

图书在版编目(CIP)数据

A 计划丛书·高一数学 / 王应标主编. —南京: 南京师范大学出版社, 2001. 5

ISBN 7—81047—624—6 / G · 364

I. A... II. 王... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 26219 号

书 名	A 计划丛书·高一数学
主 编	王应标
责任编辑	万 斌
出版发行	南京师范大学出版社
地 址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电 话	(025)3598077(传真) 3598412(发行部) 3598297(邮购部)
E-mail	nnuniprs@public1. ptt. js. cn
照 排	江苏兰斯印务发展有限公司
印 刷	江苏新华印刷厂
开 本	880×1230 1/32
印 张	12. 25
字 数	356 千
版 次	2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷
印 数	1—15 000 册
书 号	ISBN7—81047—624—6 / G · 364
定 价	12. 00 元

**南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换
版权所有 侵犯必究**

前 言

做什么事情,都得有个计划.

学习数学,也是如此.

这本书告诉你一个学好高一数学的计划,我们叫她“A 计划”.

“A 计划”从自主学习的角度,为你

——设定学习目标,明确各个阶段的知识目标、技能目标、情感目标.

——介绍学习方法,针对具体的学习内容和学习进程,提出建议、指点迷津.

——解析疑难问题:碰到障碍、遇见困难怎么办?以后碰到类似的或不同的问题又该怎么办?本书在为你提供范例范解的同时,提供了更多的发散思维空间.

——检查学习效果:分节检测学、用知识的能力,特别注重创新能力;分章阶段总结,构筑“冲 A”阶梯.

——加强综合渗透,以学科内综合为基础,与相关学科的知识同步交叉渗透,与社会生活、生产实际紧密结合,发现真正有趣的数学与有用的数学.

《A 计划——高一数学》与人教社最新试验修订本同步.你既可从
中享用形式新颖、内容丰富的学习套餐,又能体会到从自助学习向自主
学习跨越的喜悦.

学习是快乐的.

快乐体现在学习的过程中.

只有做学习的主人,学习才会是快乐的.

让你快快乐乐地学好数学,是我们最大的愿望.

本书主编:王应标.

参加编写的作者为:杜士明、卢会元、尚月如、黄保球.

编 者

出版说明

长期以来,中学教育的目标往往局限于追求考试分数,学生的学习目的也局限于考出一个好成绩。久而久之,教师、学生和家长都陷入到“应试教育”的怪圈之中,教师为考试而教,学生为考试而学,学校教育的真谛渐渐地被人们遗忘了。这种状况与新世纪对人才的要求是不相适应的。新世纪要求学校教育培养学生的“自主性”和“创造性”,提高学生的综合能力和素质。这些要求不是仅仅通过做一些练习题就可以达到的,而需要在教与学的过程中真正贯彻素质教育的思想。为了适应新世纪对人才综合素质的要求,我们采用全新的视角,策划了这套《A计划丛书》。

这套丛书的核心思想是“自主学习”,让学生在学的过程中学会学习,最后成为学习的主人。为了体现这一核心思想,本套书围绕以下几个方面构思全书内容:

1. 以“二自”(自助学习、自主学习)为支点。“自助学习”是为学生创设学习情境的一个重要支点,为此,本书首先提供了一套经过优化组合的学习套餐,包括知识要点、思考方法、疑难分析、巩固练习等,学生都可以根据自己的需要自我提取,自我消化。这种开放式的学习套餐也是学生进行自主探索和自主学习的基础。“自主学习”则是提升学生主体意识、提高学习效益的另一个重要支点。本书通过灵活多样的题目,为学生创造一种“自主学习”的氛围,使学生逐渐成为学习的主人,实现从“自助学习”向“自主学习”的跨越。

2. 以“三重”(重学习过程、重学习方法、重综合素质)为特色。本书设计了立体化的教学目标,包括知识与技能、能力与方法、情感与态度,让学生在学习过程中得到提高。本书还从两个层面为学生提供了多元化的学法指导,使得不同的知识内容和学习阶段有不同的方法,不同层次的学生也有不同的学习方法。为了培养学生的综合素质,本书除了注



意学科内的综合之外,还注意跨学科的综合,其中的综合例题是分阶段的学科内综合,研究课题则是针对新教材中的实践性课题实施指导,在此基础上延伸拓展,并进一步提供新的课题和研究方法.

3. 以“四得”为目标. 通过使用本书,广大中学生朋友可以获得掌握基础知识的能力,获得运用书本知识分析问题和解决问题的能力,获得吸取书本外知识的能力,获得创新与自我提高的能力.

从“学会学习”到“自主学习”,是新世纪教育改革与发展的潮流. 但愿我们这套丛书能够帮助广大中学生在自主学习中走向成功.

目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
§ 1.1 集合	(1)
§ 1.2 子集 全集 补集	(6)
§ 1.3 交集 并集	(13)
§ 1.4 含绝对值的不等式解法	(20)
§ 1.5 一元二次不等式解法	(27)
§ 1.6 逻辑联结词	(35)
§ 1.7 四种命题	(42)
§ 1.8 充分条件与必要条件	(48)
阶段综合	(54)
第二章 函数	(67)
§ 2.1 映射	(67)
§ 2.2 函数	(71)
§ 2.3 函数的单调性和奇偶性	(80)
§ 2.4 反函数	(89)
§ 2.5 指数	(94)
§ 2.6 指数函数	(97)
§ 2.7 对数	(107)
§ 2.8 对数函数	(111)
§ 2.9 函数的应用举例	(119)
§ 2.10 实习作业	(119)
阶段综合	(125)

第三章 数列	(136)
§ 3.1 数列	(136)
§ 3.2 等差数列	(142)
§ 3.3 等差数列前 n 项和	(147)
§ 3.4 等比数列	(153)
§ 3.5 等比数列前 n 项和	(158)
§ 3.6 研究性课题:分期付款中的有关计算.....	(165)
阶段综合	(169)
第四章 三角函数	(186)
§ 4.1 角的概念的推广	(186)
§ 4.2 弧度制	(189)
§ 4.3 任意角的三角函数	(191)
§ 4.4 同角三角函数的基本关系式	(196)
§ 4.5 正弦、余弦的诱导公式.....	(202)
§ 4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切	(206)
§ 4.7 二倍角的正弦、余弦、正切	(215)
§ 4.8 正弦、余弦函数的图像和性质.....	(221)
§ 4.9 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像.....	(231)
§ 4.10 正切函数的图像和性质.....	(243)
§ 4.11 已知三角函数值求角.....	(252)
阶段综合	(259)
第五章 平面向量	(283)
§ 5.1 向量	(283)
§ 5.2 向量的加法与减法	(288)
§ 5.3 实数与向量的积	(295)
§ 5.4 平面向量的坐标运算	(300)
§ 5.5 线段的定比分点	(305)

§ 5.6	平面向量的数量积及运算律	(311)
§ 5.7	平面向量的数量积的坐标表示	(317)
§ 5.8	平移	(321)
§ 5.9	正弦定理、余弦定理	(324)
§ 5.10	解斜三角形应用举例	(334)
§ 5.11	实习作业	(339)
§ 5.12	研究性课题：向量在物理中的应用	(344)
阶段综合		(347)
参考答案		(360)

第一章 集合与简易逻辑

§ 1.1 集合

目标设定

1. 懂得集合的概念,能按集合中元素的个数是否有限将集合分类;能说出常用数集的名称和符号;了解元素属于或不属于某集合的意义;了解集合中元素的确定性、互异性和无序性;能判断一组对象是否组成集合.

2. 懂得什么是列举法、什么是描述法,掌握这两种方法的符号和特征,并会用它们正确表示一些简单集合.

3. 了解空集的意义和它的记号(是符号不是字母),知道空集是一个特殊的集合,它不含有任何元素,能用描述法举出空集的实例.

学法索引

1. 学习本小节知识,要以初中所接触过的集合(如实数集、正数集等)为基础,选准集合有关概念在原知识中的着落点,了解集合是原始概念,能把它和点、直线、平面等基本概念相比较,这样对集合概念才能有比较深刻的理解.

2. 学习本小节重点应抓住集合中元素的性质及集合的表示方法,集合中元素的性质又以元素的确定性和互异性为主.元素的确定性主要用于判定一组对象是否能形成一个集合;元素的互异性要求在解题完成时检验所求得解是否使集合中出现重复的元素.集合的表示方法中描述法较难掌握,理解掌握描述法的关键是根据大括号中竖线前面的元素的形式去把握元素的真正内涵.

3. 集合论是现代数学的基础,掌握好集合理论不仅可以很好地解

决集合中的相关问题,更主要的是用集合的理论和集合思想去解决非集合问题,还可用集合观点进一步认识不等式(组)的解、方程(组)的解、函数图像等.

例题解析

例1 判断下列说法是否正确?说明理由.

- (1) 某个村里的年轻人组成一个集合;
- (2) 所有的小正数组成一个集合;
- (3) $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, 0.5$ 这些数组成的集合有五个元素;
- (4) 集合 $\{1, 3, 5, 7\}$ 与集合 $\{3, 1, 7, 5\}$ 表示同一个集合.

解析 对于一个给定的集合,它的元素是确定的,即元素的意义是明确的,“年轻人”和“小正数”都没有明确的标准,是模糊的,所以(1)、(2)的说法都是错误的;

对于一个给定的集合,它的元素必须是互异的,即集合中的元素互不相同,相同的对象只用一个元素表示,所以(3)中的数组成的集合只有三个元素,写成 $\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$;

对于给定的集合来说,集合中的元素是无序的,(4)中两个集合有相同的元素,只是次序不同,它们表示同一个集合,所以(4)的说法是正确的.

例2 已知 $1 \in \{a^2 - a - 1, a, -1\}$, 求 a 的值.

解析 1 是集合 $\{a^2 - a - 1, a, -1\}$ 的元素,则 $a^2 - a - 1$ 或 a 这两个数中必定有一个与 1 相等. 若 $a = 1$, 则 $a^2 - a - 1 = -1$, 出现重复元素,不合;若 $a^2 - a - 1 = 1$, 则 $a = 2$ 或 $a = -1$, 而 $a = -1$ 不合,故 a 的值为 2.

例3 指出下列各集合中的元素,并说明它是有限集还是无限集?

- (1) $\{x^2 - 1\}$;
- (2) $\{x^2 - 1 = 0\}$;
- (3) $\{x | y = x^2 - 1\}$;
- (4) $\{y | y = x^2 - 1\}$;
- (5) $\{x | x^2 - 1 = 0\}$;
- (6) $\{(x, y) | y = x^2 - 1\}$;

$$(7) \{(x, y) \mid \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}\}; \quad (8) \{\frac{3}{a} \mid a \in \mathbf{Z}, \text{且 } \frac{3}{a} \in \mathbf{Z}\}.$$

解析 集合的表示法有两种:列举法和描述法.描述法通常有两种形式:一种简单表示,就是将集合中元素的属性直接写在大括号里;另一种在大括号内先写出元素,然后加上条竖线,在竖线后面写清元素的属性.

观察上面给出的八个集合,对于理解掌握集合的描述法表示很有帮助.(1)中只有一个元素就是代数式 x^2-1 ,所以是有限集.(2)中也只有一个元素就是方程 $x^2-1=0$,也是有限集.(3)中元素是 x ,而 x 可以是一切实数,所以是无限集.(4)中元素是 y ,而 $y=x^2-1$ 的最小值是 -1 ,它可以取大于等于 -1 的所有实数,所以也是无限集.(5)中元素是 x ,而 x 又满足 $x^2-1=0$, x 可以取 1 或 -1 ,即是方程 $x^2-1=0$ 的根组成的集合,有两个元素,是有限集.(6)中的元素是 (x, y) ,它可以看成是数组,也可看成是平面上点的坐标.看成数组,则这组数满足二元方程 $y=x^2-1$;看成点的坐标,则这些点都在 $y=x^2-1$ 的图像上.易知它是无限集.(7)中元素也是 (x, y) ,它同时满足两个方程,应当是方程组的解,而二元一次方程组只有一解,因此,它是有限集.(8)中元素是 $\frac{3}{a}$,而 $a \in \mathbf{Z}$ 且 $\frac{3}{a} \in \mathbf{Z}$, $\frac{3}{a} \in \mathbf{Z}$ 就要求 $a = \pm 3, \pm 1$,此时, $\frac{3}{a}$ 取相应的 $-1, 1, -3, 3$,集合中有四个元素,所以是有限集.

例 4 已知 $(1, 2) \in \{(x, y) \mid \begin{cases} ax+by=1, \\ bx+ay=1 \end{cases}\}$,求 a 和 b 的值.

解析 本题的疑难之处仍然是对集合描述法表示的理解,通过对例 3 的分析,我们应当知道集合中的元素 (x, y) 是方程组 $\begin{cases} ax+by=1, \\ bx+ay=1 \end{cases}$ 的解, $(1, 2)$ 是集合中的元素,则说明 $x=1, y=2$ 是方程

组的解,将 $x=1, y=2$ 代入,便得到 $\begin{cases} a+2b=1, \\ b+2a=1, \end{cases}$ 解之便可得到 $a=b=$

$$\frac{1}{3}.$$

例5 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素写出来;
- (3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

解析 首先要明确, 集合 A 是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 在实数范围内的解集.

(1) A 是空集, 即方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无解, 得 $\Delta = (-3)^2 - 8a < 0$, 则 $a > \frac{9}{8}$.

(2) A 中只有一个元素, 即方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 只有一解. 这里有两种解释, 考察方程, 当 $a = 0$ 时, 方程变为 $-3x + 2 = 0$, 只有一解 $x = \frac{2}{3}$; 当 $a \neq 0$ 时, 一元二次方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集中只有一个元素, 说明方程有两个相同的根, 即 $\Delta = (-3)^2 - 8a = 0$, $\therefore a = \frac{9}{8}$. 因此,

当 $a = 0$ 或 $a = \frac{9}{8}$ 时, A 中只有一个元素, 分别是 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$. 请注意此时集合 A 是 $\{\frac{2}{3}\}$ 或 $\{\frac{4}{3}\}$.

(3) A 中至多只有一个元素包括 A 中只有一个元素和 A 是空集两种情况, 根据(1)和(2)的结果, 得 $a = 0$ 或 $a \geq \frac{9}{8}$.

应用创新

1. 下列各组对象中可以构成集合的是().

- ① 某班身高超过 1.65 m 的男生;
- ② 某班比较聪明的女生;
- ③ 数轴上非常靠近原点的点;
- ④ 使 $|x^2 - 3x + 2|$ 最小的 x 的值;
- ⑤ 与无理数 π 相差很小的全体实数;

⑥ $\sqrt{2}, \pi, 3, \frac{1}{2}$.

(A)①②③ (B)①④⑤ (C)①④⑥ (D)②③⑤

2. 集合 $\{(x, y) | xy \geq 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ 是指().

(A) 第一象限内的点集 (B) 第三象限内的点集
(C) 第一、三象限内的点集 (D) 不是第二、四象限内的点集

3. 下面有四个命题:①集合 N 中最小的数是 1;②0 是自然数;③ $\{1, 2, 3\}$ 是不大于 3 的自然数组成的集合;④ $a \in N, b \in N$, 则 $a + b \geq 2$. 其中正确命题的个数为().

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

4. 下列命题中正确的是().

(A) $\{0\}$ 是空集 (B) $\{x \in \mathbf{Q} | \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\}$ 是有限集

(C) $\{x \in \mathbf{Q} | x^2 + x + 2 = 0\}$ 是空集

(D) $\{1, 2\}, \{2, 1\}$ 是不同集合

5. 下列说法正确的是().

(A) 集合 $\{x | x^2 + 1 = 0\}$ 无意义
(B) $x, -x, |x|$ 组成的集合最多有三个元素
(C) $\{(1, 2)\}$ 与 $\{(2, 1)\}$ 表示同一集合
(D) $\{\text{有理数}\}$ 与 $\{x | x \in \mathbf{Q}\}$ 是同一集合

6. 给出下列关系:① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; ③ $|-3| \notin \mathbf{N}_+$; ④ $|- \sqrt{3}| \in$

Q. 其中正确的个数为().

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

7. 下列关系式:① $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q} (m, n \in \mathbf{R})$; ② $N \in \mathbf{R}$; ③ 高一(3)班学生的笔 $\in \{\text{高一(3)班学生}\}$; ④ $3.14 \in \{x \in \mathbf{R} | x - \pi \geq 0\}$. 其中().

(A) 都正确 (B) 都不正确 (C) 仅①正确 (D) ①②③正确

8. 集合 $A = \{1, -3, 5, -7, \dots\}$ 用描述法可表示为().

(A) $\{x | x = (-1)^n (2n+1), n \in \mathbf{N}_+\}$
(B) $\{x | x = (-1)^n (2n-1), n \in \mathbf{N}_+\}$
(C) $\{x | x = (-1)^{n+1} (2n-1), n \in \mathbf{N}_+\}$
(D) $\{x | x = 2n \pm 1, n \in \mathbf{N}_+\}$

9. 下列集合中,恰有两个元素的集合是().

(A) $\{x^2-1\}$

(B) $\{x^2-1=0\}$

(C) $\{x|y=x^2-1\}$

(D) $\{x|x^2-1=0\}$

10. 设集合 $A=\{x|x=a+b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 则下列关系中不正确的是().

(A) $0 \in A$

(B) $\sqrt{2} \in A$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \in A$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \in A$

11. 方程的解集 $\{x|2x^2-3x-2=0, x \in \mathbf{R}\}$ 用列举法表示为 _____.

12. 若 $2 \in \{x|x^2+ax-3=0\}$, 则 $a=$ _____.

13. $\{x|x=\frac{n-1}{n+2}, n \in \mathbf{N}, n \leq 5\}$ 用列举法表示为 _____.

14. 用列举法表示不等式组 $\begin{cases} 2(x+1)-\frac{2-x}{3} > \frac{7x}{2}-1, \\ \frac{x-5}{2}-3x \leq -1 \end{cases}$ 的整数解

集合为 _____.

15. 直角坐标系中第一象限内的点构成的集合是 _____.

16. 已知 $x^2 \in \{0, 1, x\}$, 求实数 x 的值.

17. 已知 $\frac{1}{2} \in \{x|x^2-px-\frac{5}{2}=0\}$, 求集合 $\{x|x^2-\frac{19}{2}x-p=0\}$ 中所有的元素.

18. 非空集合 M 中的元素是正整数, 且满足: 若 $x \in M$, 则必有 $6-x \in M$, 求这样的集合 M .

19. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, a \in \mathbf{R}\}$, (1) 若 A 中只有一个元素, 试求 a 的值, 并求出这个元素; (2) 若 A 是空集, 求 a 的范围; (3) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围.

§ 1.2 子集 全集 补集

目标设定

1. 理解子集、真子集的概念,能正确运用有关术语、符号和图示方法.
2. 懂得任何一个集合是它本身的一个子集,空集是任何非空集合的真子集.
3. 了解包含和真包含的关系,知道两个集合相等的意义.
4. 理解补集的概念,正确运用补集的符号(其中 $\complement$ 是符号,不是字母)和表示方法,会用图形表示一个集合中某子集的补集;了解全集的意义和它的记号(U 是字母,不是数学符号),会求一个给定集合在全集中的补集,并能解答简单的应用题.

学法索引

1. 学习本小节知识,需要对集合的概念有比较深刻的理解,懂得元素与集合之间的“属于”或“不属于”关系的意义,在此基础上,能很好地判断集合与集合之间的“包含”关系.

2. 学习本小节知识的关键是用好集合语言,所谓集合语言就是那些特定的名词、术语、符号、命题等的数学定义与叙述.集合语言包含三种,即普通语言(文字语言)、符号语言、图形语言,学习时要注意这三种语言的沟通与转换,即把一种语言表述的问题改用另一种语言来表达.

在判断包含或相等的关系时,要紧扣住子集的定义,根据元素的属于关系进行讨论和说明,也可用图形作简单的判断,同时注意掌握好以下两点:

(1)“ $\in$ ”与“ $\subseteq$ ”的区别:“ $\in$ ”是表示元素与集合间的关系的,“ $\subseteq$ ”是表示集合与集合间的关系的,但有时集合又可以作为另一集合的元素,因此,元素与集合都具有一定的相对性意义,如 $\emptyset$ 、 $\{\emptyset\}$.

(2)文氏图仅仅起着说明各集合间关系的示意图的作用,因此边界用直线还是曲线,实线还是虚线都无关紧要,只要封闭,并能把有关元素或子集都包含其中即可,也不能理解为圈内的点都是集合中的元素.

3. 学好本小节知识,是学习后续知识的重要基础,特别是在理解的种类关系、充要条件判断以及不等式的解集的关系的判断等方面都

会有很大的帮助,值得一提的是补集思想是集合思想的重要组成部分,它能帮助我们正确理解四种命题及其相互关系,并在反证法证明及求解范围问题上有更大的作用.

例题解析

例1 集合 $M = \{x | x = 1 + a^2, a \in \mathbf{N}_+\}$, $P = \{x | x = a^2 - 4a + 5, a \in \mathbf{N}\}$, 下列关系中正确的是().

(A) $M \subsetneq P$

(B) $P \subsetneq M$

(C) $M = P$

(D) $P \not\subseteq M$, 且 $M \not\subseteq P$

解析 要判断两集合的关系,先从它们元素之间的关系入手,两集合中的元素都有自己各自的形式,这种形式正是判断一个元素是否属于这一集合的惟一途径,因此解此题的关键是判断 $1 + a^2$ 是否可以表示成 $a^2 - 4a + 5$ 的形式,同样也要判断 $a^2 - 4a + 5$ 是否可以表示成 $1 + a^2$ 的形式,形式表示完后,还要看各自的取值范围.有了上面的想法,解这道难题也就很轻松了.

对任意 $x \in M$, 有 $x = 1 + a^2 = (a+2)^2 - 4(a+2) + 5$.

$$\therefore a \in \mathbf{N}_+, \therefore a+2 \in \mathbf{N}_+, \therefore a+2 \in \mathbf{N}.$$

$\therefore x \in P$, 这就说 M 中的任何一个元素 $1 + a^2 (a \in \mathbf{N}_+)$ 都是集合 P 的元素. $\therefore M \subseteq P$.

对 P 中的任一元素 y , 有 $y = a^2 - 4a + 5 = (a-2)^2 + 1$.

从形式上看,它也写成了 $1 + a^2$ 的形式,但此时 $a \in \mathbf{N}$, 不能保证 $a-2 \in \mathbf{N}_+$, 所以此时不能说明 $y \in M$, 只需找出一个使得 $y \notin M$, 取 $a = 2$, 则 $a-2 = 0 \in \mathbf{N}$, 但 $a-2 \notin \mathbf{N}_+$, 所以 $y \notin M$.

$$\therefore M \subsetneq P, \text{选(A)}.$$

例2 已知 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2 - x + 1\}$, 且 $B \subsetneq A$, 求实数 x 的值.

解析 由题设条件 $B \subsetneq A$, 说明 B 是 A 的真子集. 因为需要满足两个条件, B 中的每一个元素都是 A 中的元素, A 中至少有一个元素不是 B 的元素. 从题目所给的元素看, 1 是自然的, 则 $x^2 - x + 1$ 必定是 3 或 x 中的一个. 因此有

$x^2 - x + 1 = 3$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -1$;

或 $x^2 - x + 1 = x$, 解得 $x = 1$.

解到这里,我们要考虑的是,这些数会不会使两集合中的元素违反互异性,会不会造成使结论 $B \subseteq A$ 不成立的情况,检验,

当 $x = 2$ 时, $A = \{1, 3, 2\}$, $B = \{1, 3\}$;

当 $x = -1$ 时, $A = \{1, 3, -1\}$, $B = \{1, 3\}$;

当 $x = 1$ 时, $A = \{1, 3, 1\}$, $B = \{1, 1\}$.

显然,第三种情况 $x = 1$ 不能成立.

$\therefore x = 2$ 或 $x = -1$.

例 3 已知全集 $U = \{2, x, x^2 - 1\}$, $A = \{2, y\}$, $\complement_U A = \{3\}$, 求 x, y 的值.

解析 根据全集的意义,所涉及的相关集合都是全集的子集,所以,题目中的另外两个集合 $A, \complement_U A$ 都是 U 的子集.同时,再根据补集的定义可知, A 中元素 $2, y$ 以及 $\complement_U A$ 中元素 3 应分别与 U 集合中的三个元素对应相等, 2 和 2 相对应, y 与 3 分别与 $x, x^2 - 1$ 相等应有两种情形.

$$(1) \begin{cases} x = 3, \\ x^2 - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 8. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 - 1 = 3, \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2, \\ y = -2. \end{cases}$$

在得到了上述三组解后,再检验所得的解是否都能满足要求及集合中元素的互异性.

$$\text{最后确定解为 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2, \\ y = -2. \end{cases}$$

例 4 已知集合 $A = \{a, a + b, a + 2b\}$, $B = \{a, ac, ac^2\}$. 若 $A = B$, 求 C 的值.

解析 根据集合相等的意义,两集合中的元素完全相同,但顺序可以不同,考察两个集合, a 与 a 相同,余下的当然是 $a + b, a + 2b$ 分别与

ac 、 ac^2 相等,有两种情形:

(1) $a+b=ac$ 且 $a+2b=ac^2$, 消去 b 得 $a+ac^2-2ac=0$.

若 $a=0$, 则集合 B 中三元素都为零, 根据集合中元素的互异性, 舍去 $a=0$, 即 $a \neq 0$.

$\therefore c^2-2c+1=0$, 解得 $c=1$, 但 $c=1$ 时, B 中三个元素也相同, 舍去 $c=1$, 此时无解.

(2) $a+b=ac^2$ 且 $a+2b=ac$, 消去 b 得 $2ac^2-ac-a=0$. $\because a \neq 0$, $\therefore 2c^2-c-1=0$, 即 $(c-1)(2c+1)=0$. 又 $c \neq 1$, $\therefore c = -\frac{1}{2}$.

例 5 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + p = 0\}$, $\complement_U A = \{x | x^2 - qx + 6 = 0\}$, 求 p 和 q 的值.

解析 根据全集的意义, A 及 $\complement_U A$ 都是 U 的子集, 因此, A 及 $\complement_U A$ 的元素必须是 $1, 2, 3, 4$ 中的一部分, 又 A 及 $\complement_U A$ 都是一元二次方程的解集, 通常应当是两个解. 不妨设出集合 $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_3, x_4\}$, 根据韦达定理知 $x_1 + x_2 = 5$, $x_3 x_4 = 6$, 再根据 x_1, x_2, x_3, x_4 都是 U 中的元素, 不难发现 $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3$, 即 $1, 4 \in A, 2, 3 \in \complement_U A$.

再根据韦达定理得 $p = 1 \times 4 = 4, q = 2 + 3 = 5$.

$\complement_U A = \{2, 3\}$, 所以有 $q = 5$, 若 $2, 3 \in A$, 则 $p = 6$, 此时 $A = \{2, 3\}$, $\complement_U A = \{1, 4\}$, 但 $1 \times 4 \neq 6$, 所以不可能, 故只能是 $A = \{1, 4\}$, $\complement_U A = \{2, 3\}$, 从而 $p = 4, q = 5$.

例 6 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - x + p = 0\}$, 分别求出 p 值, 使得:
(1) $A = \{0, 1\}$; (2) $\emptyset \subsetneq A$; (3) $A \subsetneq \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$.

解析 本题要先分析三个不同要求的含义: (1) 的要求很明确, $A = \{0, 1\}$, 即方程 $x^2 - x + p = 0$ 有两个实根是 $0, 1$, 从而可以很快求出 $p = 0$. 而 (2) 要求 $\emptyset \subsetneq A$, 即 $\emptyset$ 是 A 的真子集, 即要求 A 中至少有一个元素, 即方程 $x^2 - x + p = 0$ 至少有一个实数根. 则可由 $\Delta \geq 0$ 求解. (3) 的要求是 $A \subsetneq \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 即要求 A 中的元素必须都为正数,