样，各人会根据自己的体验来建构各自的知识，得到不同的理解，这就给每位学生的学习赋予了个性化的特征。这一点对于多样化的信息社会而言尤为明显。我们需要根据这种差异，体谅和理解各人的特点和需求，力争让不同的人掌握不同的数学，为各人解决不同的困难，使他们各有所得。

但是 将个性化的学习解释成完全、彻底的个人建构 即绝对的或激进的建构主义观点 却是片面的。知识的建构不仅是个人的 也是社会性的。从历史上看,整个数学是数学家们的共同成果。即使是数学家的研究 也都要依靠互通信息 会议交流 咖啡室的探讨 讨论班的辩论 才能触发理解和创造的火花。而学生个人的学习 也是社会作用的结果,不可能是绝对个人的私事。首先他要受到课本的影响 课本的编写者通过课程对他发生间接作用。教师的讲解、辅导及作业批改则是直接影响。课堂问答、个别指导、小组讨论、数学游戏等师生、同学间多种形式的交流合作,具有独特的意义。因此, Schoenfeld 参见 Dossey, 1992 说 学生感知的数学 在本质上讲是学校情境下认知因素和社会因素复杂的相互影响的结果。其中,社会交互作用起着重要影响。应当通过学徒学习的方式,从内容和情境中建构数学的知识或数学的意义。Vygotsky 则更明确地认为 概念首先是出现在社会层面上,只是后来才出现在个人层面上(参见 Crawford, 1996)。发生在“最近发展区”中的学习 是靠师生合作而进行的,因此必定是社会建构性质的。课堂上师生的社会交互和共同解释与建构 能设立一种适当的社会情境 让学生看到数学学习与社会环境的关系 体会数学的社会价值 并提高运用知识解决问题的能力,缩小或消除理论与实际之间的差距,对学生掌握与应用知识有利。

好的数学教育不应当让学生产生一种错觉,将数学学习误解为个人的闭门造车。也不应当让学生误认为数学家都是神态木讷、表情严肃、不苟言笑、难展双眉、性情古怪、独往独来的孤僻者。实际上 学习中师生间、同学间的交流活动能促进学习 通过讨论交流刺激新想法的萌生 能在理解上达到互相补充。通过表达和倾听 能使学生本人的思想更明确 也使之适应于他人的想法 从而让思考变得灵活 易于改进 更趋成熟。这对学生个人的认知和情感发展相当有利。

(3) 建构主义的教学观

与上述的数学观、学习观相适应，教学也不应被解释成由教师向学生灌输知识，将知识单向地传授给学生。教学应当让学生主动参与，并组织、监控和调整自己的活动。von Glasersfeld 指出，当我们把知识和能力看作为概念的个人经验组织的结果时，教师的作用就不再是传播“真理”，而是帮助和指导学生组织某个领域的经验（参见 Kieran, 1994）。所以，数学教学要强调由学生自己做数学，让学生以实践者的身份去体验建构过程，弄清来龙去脉。教师的教学，则由直接的工作变成间接的工作。为了真正确立学生的学习主体的、中心的地位，教师要像乐队指挥、球队教练那样，调动起学生的主动性和学习的热情，让他们真正地参与活动过程。

在教学活动中，教师还需要改变按自己的经验和思路组织教学的方式，设身处地，站到学生的立场上，体会他们的背景和基础。应当充分地理解学生的认知图式、认知过程的特点，采用恰当的认知模式来识别和确定数学知识的表征，确定学生自己的操作运算、知识存贮、组织情境的方法，顺着学生的经验和思路，用有针对性的、适宜的策略，引导和启发学生的自我建构，给予纠正和评价。

当然，这并不是说，在实际教学中教师不可以将概念、法则等告诉学生，不能告诉他们运用知识的方法。关键是要让学生能以自己的主体活动的方式积极地解释课堂上所做、所讲的内容，弄懂意义，建立属于他们自己的理解。总之，数学教学应当将学生引入数学现实，开展数学化、形式化、严谨化的活动，作出再创造。

教育改革的首要条件是转变教育工作者的观念。建构主义理论给我们更新观念带来了新鲜空气，为我们提供了看待数学、数学学习和数学教学的全新角度。例如，在看待有效教学的因素方面，环境并不是主要条件，教也不是一个决定性的因素，关键是如何让学生开展主动的活动和他们自己的积极的建构。社会建构的观点又充分肯定教师的作用，将它放在一个适当的位置上，让教师担负起对学生的引

导和帮助的责任，但这不应是控制学生、灌输知识。数学是一个活的、动态的过程，应让学生投入到数学活动的过程中去，通过自身的经验去体会、组织、构造，并抽取活动的数学意义。学生为什么会发生学习问题？主要原因并不在于他们没有记住定义和公式，而是由于他们的建构活动发生了一些偏差。这涉及他们已有的基础知识、目前的组织知识的方式等。要分析他们的错误，就须深入到他们的建构过程中去探查。因各人的基础和方法不同，发生的差错将会是形形色色的，需要作个别化的诊断，分别找出原因。对学生学习的评价，也需深入到整个学习过程、解题过程之中，不应只看一次考试的成绩或一道题目解答的结果，应当既作定量、又作定性的评价，从过程着眼。如此等等，都可以看作是建构主义理论的启示。然而，这个理论在目前还只是一种导向性的理论框架，理论层次上的看法并未简单地引申出具体的教学模式。但可以认为，我们曾经提倡的“启发式”教学原理是符合它的原则的。这种现状也正需要我们去积极地开展工作，在建构主义观点的引导下，创造出多种多样适合教学实际、符合学生学习规律的教学法，扭转一些不良的倾向，提高教学的效率和效果。

二、从行为主义观点向认知观点转变

在引言中，我们曾经提到，指导数学教育的行为主义心理学理论正在让位于认知心理学理论。这实际上暗示了，行为主义思想在数学教育领域中曾经占有很重要的地位，目前也仍存在着很大的影响。现代的数学教育学家普遍认为这是不利于数学教育改革的。在这个问题上，需要进行观念的革新和转变。

1. 行为主义心理学的观点

为什么行为主义心理学曾经在数学教育的指导思想中占据主导

地位呢？其中存在着一些客观因素，也有着哲学观念方面的原因。从课程内容上看，20世纪四、五十年代以前，世界各国的中小学数学教材中主要是算术计算，只是到中学快要结束时才出现少量的代数和几何内容。目前五、六十岁的人不妨回忆一下自己读中小学时的情况。当时大量的学习内容是计算练习。好几页的习题，类型常常是差不多的样子，方法也是类似的，只是数字或符号有一些改变。有时候还要使用小卡片作反复练习，要求练习到最后能一看到题目立即作出正确的反应，不能有错。这种学习称为“操作性练习”。当时大家认为这能有助于完美地掌握基本运算，受用一辈子。操作性练习在数学教学中，尤其在小学算术里长期占有重要地位，并且是教学的主要途径。虽然现在也同时强调这些运算背后的数学原理，但几乎每个人都认为实践性练习是必要的，理由是“熟能生巧”。通过熟练的操作，可以提高计算的速度和准确性，让学生能又快又对地做复杂的运算，其中包括从背诵加法、乘法口诀，训练竖式乘法，到解方程、公式的变形等。如果一个学生能迅速地、正确地进行运算，教师和家长都会非常满意，认为他掌握了运算技巧，学会了数学。

在熟练运算问题上，心理学家是怎样解释操作性练习的作用的呢？有数学教学心理学鼻祖之称的 E. Thorndike 的心理学——联结主义理论为它提供了理论基础。1922年，在美国哥伦比亚大学师范学院任教的 Thorndike 出版了一本小册子，名为《算术心理学》。这可能是世界上第一本直接讨论数学教学心理学的专著。他作为一个联结主义的心理学家，认为人类的行为或活动的基本单位是“刺激”和“反应”。刺激是指个人外部的事情，反应是指对外界事件作出的应答。当一个反应紧随一个刺激后出现，并给以奖励，那么在刺激和反应之间就形成一个“联结”。奖励的次数越多，联结就越强。于是，他提出学习的“效果律”：当情境和反应之间形成了可以修正的联结，并伴随着或在随后有一个愉快的结果，这个联结的强度就增大了；当伴随着或在随后有一个痛苦的结果，其强度就减弱了。他认为虽然有

关的实验都是在动物身上进行的，但这个学习原理是可以运用于人类的学习的。伴有奖赏的练习，就是人类学习发生的重要方式。

Thorndike 编写《算术心理学》的主要目的就是要将‘刺激-反应’的联结和效果律运用到复杂的学校数学教学中去。在该书中，他认为所有复杂的知识都是由简单的联结构成的。因此，学习就是要去建立并加强所需要的联结。当教学内容确定之后，教师就可以将一个个专题分解成一系列的关键性的联结，然后在教学过程中让学生对课堂内学习的内容作出反应 作重复练习并形成联结 设法让学生能在类似的情境影响下作出类似的反应。

Thorndike 在提出了上述原理之后，又仔细探讨了实际教学过程，并试图说明怎样将原理付诸实施。他认为 当学生年龄太小 还不能从实例推导出算术的法则时，教师应仔细地帮助他们形成必要的联结，并培养成习惯。先是找出并弄清构成算术内容的一套套特定的联结 然后向学生布置有关这些联结的作业 再用奖励的办法使做得正确的联结得以强化 由此改进学习。例如 加法可以处理成加法口诀 无进位的多位数加法 有进位的加法 直至小数、分数的加法 等等 将这些算法进一步细分为更具体的思维联结 使每一个都能成为形成和强化的对象。例如，Thorndike 对竖式加法由易到难作了如下的详细分析：

- 学习在作加法时保留一个数位；
- 学习先记住每一步加法的结果；
- 学习将记住的进位数字加到后一步加法上；
- 学习忽略某一位上的空位；
- 学习忽略某一位上的零；
- 学习在高位上应用上述步骤；
- 学习记下每一步加法结果的个位数，而不是全部数字。

Thorndike 说：“大部分教师可将其处理成加法口诀的简单应用，再加上对进位的理解。在两位数竖式加法中，至少有七个过程或小

活动 每一个在心理上讲是不同的 要求作不同的教育处理。”

选定了确切的联结之后，应怎样形成和加强呢？这就要用到操作性练习来形成和强化联结。确定的联结须按仔细排定的方式由简到繁，一环扣一环地呈现出来，并使重要的联结经常练习，不太重要的联结练得少一些，只用来帮助学习新概念的初步联结可以作临时的练习 不用时就可以丢掉。例如 四个 5 相加，可以先教初步的联结，如每次加上一个 5：一五，一十，十五，二十。但因为这个步骤后来要被口诀‘四五二十’代替 所以就只需要做很少的练习。Thorndike 也考虑到将要形成的每个联结与已形成的和尚未形成的联结之间的关系，认为应当使每一步的练习能与其他步骤有最有效的关联。

有一些联结看起来是很直观的，例如 $2+2$ 刺激与 4(反应)，可以由适当的操练强化。简单地看，算术就是由这类联结构成。但事实并没有这么简单，例如竖式的除法要复杂得多。所以他又认为应有‘协调组织的联结系统’并使每个系统能互相配合起来 作出仔细的编排。由于需要每一项能力，就必须设法让它们各就各位，使之成为整个组织中的一个协调的成员，成为系统中的一个元素。要将算术能力的要素组织起来共同发挥作用，就必须让它们在学习过程中一起出现，将它们归笼，配合练习。联结是通过重复的刺激-反应链而产生的，教师只需以适当的次序对每一类问题提供适量的练习。为此 就先确定组成的学科内容 然后排序 先易后难 使学习容易的内容有助于学习后面困难的内容。排列完成后，就让学生练习每一类联结，使进入后一阶段时每一类练习不发生错误。练得越多，联结越强。因为复杂的问题由一串联结组成，重要的是练好难题所需要的每一个联结(参见 Davis, 1984)

《算术心理学》中列出了大量的例子和推荐的操练顺序。但是他对哪一步容易 哪一步较难 哪些是最好的方式 哪些训练足够了 等等，都未作系统的阐述和理论分析。他的这种研究引出了其他类似的许多研究和方案(如新行为主义的程序教学法)，并因此一直对教

学方式产生着影响。

Thorndike 的理论及他倡导的操练性教学法，虽然在一定场合也提到了操作的内容不应枯燥无味，应让学生感兴趣，要有一定的实际目标等，但他的以操作为基本点的教学法在当时就受到了一些批评。例如 Brownell 曾提出了反对操练性教学法的观点。他认为，实际上儿童对计算的学习掌握并不与成人提倡的背口诀的方法一致。他曾调查了一批三年级学生，发现他们并不是靠背口诀计算，而是采用了各种方式 例如数手指 靠其他推断 (如由 $4+4=8$ 推得 $4+5=9$) 甚至靠猜测。即使在他们用操练方法学了两年以后，也仍在使用自己的方法。他认为，操练能够促使学生自己的方法成熟一些，但不会使他们放弃那些方法，只用所教的口诀去计算。

他的另一个观点较有实质性，即认为操作会对学习目标产生歪曲的看法。学习算术技能应该是能用数量方式进行思维，而不是对给定的练习题的百分之百的精确、快速反应。他提出，在迅速回答 $7+5=12$ 时，学生并不一定掌握了加法，而需要看他是否理解为什么和是 12，看他能否向别人说明这一点，看他能否完全肯定这一点，看他能否正确地应用它。他认为，要在教学中保证这些意义，必须要求注意到计算背后的原理和模式，“如果一个人能很好地用数量方式思维，就需要一个基本意义，而不是无数个自动反应。操练并不发展意义 重复并不引起理解”。例如，一遍遍地背和做“ $2+2=4$ ”并不能保证理解其中的概念。强调理解概念、关系，才能产生具有技能的数量思维方式。虽然它比操练方式的教学要花费更多的精力，但掌握了意义的学习可以达到更高的要求，掌握更重要的东西，而操练只是在鼓励学生把数学当作为一大堆独立的、无关联的结论。（参见 Davis, 1984）

2. 操作性学习理论剖析

凭心而论，行为主义的操作性练习并非一无是处。东亚国家的

数学教学历来有强调‘熟能生巧’的传统。而要达到‘熟’的水平，看来没有训练是不行的，为此就提倡技能训练，提倡做大量习题。东亚国家在好几次国际数学教育评价中名列前茅，在多次国际数学奥林匹克竞赛中位居榜首，可以说明操作性训练有一定功效。对此，一般性的解释是：学生对口诀、公式、法则的滚瓜烂熟般的掌握，可以使他们在数学探索中以最迅速的办法完成常规性的推导步骤，节省下宝贵的时间来作艰难的尝试和判断，最后解决难题。如果要恰如其分地对其机制作出分析，那么以信息加工的理论（参见附录）为依据，可以认为，算术口诀以及算法过程（如解方程的一套步骤，数学式子的恒等变形）的熟练掌握，将能从形式和内容两方面压缩信息，使得过程在不用直接给予特别思考的条件下“自动化”地进行，因而将人的工作记忆的容量节省下来，得以处理需要专门考虑的概念和原理。所以，技能训练的功能是将操作信息压缩成较小或较少的组块，减轻工作记忆的负担，从而提高加工的效率。而且，由于大量数学概念是以过程作为概念发展的第一阶段（Sfard, 1991），因此过程的操作练习是概念形成的基础，是概念的全面理解的必要条件（李士琦, 1996）。

但是 70 年前就开始形成的操作性的数学学习理论至少有一些不可否认的缺点和负面影响。

行为主义（包括新行为主义）的基本出发点——刺激-反应原理，在指导教学方面有着先天性的不足之处。首先，Thorndike 的理论起始于对动物的研究。如果说对动物在想什么无法作出判断，只能视为黑箱，通过刺激-反应来作研究的话，对人的学习持完全同样的看法就有失偏颇了。动物的学习与人的学习是有必要区别对待的。其次，在人的学习上，也有必要对行为性的学习与智力性的学习（即动作性的操作与思维性的操作）区别对待。数学中的技能毕竟不同于诸如劳动动作和体育动作的技能。它本身不是单纯的行为性的学习。例如，学习打字与学习几何证明中如何添加辅助线就是不同性质的学习。行为主义的观点可以说明低级的学习，但无法满意地解