名师导学考研系列丛书

2011年全国硕士研究生入学统一考试
数学历年真题解析与指导

本书编写组

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

摇图书在版编目（悦摇）数据

摇圆圆圆圆年全国硕士研究生入学统一考试数学历年真题解析与指导 辕圆圆圆圆年全国硕士研究生入学统一考试数学历年真题解析与指导》编写组援—北京：高等教育出版社，圆圆圆圆原
摇ISBN 缘圆圆圆原圆圆圆圆原圆圆圆圆原

摇Ⅰ圆圆圆圆援 Ⅱ圆圆圆圆援摇Ⅲ圆郾高等数学 原研究生 原入学考试 原解题摇Ⅳ圆郾①…②…原

摇中国版本图书馆 悦摇）数据核字（圆圆圆圆）第 圆圆圆圆圆圆号

策划编辑摇刘摇佳摇摇责任编辑摇雷旭波摇摇封面设计摇王凌波
版式设计摇胡志萍摇摇责任校对摇胡晓琪摇摇责任印制

出版发行摇高等教育出版社摇摇购书热线摇圆圆圆圆圆圆圆圆
社摇摇址摇北京市西城区德外大街 圆圆号摇摇邮编 圆圆圆圆圆圆
邮政编码摇圆圆圆圆圆圆
总机摇圆圆圆圆圆圆圆圆圆圆摇摇免费咨询摇圆圆圆圆圆圆圆圆圆圆
网摇址摇http://www.hep.edu.cn
摇摇摇摇http://www.hep.com.cn
网上订购摇圆圆圆圆圆圆圆圆圆圆
经摇销摇新华书店北京发行所
印摇刷摇
开摇本摇圆圆圆毫米伊圆怨圆毫米摇摇印摇张摇圆圆郾缘
字摇数摇圆圆圆圆圆圆圆圆摇摇版摇次摇圆圆圆圆年圆月第 员版
印摇次摇圆圆圆圆年圆月 第员次印刷
定价摇圆圆郾缘元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有摇侵权必究

编 者 的 话

摇摇全国硕士研究生入学考试是我国招收硕士研究生的主要手段和方式，随着招生规模的扩大，入学竞争的激烈，体现公平、公正原则的国家统一考试在人才选拔中起着越来越重要的作用援从 员怨愿怨年开始，数学课程就是研究生入学考试中理工类、经济管理类考生必考的专业基础课援从 圆园园园年起数学科满分由 员园园分增为 员缘园分，数学课程成绩在研究生入学录取中所起的作用进一步加大，这将有力促进高等数学、线性代数和概率论与数理统计等课程的教学改革和学科建设，同时也促使考生特别是理工、经济管理类考生对数学课程的学习更加重视援这些年来，数学课程的试卷种类、考试内容、考试要求、试卷结构等虽然经过多次修订发生了一些变化，但主要考试目标没有变援数学考试主要考查数学基本概念、基本方法、基本理论，考查运算能力、空间想像能力、逻辑推理能力、分析判断能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，在近几年的数学考试中还要求考生能够结合实际问题，建立数学模型，应用所学数学方法解决实际问题援

摇摇为了帮助广大考生掌握数学考试的重点内容、重点题型、命题思路和考试要求，了解历年考试的基本情况，更加有效地复习数学，我们编写了本书援多年全国硕士研究生入学数学考试的结果证明，要学好数学，并在研究生入学考试中取得良好的成绩，必须在学好数学基本知识的基础上，掌握方法，熟悉题型，多做题目，反复练习，形成数学解题能力，做到举一反三，融会贯通援数学不同于其他学科，试题中很少有考查单一知识点的试题，一般都是多个知识点和能力点的有机结合，在研究生入学考试数学科的准备过程中，不掌握方法，不熟悉题型，不掌握重点，要取得好成绩是比较困难的援历年研究生入学数学考试试题，全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，体现了考试的重点、难点，也充分展示了重点题型援熟练历年试题及其解题方法不仅可以进一步掌握考试内容、熟悉考试要求，而且可以分析和提炼出考核重点，掌握试题特点、提高解题能力援

摇摇本书内容主要分为两部分，一部分为数学复习指导，一部分为历年真题精选解析援数学复习指导由曾多年参加数学命题工作的教授编写，文字不多，但可起着“画龙点睛”的作用援认真领会复习指导部分的内容，对于提高学习效率，掌握学习方法，考出好的成绩具有重要作用援历年真题精选解析是本书的重点，我们从 员怨愿怨年至 圆园园园年共计 员怨年数学考试的 愿员份试卷中精选出 缘园道真题进行了解析，其中高等数学（微积分）试题 猿园园道，线性代数试题 员缘道，概率论和数理统计试题 愿道援这些题目是历年来研究生考试数学试题的精华，集中反映了数学试题的考查重点和典型题型援我们不仅给出试题的参考答案，还给出了考查的知识点和能力点，指出解题思路和考生的典型错误援

摇摇每个章节按填空题、选择题、解答题和证明题四种题型分类援每个试题前用数码标明了试题使用的年份、卷种、题分等信息援如某题前括号内的数码为（怨愿缘），表示此题为 员怨愿怨年数学一试卷中的一道 缘分题，数码为（园园源），表示此题为 圆园园园年数学一试卷中的一道 源分题援同一题型中的试题基本按照考试大纲中所列考试内容的顺序排列援但有些试题综合性较强，考核多个知识点和能力点，或者使用的方法和考核的目标不属于同一章节，对于这种情况，我们一般将其分类在主要考核目标所在的章节中援比如，利用 [illegible] 法则求极限的试题，尽管属于一元函数微分学的内容，但一般分类在函数、极限、连续一节中援

摇摇所选试题大多附有难度值和区分度等统计指标援难度和区分度数值是教育测量学中评价试题质量的两个重要指标援这里难度值指标最为有用，所给的难度值是指考生平均得分与题目满分之商，也就

是得分率援它是通过从全国考生中随机抽取部分考生样本的答题情况统计出来的，具有很好的精确度，较为客观地反映出题目的难易程度援这里的难度值，一般指“容易度”，所列难度值越大，试题得分率越高，试题越容易，相反，所列难度值越小，试题得分率越低，试题越难援区分度反映试题将考生水平拉开来的功效援区分度越高，则区分力越强，反之，区分力越低援

摇摇另外，为了进一步描述试题的特性，还对部分试题按难度和区分度进行了分类援试题共分为六类，难度值低于 [illegible] 且区分度低于 [illegible] 的试题为Ⅰ类试题；难度值在 [illegible] 之间但区分度低于 [illegible] 的试题为Ⅱ类试题；难度值大于 [illegible] 且区分度低于 [illegible] 的试题为Ⅲ类试题；难度值低于 [illegible] 但区分度大于 [illegible] 的试题为Ⅳ类试题；难度值在 [illegible] 之间，区分度大于 [illegible] 的试题为Ⅴ类试题；难度值大于 [illegible]，但区分度大于 [illegible] 的试题为Ⅵ类试题援不同类试题在试卷中的作用不同援在这六类试题中，大多数试题属于第Ⅴ类试题援第Ⅴ类试题难易度适中，区分度合格，是比较成功的试题援但是第Ⅰ类和第Ⅳ类试题是考生得分率低的试题，应引起考生的高度重视，会做这类试题，说明考生的数学水平达到较高程度援

摇摇考生在结合本书进行数学复习时，一定要注意以下几点：

摇摇第一，要紧扣最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》复习，熟悉考试大纲规定的考试内容和考试要求援考试大纲是考试命题的依据，出题范围和试题要求不会超过考试大纲的规定援

摇摇第二，要了解各种题型的特点，掌握各种试题的解题方法援数学考试题型主要包括选择题、填空题、解答题和证明题援选择题主要考查数学的基本概念、基本性质和基本方法，要求考生根据题干所给条件和要求，进行分析、推理、判断、比较或简单计算，准确地做出正确选择援做选择题一般不需要复杂的计算，要求考生数学概念清楚，性质熟悉，方法熟练，并能从正反面分析考查各选项的正误援填空题主要考查数学的基本性质、基本的运算方法和定理的简单应用，要求考生能够准确、快速地填写出正确答案援在解答这两类试题时，不要拘泥于解答的书写过程，要重视答案的准确性，因为一旦答错，前功尽弃援解答题是数学考试的主要题型，可以用于考查所有要求考查的知识和能力援解答题还可以分为计算题、分析判断题、综合题和应用题援每种题型的功能有所侧重，主要考查考生的基本运算能力、逻辑推理能力、综合应用所学知识分析问题和解决问题的能力援对于解答题，考生应注意总结试题类型，归纳解题方法，提高解题能力援证明题主要考查逻辑思维和逻辑推理能力，是数学考试中历年得分率最低的一种题型，是广大考生的普遍薄弱环节，希望考生能够从本书所选试题中有所启迪，通过练习，提高逻辑推理能力援

摇摇第三，要结合自己数学水平的实际情况，有选择地选取适合的试题进行练习，全面提高自己的解题能力援全书共选有 [illegible] 道试题，逐题都做需要花很长时间，也没有必要援要针对自己的弱项、难点进行学习援比如，考查逻辑推理能力的证明题平时是弱项，就应对证明题部分有选择地重点练习援另外，要善于从历年试题中归纳出典型的题型进行反复练习，可以起到事半功倍的效果援

摇摇第四，要边做题，边总结，最好先不看解答，自己做，或者先看一下试题中“分析”的提示后自己做援如果自己会做，就不要看解答了，同类试题也可以少做了，数学就是这样一通百通援但是如果做错了，可以看解答，但必须仔细总结或找出解题思路中的问题，并继续做相关的试题，以提高解决类似试题的能力援在解析中，对部分试题，我们还给出了多种解法和考生的典型错误援掌握多种解法可以拓宽解题思路，考生应注意掌握和学习援对典型错误，考生更应引起注意，因为这些问题一般都具有普遍性，希望考生不要重蹈覆辙，避免发生类似错误援

摇摇第五，要善于利用试题所提供的统计信息对自己的能力和水平进行自我检测援有些试题属于第Ⅲ类或第Ⅵ类试题，大家得分率都很高，你会做别人也会做，不能满足于会做这类试题援相反，在做得分率较低的第Ⅰ类和第Ⅳ类试题时，即使暂时没有做出来或做错，也不要灰心，仔细研究其分析和解

法，完成这类试题，会使你的水平有较大幅度的提高援当然，属于中等难度的第Ⅱ类和第Ⅴ类试题是试卷中占分比例最高的试题，考生应重点掌握，切不可忽视援

摇摇由于作者水平有限，书中难免有疏漏、不足和错误之处，恳请读者批评指正援

本书编写组

圆园园园年 猿月摇摇

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目摇摇录

摇第一部分摇高等数学…… 员
摇摇第一章摇复习指导 …… 员
摇摇第二章摇真题精选解析 …… 圆员
摇摇摇摇第一节摇函数、极限、连续 …… 圆员
摇摇摇摇第二节摇一元函数微分学 …… 猿圆
摇摇摇摇第三节摇一元函数积分学 …… 源愿
摇摇摇摇第四节摇多元函数微分学…… 缘员
摇摇摇摇第五节摇多元函数积分学…… 远员
摇摇摇摇第六节摇无穷级数…… 苑员
摇摇摇摇第七节摇常微分方程…… 愿缘
摇第二部分摇线性代数…… 怨愿
摇摇第一章摇复习指导 …… 怨愿
摇摇第二章摇真题精选解析 …… 园员
摇第三部分摇概率论与数理统计 …… 园源
摇摇第一章摇复习指导 …… 园源
摇摇第二章摇真题精选解析 …… 园愿

第一部分摇高 等 数 学

第一章摇复 习 指 导

摇摇高等数学是高等院校一门重要的基础课，因此它是硕士研究生入学考试数学试卷的最重要组成部分援《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》) 规定，无论是工科类数学试卷一、试卷二，还是经济类数学试卷三、试卷四，均要求考高等数学，它在数学试卷一中约占 遍豫，数学试卷二中约占 原园豫，数学试卷三、试卷四中约占 缘园豫援因此在备考时，如何复习高等数学，就成为考生十分关注的课题援为了帮助考生更有效地进行复习，在这里按照大纲规定的考试内容的顺序，一一进行阐述援

摇摇一、函数、极限、连续

摇摇函数是高等数学的研究对象，极限是高等数学的重要概念，也是研究的方法，而且它的思想和方法贯穿于微积分的始终援连续是一大类函数的重要特性，连续函数是微积分的重点援本单元考查重点，是函数 (含表示方法) 、极限 (含左极限与右极限) 、连续 (含左连续与右连续) 的概念及性质，函数间断点类型的判断，函数的表示，求极限的若干方法，运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题援本单元试题类型：①函数记号的运算；②分段函数的运算；③简单反函数的定义域及其表示；④考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件；⑤判断函数间断点及其类型；⑥无穷小的比较；⑦判断函数的性质 (有界性,单调性,奇偶性,周期性) ；⑧利用闭区间上连续函数性质证明一类题；⑨求极限 (包括用极限的定义,等价无穷小,极限的运算法则,极限存在准则,两个重要极限,函数的连续性,[illegible]法则,导数定义,定积分定义以及级数收敛的必要条件等方法) 援

摇摇下面仅就几种重点题型，举例说明援

摇摇例 员摇试证函数 枣曾 越$\frac{员}{曾精糟泽\frac{员}{曾}}$在点 曾越园的任何邻域内是无界的，但当 曾→园时不成为无穷大援

摇摇分析摇在点 曾越园的某邻域内，函数无界与当 曾→园时，枣曾→肄是两个容易混淆的概念，函数无界未必就是无穷大 (无穷大显见是无界的) 援

摇摇证摇对于无论多大的正数 郧，总有充分接近于 曾越园的点，使得 渣枣曾 渣越$\left|\frac{员}{曾精糟泽\frac{员}{曾}}\right|$跃郧援例如，若取 曾越$\frac{员}{灶\pi}$，则$\left|\frac{员}{曾精糟泽\frac{员}{曾}}\right|$越灶，所以，若 灶跃郧，即 灶跃$\frac{郧}{\pi}$，则存在点 曾越$\frac{员}{灶\pi}$，使$\left|\frac{员}{曾精糟泽\frac{员}{曾}}\right|$跃郧，即函数 枣曾在点 曾越园的任何邻域内是无界的援

摇摇又如，若取 曾越$\frac{员}{\left(灶\pm\frac{员}{圆}\right)\pi}$，则当 灶→肄时，曾→园，但此时$\frac{员}{曾精糟泽\frac{员}{曾}}$越园，因此函数 枣曾并不趋于无穷大援

摇摇例 圆摇设 枣曾在闭区间 [葬遭上连续，且 枣葬 约葬，枣遭 跃遭，试证方程 枣曾 越造在 (葬遭内至少有一个实根援

摇摇分析摇方程 枣曾 越造在 (葬遭内有实根等价于函数 枣曾 原造在 (葬遭内有零点援而 枣曾 原造在 [葬遭上连续，故可考虑对其用连续函数的零点存在定理援

摇摇证摇设 云(曾越枣曾 原造 云(曾连续，曾∈ [葬遭，又 云(葬越枣葬 原葬－造 云(遭越枣遭 原遭－造，故由零点存在定理，知至少存在一点 孜∈ (葬遭，使 云(孜) 越园，即 枣孜) 原孜越园，于是 孜为方程 枣曾 越造的实根援

摇摇例 猿摇设函数 枣曾在点 曾越园的某邻域内有二阶连续导数，且$\lim\limits_{曾\to园}\left[\frac{员}{曾}+\frac{枣曾}{曾}\right]^{\frac{员}{曾}}$越藻，求 枣园，枣′园，枣″园及$\lim\limits_{曾\to园}$

$\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]^{\text{员}}$援

摇摇分析摇由题设，知

$$\text{遥}\frac{\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]}{\text{會}}\text{越}\text{袁}$$

$$\Longrightarrow \text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]\text{越}\text{园}\text{(否则上述极限不存在)}$$

$$\Longrightarrow \text{遥}\left[\text{會}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]\text{越}\text{园}\Longrightarrow \text{遥}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\text{越}\text{园}$$

$$\Longrightarrow \text{遥}\,\text{寒會越园越寒园}\text{摇(寒會连续)，}$$

从而摇寒Z园 越$\frac{\text{遥}\,\text{寒會}\;\text{原寒园}}{\text{會原园}}$越$\frac{\text{遥}\,\text{寒會}}{\text{會}}$越园援

摇摇下面求 寒X园，或用 $\frac{\text{遥}\,\text{分}\,\text{子}}{\text{分}\,\text{母}}$法则，或用 $\frac{\text{遥}\,\text{分}\,\text{子}}{\text{分}\,\text{母}}$展式，最后利用重要极限求出欲求之极限援

摇摇解法 员摇由题设，有$\frac{\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]}{\text{會}}$越袁 从而有 寒园 越园 寒$\text{Z}$园 越园(连续性,导数定义)援

摇摇因当 會→园 有 $\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]\sim\text{會}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}$，

故知 $\frac{\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]}{\text{會}}$越$\frac{\text{遥}\,\text{會}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}}{\text{會}}$越袁

即有 $\text{遥}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}$越圆$\Longrightarrow \text{遥}\frac{\text{寒}\,\text{Z}\,\text{會}}{\text{圆}\,\text{會}}$越圆

$$\Longrightarrow \text{遥}\frac{\text{寒}\,\text{Z}\,\text{會}\;\text{原寒园}}{\text{會原园}}\text{越}\text{原}\text{即 寒}\text{X}\text{园 越}\text{原}\text{援}$$

摇摇故 $\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]^{\text{员}}\text{越}\text{遥}\left[\left(\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right)^{\frac{\text{會}}{\text{寒}\,\text{會}}}\right]^{\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}}$

越$\frac{\text{寒}}{\text{寒}}$援

摇摇解法 圆摇由题设，有

$$\text{遥}\frac{\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]}{\text{會}}\text{越}\text{袁}\qquad(*)$$

推知摇寒园 越园 寒Z园 越园 而由泰勒公式

$$\text{寒會 越寒园 垣寒}\text{Z}\text{园 會}\frac{\text{寒}\,\text{X}\,\text{园}}{\text{圆}}\text{會}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{會}^{\text{圆}})$$

$$\text{越}\frac{\text{寒}\,\text{X}\,\text{园}}{\text{圆}}\text{會}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{會}^{\text{圆}})\text{，}$$

可得摇$\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}$越$\frac{\text{寒}\,\text{X}\,\text{园}}{\text{圆}}$會垣o(會圆)，代入(*)，有

$$\frac{\text{遥}\left[\text{员}\left(\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{X}\,\text{园}}{\text{圆}}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{员})\right)\right]}{\text{會}}\text{越}\frac{\text{遥}\left(\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{X}\,\text{园}}{\text{圆}}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{员})\right)}{\text{會}}$$

$$\text{越}\text{遥}\left(\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{X}\,\text{园}}{\text{圆}}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{员})\right)\text{越}\text{袁}\Longrightarrow \text{寒}\text{X}\text{园 越}\text{原}\text{援}$$

摇摇故 $\text{遥}\left[\text{员}\frac{\text{寒}\,\text{會}}{\text{會}}\right]^{\text{员}}\text{越}\text{遥}[\text{员垣}\text{园}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{會}^{\text{园}})]^{\text{员}}\text{越}\text{遥}[\text{员垣}\text{园}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{會}^{\text{园}})]^{\frac{\text{员}}{\text{园}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{會}^{\text{园}})}\cdot\frac{\text{园}\,\text{垣}\,\text{o}(\text{會}^{\text{园}})}{\text{會}}}$

·圆·

摇摇注摇①例 员说明函数无界与无穷大是两个不同的概念,不能混为一谈援无穷大必无界,而无界却未必无穷大援函数无界相对函数有界而言,从函数有界的定义可以立即得出函数无界的定义援函数有界的定义:∃酝跃园,∀曾∈隙有 渍枣(曾)渍≤酝;于是有函数无界的定义:∀酝跃园,∃曾0∈隙有 渍枣(曾0)渍跃酝(其中 隙表示某区间)援从某种意义上来说,函数“有界”与“无界”可以认为是一对孪生的概念,这样就容易理解,也便于记忆援

摇摇② 例 圆是一道证明题,用的是常规方法,但却是很重要的方法,那就是“辅助函数”法援引入什么样的函数至关重要,通常是从结论出发,由已知条件,寻找理论根据(定理、公式),这样作出的辅助函数即可达到证明的目的援

摇摇③ 例 猿是一道关于极限的综合题,在解题过程中,涉及极限概念,等价无穷小,连续性,缮在燥辽达法则,导数定义,耘糟澡燥造燥灶公式,重要极限等,知识点较多,但只要充分理解题设条件,把握住极限存在性这一主体思路,还是容易入手的援事实上,由 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{枣(曾)-枣(园)}{曾}=\lim\limits_{曾\to园}\left[\dfrac{员}{曾}\cdot\dfrac{枣(曾)-枣(园)}{曾-园}\right]$ 越猿立知 枣(园)越园(因 枣(曾)连续,若 枣(园)≠园则上述极限不存在)援进而由 $\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{枣(曾)}{曾}=\lim\limits_{曾\to园}\dfrac{枣(曾)-枣(园)}{曾-园}$ 越员立知 枣忆(园)越员援注意到,在涉及与二阶导数或二阶以上导数有关的命题时,应用 耘糟澡燥造燥灶公式往往是有效的援本题在求 枣(园)时,用了 耘糟澡燥造燥灶公式比较方便援解法 圆比解法 员更直接一些援

摇摇二、一元函数微分学

摇摇本单元考查重点是导数(微分)的概念,导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程与法线方程,可导(可微)与连续;微分运算(按定义求导数,各种函数形式的导数,分段函数求导数,高阶导数等);微分中值定理(含 砸燥造造燃定理,缮葬怎澡燥定理,怎葬糟澡燥造燥灶定理以及 耘糟澡燥造燥灶定理)并用之于证明某些函数不等式,函数方程及其相关命题;导数应用(函数单调性、极值判别法,函数图形凹凸性、拐点判别法,求曲率)并用之于绘图(会求渐近线);会用 缮葬怎澡燥定理法则求极限援

摇摇本单元的试题类型:①求已知函数(包括显式、隐式、参数式以及变上限积分所确定的函数等)的导数(微分,高阶导数);②判定函数在一点的可导性(包含连续性、极限存在性);③利用导数确定函数性态(单调性,极值,凹凸性,拐点),描绘函数图形(含渐近线);④利用导数方法,求实际问题中的最大值、最小值问题;⑤利用微分中值定理,证明函数属性的命题;⑥证明函数不等式(利用函数单调性,微分中值定理)援如果说上一单元的证明题主要用到闭区间上连续函数的性质,那么本单元的证明题几乎都要用到微分中值定理了,就这方面的问题举例以说明援

摇摇例 员摇设函数 枣(曾)在[原,圆]上具有二阶导数,且 渍枣(曾)渍≤员,又 枣(原)与 枣(圆)异号,试证:至少存在一点 $\xi\in(原,圆)$,使 枣(ξ)+枣忆(ξ)+枣忆忆(ξ)越园援

摇摇分析摇由题设,作辅助函数 云(曾),使 云(原)越园,由结论,知 云(曾)出现 枣(曾)+枣忆(曾),恰好 云(曾)越 $e^{曾}$[枣(曾)+枣忆(曾)]符合上述要求援为了证出 [枣(曾)+枣忆(曾)]$\Big|_{曾=\xi}$越园,需估计 枣忆(曾)$\Big|_{曾=\xi}$援为此,在[原,圆]与[圆,圆]上分别应用 缮葬怎澡燥定理,得 渍枣忆(葬)渍≤员,渍枣忆(遭)渍≤员,其中 葬∈(原,圆),遭∈(圆,圆)援

摇摇证摇由 缮葬怎澡燥定理,有

$$枣(圆)-枣(原)=枣忆(葬)[圆-原(原<葬<圆)],原<葬<圆$$

$$枣(圆)-枣(原)=枣忆(遭)(圆-原),原<遭<圆$$

即

$$枣忆(葬)=\frac{枣(圆)-枣(原)}{圆},原<葬<圆$$

$$枣忆(遭)=\frac{枣(圆)-枣(原)}{圆},原<遭<圆援$$

由 渍枣(曾)渍≤员可知,渍枣忆(葬)渍≤员,渍枣忆(遭)渍≤员,

摇摇作辅助函数

$$云(曾)=e^{曾}[枣(曾)+枣忆(曾)],$$

故有

$$云(葬)=云(遭)=园援$$

摇摇由题设知,云(曾)连续,曾∈[葬,遭],云(园)越园,故 云(曾)在[葬,遭]上的最大值取自于(葬,遭)内,且 $\max\limits_{[葬,遭]}云(曾)\geqslant园$,又由题设知,云(曾)在(葬,遭)内可导,于是由 云澡燥造造燃定理,知 云忆(ξ)越园,$\xi\in(葬,遭)$,即

云忆(ξ) 越圆藉(ξ) [枣(ξ) 垣枣义(ξ)]，

因 云(ξ) ≥源 渣枣(ξ) 渣≤员 故 枣(ξ) ≠园 从而有 枣(ξ) 垣枣义(ξ) 越园 这里 ξ ∈ (葬谴⊂ (原圆圆援

摇摇例 圆摇设函数 枣曾在 (葬谴内具有二阶导数，且 枣义(曾 跃园 则对于 (葬谴内任意 灶个点 曾$_{员}$，曾$_{圆}$，…，曾$_{灶}$，有

$$枣\left(\frac{曾_{员}垣曾_{圆}垣\cdots垣曾_{灶}}{灶}\right)\leqslant\frac{枣(曾_{员})垣枣(曾_{圆})垣\cdots垣枣(曾_{灶})}{灶}援$$

摇摇分析摇记

$$糟越=\frac{曾_{员}+曾_{圆}+\cdots+曾_{灶}}{灶},$$

因 $皂^{2}(曾_{员},曾_{圆},\cdots,曾_{灶}) \leqslant 糟^{2}\leqslant 皂^{2}(曾_{员},曾_{圆},\cdots,曾_{灶})$，

故 糟（葬遭援于是在点 糟（葬遭，枣曾具有 耙糟糟则公式，由此即得所证援

摇摇证摇由一阶 耙糟糟则公式，

$$枣(曾_{灶})=枣(糟)+枣'(糟)(曾_{灶}-糟)+\frac{枣''(\xi_{灶})}{圆!}(曾_{灶}-糟)^{圆},$$

其中 $\xi_{灶}$在 糟与 $曾_{灶}$之间援

摇摇由题设 枣''(曾)跃园，于是有

$$枣(曾_{灶})\geqslant 枣(糟)+枣'(糟)(曾_{灶}-糟)(灶=员,圆,\cdots),$$

将上式对 灶从 员加到 灶，并利用 $曾_{员}+曾_{圆}+\cdots+曾_{灶}=灶糟$，则

得 $$枣(曾_{员})+枣(曾_{圆})+\cdots+枣(曾_{灶})\geqslant 灶枣(糟),$$

即 $$枣(糟)\leqslant\frac{员}{灶}[枣(曾_{员})+枣(曾_{圆})+\cdots+枣(曾_{灶})],$$

或 $$枣\left(\frac{曾_{员}+曾_{圆}+\cdots+曾_{灶}}{灶}\right)\leqslant\frac{枣(曾_{员})+枣(曾_{圆})+\cdots+枣(曾_{灶})}{灶},$$

式中等号仅当 $曾_{员}=曾_{圆}=\cdots=曾_{灶}=糟$时成立援

摇摇特别地，取 灶越圆，有 $枣\left(\frac{曾_{员}+曾_{圆}}{圆}\right)\leqslant\frac{枣(曾_{员})+枣(曾_{圆})}{圆}$援

摇摇例 猿摇设 枣（曾）有二阶连续导数，且 枣'(园)越园，$\lim\limits_{曾\to圆}\frac{枣(曾)}{曾^{圆}}$越员，则 枣(园)是 枣（曾）的极小值援

摇摇分析摇利用极限与无穷小的关系，写出 枣（曾）的表达式并知在点 曾越园的空心邻域内 枣''(曾)跃园，再由 耙糟糟则公式及极值定义即可得证援

摇摇证摇由摇$\lim\limits_{曾\to圆}\frac{枣(曾)}{曾^{圆}}$越员$\Longrightarrow\frac{枣(曾)}{曾^{圆}}$越员垣蚤（曾），

$\Longrightarrow 枣(曾)$越曾^{圆}垣蚤（曾），

故在点 曾越园的空心邻域内总有 枣''(曾)跃园援于是由一阶泰勒公式，有

$$枣(曾)越枣(园)垣枣'(园)曾垣\frac{枣''(\xi)}{圆}曾^{圆}\geqslant 枣(园),$$

摇摇因此，由极值定义知 枣(园)为 枣（曾）的极小值援

摇摇注摇①例 员有一定的综合性，先由结论启示需作辅助函数 云(曾)越$枣^{圆}$(曾)垣$枣^{圆}$(曾)，于是便有 云忆(曾)越圆枣(曾)·[枣(曾)垣枣忆(曾)]，为要证出 $\exists\xi\in$（原圆圆），有 枣(ξ)垣枣忆(ξ)越园援这里用到三个定理，一是 缘辕糟则定理，估计出 $\lim\limits_{曾\to+\infty}$枣(葬)渣≤员，$\lim\limits_{曾\to-\infty}$枣(遭)渣≤员，从而知 云(葬)≤圆，云(遭)≤圆；二是闭区间上连续函数的最值定理，得 $\max\limits_{葬\leqslant曾\leqslant遭}$云(曾)≥源，且在（葬遭内达到；三是由 云费马定理（即若可导函数 φ（曾）在一点 曾=∈（葬遭取得极值，则有 φ忆(曾)越园，知 云忆(ξ)越园，即 云忆(ξ)越圆枣(ξ)[枣(ξ)垣枣忆(ξ)]越园，由 云(ξ)≥源，渣枣(ξ)渣≤员，必有 枣(ξ)≠园，因此 枣(ξ)垣枣忆(ξ)越园，ξ∈（葬遭援

摇摇②例 圆中若设 枣忆(曾)约园，则结论中的不等号反向援比如，设 枣忆(曾)约园，曾=∈（葬遭，则∀$曾_{员}$，$曾_{圆}$∈（葬遭有 $枣\left(\frac{曾_{员}+曾_{圆}}{圆}\right)$跃$\frac{员}{圆}$[枣($曾_{员}$)垣枣($曾_{圆}$)]援此题证法除按例 圆办法处理外，也可利用单调性证之：构造辅助函数

$$\varphi(曾)越枣\left(\frac{曾_{员}+曾}{圆}\right)原\frac{员}{圆}[枣(曾_{员})垣枣(曾)],$$

有 φ($曾_{员}$)越园，φ忆(曾)越$\frac{员}{圆}$枣'$\left(\frac{曾_{员}+曾}{圆}\right)$原$\frac{员}{圆}$枣'(曾)越$\frac{员}{源}$枣''(ξ)($曾_{员}$原曾)，因 枣''(曾)约园，故当 曾约$曾_{员}$时，有 φ忆(曾)约园；当曾跃$曾_{员}$时，有 φ忆(曾)跃园，故 φ($曾_{员}$)越园为 φ（曾）的最小值，因此当 曾≠$曾_{员}$时，有 φ（曾）跃园，即知当 $曾_{圆}$≠$曾_{员}$时，有

$$枣\left(\frac{曾_{员}+曾_{圆}}{圆}\right)跃\frac{员}{圆}[枣(曾_{员})垣枣(曾_{圆})]援$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

摇摇还可利用 缮辅瞅届蒜定理证之：不妨设 曾员约曾圆，由 缮辅瞅届蒜定理，有

$$\text{隧越寒}(\text{曾圆})\ \text{原寒}\left(\frac{\text{曾员}+\text{曾圆}}{\text{圆}}\right)\text{原}\left[\text{寒}\left(\frac{\text{曾员}+\text{曾圆}}{\text{圆}}\right)\text{原寒}(\text{曾员})\right]$$

$$\text{越}\frac{\text{寒}'(\xi_{\text{圆}})}{\text{圆}}\text{原}\frac{\text{寒}'(\xi_{\text{员}})}{\text{圆}}$$

$$\text{越}\frac{\text{曾圆原曾员}}{\text{圆}}[\text{寒}'(\xi_{\text{圆}})\ \text{原寒}'(\xi_{\text{员}})]\ \text{越}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\text{寒}''(\xi)\ (\xi_{\text{圆}}\text{原}\xi_{\text{员}})\ (\text{曾圆原曾员}),$$

其中 曾员约$\xi_{\text{员}}$约$\frac{\text{曾员}+\text{曾圆}}{\text{圆}}$约$\xi_{\text{圆}}$约曾圆，$\xi_{\text{员}}$约$\xi$约$\xi_{\text{圆}}$援由 寒″(ξ) 约园推知 隧′园 即得

$$\text{寒}\left(\frac{\text{曾员}+\text{曾圆}}{\text{圆}}\right)\text{跃}\frac{\text{寒}(\text{曾员})+\text{寒}(\text{曾圆})}{\text{圆}}\text{援}$$

摇摇③ 例 猿也可以这样证：由$\underset{\text{曾}\to\text{园}}{\text{遭}}\frac{\text{寒}(\text{曾})}{\text{渍曾渍}}$越员跃园 故由极限的保号性，存在点 曾越园的空心邻域，在此邻域内$\frac{\text{寒}(\text{曾})}{\text{渍曾渍}}$跃园 即有 寒(曾)跃园 或(寒(曾)怂园 即 寒(曾)单调增加，又 寒(园)越园 于是在点 曾越园左邻域 寒(曾)约园 右邻域寒(曾)跃园 由极值第一判别法知 寒园为 寒曾的极小值援还可以利用 缮辅瞅届蒜定理证之：在证出 寒′(曾)跃园(同上证)后，由 缮辅瞅届蒜定理，可得

$$\text{寒}'(\text{曾})\ \text{越寒}'(\text{园})\ \text{垣寒}''(\xi)\ \text{曾越寒}''(\xi)\ \text{曾}\begin{cases}\text{约园}, & \text{当 曾约园}\\ \text{跃园}, & \text{当 曾跃园}\end{cases}$$

因此由极值第一判别法知 寒园为 寒曾的极小值援

摇摇三、一元函数积分学

摇摇本单元考查重点：原函数概念，不定积分概念及性质；求不定积分的换元积分法，分部积分法；几种典型函数的不定积分(含有理分式、三角有理式及简单无理式)；定积分的概念和性质(含定积分中值定理)；变上限积分定义的函数及其导数；定积分的计算；定积分的应用(诸如求平面图形的面积，求平面曲线的弧长，求旋转体体积，求旋转曲面的面积，已知平行截面求体积，求变力做功，引力，压力以及求函数的平均值等)；广义积分援

摇摇本单元试题类型：求函数的不定积分及定积分；对变限积分表示的函数的性质的讨论(例如，求其极限，导数，极值，判断奇偶性，求含有积分式的方程的解等)；定积分的性质以及有关定积分的等式、不等式的证明；广义积分的计算；定积分的应用援

摇摇计算积分一般较为困难，不易掌握，这是因为求积分有较大的灵活性(甚至带有技巧性)，不像计算导数(微分)那样有固定的程序，但多练习，勤于思考，善于归纳，从中可以找到一些规律援求不定积分一般是先通过一些运算(代数化简，三角恒等变形以及变量替换等)，把被积表达式化成基本积分公式中类型，从而求得欲求之不定积分援仅仅这些运算是不够的，根据被积函数的特点，还要采取换元积分法与分部积分法来处理，计算定积分主要是用 牛顿-莱布尼茨公式$\int_{\text{葬}}^{\text{遭}}\text{寒}(\text{曾})\text{凿曾}\ \text{越云}(\text{曾})\Big|_{\text{葬}}^{\text{遭}}\ \text{越云}(\text{遭})\ \text{原云}(\text{葬})$进行的，关键是求 寒曾的一个原函数 云(曾)(即求 寒曾的不定积分)援在这里要注意，在用上述公式计算定积分时，要求被积函数 寒曾在积分区间[葬，遭]上连续援若有间断点，则可根据定积分性质，将[葬，遭]按间断点分成子区间，再求定积分援若间断点是无穷型的，则要按广义积分处理援当被积函数是分段函数时，定积分就应在分段区间上求援被积函数含有绝对值的定积分，通常可化为分段函数的定积分援从历届研究生入学试题来看，变限积分占有相当的分量援这类积分的特点是积分上(下)限是可变的，当被积函数 寒曾连续，变上限函数$\int_{\text{葬}}^{\text{曾}}\text{寒}(\text{贼})\text{凿贼}$就可导，且$\left(\int_{\text{葬}}^{\text{曾}}\text{寒}(\text{贼})\text{凿贼}\right)'\text{忆}\ \text{越寒}(\text{曾})$，可见变上限函数$\int_{\text{葬}}^{\text{曾}}\text{寒}(\text{贼})\text{凿贼}$就是 寒曾的一个原函数援与此相关的命题很多，应引起特别的关注援下面举几例说明解题思路援

摇摇例 员摇 设 寒曾连续，曾∈(园，垣蕴)，寒员越猿且满足$\int_{\text{员}}^{\text{曾}+\text{赠}}\text{寒}(\text{贼})\text{凿贼}\ \text{越曾}\int_{\text{员}}^{\text{赠}}\text{寒}(\text{贼})\text{凿贼}+\int_{\text{员}}^{\text{曾}}\text{寒}(\text{贼})\text{凿贼}$曾跃园，赠跃园，试求 寒曾援

摇摇分析摇注意到 寒曾连续，曾与 赠相互独立，因而可以分别对 曾与 赠求导，利用题设，消去其中一个变量，以便求解援

摇摇解摇将所给等式两边对变量 赠求导，得

$$\text{曾}\text{寒}\text{曾}\text{赠} \text{越}\text{曾}\text{寒}\text{赠} \text{垣}\int_{\text{员}}^{\text{曾}} \text{寒}\text{咸}\text{渍}\text{咸}$$

令 赠越员，有

$$\text{曾}\text{寒}\text{曾} \text{越}\text{曾}\text{寒}\text{员} \text{垣}\int_{\text{员}}^{\text{曾}} \text{寒}\text{咸}\text{渍}\text{咸}$$

摇摇上式两边对 曾求导，得

$$\text{寒}\text{曾} \text{垣}\text{曾}\text{寒}'\text{曾} \text{越}\text{寒}\text{员} \text{垣}\text{寒}\text{曾}，$$

即

$$\text{寒}'\text{曾} \text{越}\frac{\text{寒}\text{员}}{\text{曾}} \text{越}\frac{\text{猿}}{\text{曾}}，$$

故 寒曾 越猿凿曾回说，代入 寒员 越猿

得

$$\text{寒}\text{曾} \text{越}\text{猿}(\text{员}\text{垣}\text{凿}\text{曾}\text{援}$$

摇摇例 圆摇设 寒'曾连续，曾≥ 园员，试证：∀ 曾≥ 园员，有

$$\text{渍}\text{寒}\text{曾}\text{渍} \leqslant \int_{\text{园}}^{\text{员}} [\text{渍}\text{寒}\text{咸}\text{渍}\text{垣}\text{渍}\text{寒}'\text{咸}\text{渍}\text{渍}\text{咸}\text{援}$$

摇摇分析摇将 寒曾用变上限积分（被积函数 寒'曾）表示，再利用定积分的性质证之援

摇摇证摇由 寒曾 越寒曾园 垣$\int_{\text{曾}_{\text{园}}}^{\text{曾}}$寒'咸渍咸，曾园∈ 园员，得

$$\text{渍}\text{寒}\text{曾}\text{渍}\text{越}\left|\text{寒}\text{曾}_{\text{园}} \text{垣}\int_{\text{曾}_{\text{园}}}^{\text{曾}} \text{寒}'\text{咸}\text{渍}\text{咸}\right| \leqslant \text{渍}\text{寒}\text{曾}_{\text{园}}\text{渍}\text{垣}\int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{渍}\text{寒}'\text{咸}\text{渍}\text{咸}\text{渍}\text{援}$$

取 曾园为 渍寒曾渍在 园员上的最小值点，即当 曾≥ 园员 时有 渍寒曾园渍≤ 渍寒曾渍，从而有

$$\int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{渍}\text{寒}\text{曾}_{\text{园}}\text{渍}\text{渍}\text{曾}_{\text{园}} \leqslant \int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{渍}\text{寒}\text{曾}\text{渍}\text{渍}\text{曾}$$

即

$$\text{渍}\text{寒}\text{曾}_{\text{园}}\text{渍}\text{渍}\text{曾}_{\text{园}} \leqslant \int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{渍}\text{寒}\text{曾}\text{渍}\text{渍}\text{曾}$$

因此

$$\text{渍}\text{寒}\text{曾}\text{渍}\text{渍}\text{曾}_{\text{园}} \leqslant \int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{渍}\text{寒}\text{曾}\text{渍}\text{渍}\text{曾}_{\text{园}} \text{垣}\int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{渍}\text{寒}'\text{咸}\text{渍}\text{渍}\text{咸}$$

$$\text{越}\int_{\text{园}}^{\text{员}} [\text{渍}\text{寒}\text{咸}\text{渍}\text{垣}\text{渍}\text{寒}'\text{咸}\text{渍}\text{渍}\text{咸}\text{援}$$

摇摇注摇①例 员说明由变限积分等式求被积函数表达式，一般要先求导，转化为微分方程，再求解援本题含两个参变量，相互独立，应分别求导援

摇摇② 例 圆是个不等式的证明题，其中包含定积分，容易联想到要利用定积分的性质援由于不等式中出现 寒曾的形式，直接证不易入手，需要把 寒曾转换为定积分的表达形式，因而想到用变限积分表达它，即 寒曾 越寒曾园 垣$\int_{\text{曾}_{\text{园}}}^{\text{曾}}$寒'咸渍咸，曾园∈ 园员援其实，这只不过是反用一下 晕莱赖赠图藏藏图公式（已知一个原函数，通过公式计算定积分，反过来，可用变限定积分表达一个原函数）援

摇摇四、向量代数和空间解析几何

摇摇本单元考查重点是向量的基本运算（包括向量的线性运算，向量的数量积、向量积与混合积）；平面方程和空间直线方程的常见形式以及它们之间的相互关系；常见的二次曲面（球面、椭球面、柱面、锥面及抛物面等）方程及其图形援

摇摇本单元试题类型：计算向量的数量积、向量积及混合积；求平面方程（常见的形式有点法式，截距式，一般式等）；求直线方程（常见的形式有标准式（对称式），参数式，一般式等）；利用向量运算考查平面与平面、直线与直线、直线与平面之间的夹角以及平行、垂直条件；点到平面的距离（考查二次曲面，主要结合多元微积分学内容进行，至于旋转曲面，有时单独命题）援

摇摇例 员摇设 葬 遭 糟不共线，试证

$$\text{葬}\text{垣}\text{遭}\text{垣}\text{糟}\text{越}\text{园}$$

的充要条件是 葬葬再遭越遭再糟越糟再葬越园援

摇摇分析摇利用向量的向量积以及平行条件援

摇摇证摇必要性

摇摇设 葬亘遭亘糟越园，即 葬越原(遭亘糟，于是

$$葬再遭越原(遭亘糟 伊再遭越遭再糟援$$

又由 遭越原(葬亘糟，得 $$遭再糟越原(葬亘糟 伊再糟越糟再葬援$$

故有 $$葬再遭越遭再糟越糟再葬援$$

摇摇充分性

摇摇设 葬再遭越遭再糟越糟再葬，则有 (葬亘遭亘糟 伊葬越遭再葬亘糟再葬越园，

同理得 $$(葬亘遭亘糟 伊再遭越园 (葬亘遭亘糟 伊再糟越园，$$

故 $$(葬亘遭亘糟 // 葬 (葬亘遭亘糟 // 遭 (葬亘遭亘糟 // 糟$$

若 葬亘遭亘糟≠园，则 葬/遭/糟与题设矛盾，因此，必有葬亘遭亘糟越园援

摇摇例 圆摇求直线 $\frac{曾原员}{员}=\frac{赠}{员}=\frac{扎原员}{原员}$ 在平面 π :曾原赠亘圆扎原员越园上的投影直线 蕴晕的方程，并求 蕴晕绕 赠轴旋转一周所形成的曲面方程援

摇摇分析摇由投影直线 蕴晕的概念 (过 蕴作平面 $\pi_{员}\perp\pi$，则 $\pi_{员}$ 与 π 的交线即 蕴在 π 上的投影直线)，先求出投影直线 蕴晕 (可由不同途径求)，再求 蕴晕绕 赠轴旋转一周所成的曲面方程援

摇摇解法 员摇设经过 蕴且垂直于 π 的平面方程为 $\pi_{员}$:粤(曾原员 垣月赠亘悦(扎原员 越园 则由条件可知

$$\begin{cases}粤垣月原悦越园(因\ \pi_{员}过直线\ 蕴，\\ 粤原月垣圆悦越园(因\ \pi_{员}\perp\pi)\end{cases}$$

摇摇 $\Longrightarrow$ 粤顽月顽悦越原亏顽猿顽圆

于是 $\pi_{员}$ 的方程为 曾原赠原圆扎亘员越园，从而 蕴晕的方程为

$$\begin{cases}曾原赠原圆扎亘员越园\\ 曾原赠亘圆扎原员越园\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}曾越圆赠\\ 扎越原\frac{员}{圆}(赠原员 援\end{cases}$$

由此可知 蕴晕绕 赠轴旋转一周所成曲面的方程为 $曾^{圆}垣扎^{圆}越原^{圆}垣\frac{员}{源}(赠原员)^{圆}$，即 源曾圆原员扎圆垣圆扎圆赠原员越园援

摇摇解法 圆摇因直线 蕴晕的方程可写为

$$\begin{cases}曾原赠原员越园\\ 赠亘扎原员越园\end{cases}$$

故过 蕴晕的平面方程可设为

$$\pi_{员}:曾原赠原员垣\lambda(赠亘扎原员 越园$$

即 $$曾垣(\lambda 原员)赠亘\lambda 扎原(员垣\lambda) 越园援$$

因 $\pi_{员}\perp\pi$，故有 员原(λ 原员)垣圆 越园 $\Longrightarrow\lambda$ 越原圆援于是过 蕴且垂直于 π 的 $\pi_{员}$ 方程为 曾原赠原圆扎亘员越园，从而 蕴晕的方程为

$$\begin{cases}曾原赠原圆扎亘员越园\\ 曾原赠亘圆扎原员越园援\end{cases}$$

摇摇 (下同解法 员

摇摇解法 猿摇记 蕴晕的方向向量为 遭越(员，员，原员)，π 的法向量为 灶越(员，原员，圆，则过 蕴且垂直于 π 的 $\pi_{员}$ 的法向量为

$$灶_{员}越遭\times灶越\begin{vmatrix}蚤 & 躁 & 噪\\ 员 & 员 & 原员\\ 员 & 原员 & 圆\end{vmatrix}越(员，原员，原圆)援$$

又因 $\pi_{员}$ 过 蕴，从而过 蕴上的点 (员，园，员)，故 $\pi_{员}$ 的方程为

$$(曾原员)原员(赠原园)垣原圆(扎原员)越园$$

即 $$曾原赠原圆扎亘员越园$$

故得 Γ 的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

另解 (下同解法一)

注 ① 例一考查了向量的向量积运算及性质，在充分性的证明过程中，利用了反证法，这点非常重要，往往直接推不出结论时，用了它很奏效.

② 理解投影的概念，直线 l 在平面 π 上的投影直线 l_1，即过 l 作平面 $\pi_1\perp\pi$、π_1 与 π 的交线.空间点 A 在平面 π 上的投影点 A_1，即过 A 作直线 $l_1\perp\pi$、l_1 与 π 的交点.例如，设点 A (一 一，一)，平面 π：$x+y+z=0$，求点 A 在平面 π 上的投影点 A_1.因 $l_1\perp\pi$，故 l_1 的方向向量可取 π 的法向量为 (一，一，一)，又 l_1 过 A，于是 l_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=-1+t, \\ z=-1+t. \end{cases}$$

代入 π 的方程 (解出满足该方程的 t 即可得交点坐标)，解得 $t=\frac{1}{3}$，由 l_1 的方程，得交点 $A_1\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

即为所求的投影点.曲线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=1-2t \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转面方程为 $x^2+y^2+\left[1-\frac{z}{2}-\left(-\frac{z}{2}\right)\right]^2$，即 $x^2+y^2+(1-z)^2$.

$x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 的交线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面为 $x^2+\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{2}}\right)^2+z^2=1$.

另解 五、多元函数微分学

注 本单元考查重点：二元函数的连续性，偏导数的概念及计算，全微分的概念 (含全微分存在的必要条件及充分条件)，复合函数的偏导数，隐函数 (包括方程组确定的隐函数) 的偏导数，高阶偏导数 (主要是二阶偏导数) 与多元函数的极值和最值 (含条件极值)，曲面的切平面与法线，空间曲线的切线与法平面.关于二元函数 $z=f(x,y)$ 连续、可导 (即偏导数存在) 与可微 (即全微分存在) 的关系图示如下：

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x}\text{ 连续} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\text{ 连续} \end{matrix} \Longrightarrow \text{可微} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\text{ 存在 (可导)} \\ z=f(x,y)\text{ 连续} \end{cases}$$

注 本单元试题类型：利用偏导数定义求函数在某点处的偏导数；考察分段函数在分界点处的可导性与可微性；求各种形式函数 (复合函数，隐函数，含抽象函数的复合函数，由方程组确定的隐函数等) 的偏导数；求全微分；计算二元函数的极值和最值 (包括条件极值)；求曲面的切平面与法线；求空间曲线的切线与法平面；求方向导数与梯度.

注 例一设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

试证：函数 $f(x,y)$ 在点 (一，一) 处不连续，但在该点处可导.

注分析 按函数连续定义及偏导数定义证之.

注证 由题设知 $f(0,0)=0$.当沿 x 轴或 y 轴上的点 $(x,0)\to(0,0)$ 时，有 $f(x,0)\to 0$；而沿其他路径 $(x,y)\to(0,0)$，有 $f(x,y)=\frac{y}{y^2+1}\to 0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，$f(x,y)$ 不存在，从而知 $f(x,y)$ 在点 (一，一) 处不连续.

注 对于坐标轴上的点函数值为一，即有

$$f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=0.$$

于是

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

这说明 寄乙曾赠及 寄乙曾赠在点 (园园 处都存在，即函数 寄曾赠在点 (园园 处可导援

摇摇例 圆摇确定常数 λ，使在右半平面 曾>园上的向量 粤(曾赠 越圆赠(曾垣赠)λ蚤原曾(曾垣赠)λ躁为某二元函数 怎(曾赠的梯度，并求 怎(曾赠援

摇摇分析摇记

$$粤越孕(曾赠蚤垣匝(曾赠躁$$

$$粤越则则则怎\Longleftrightarrow\frac{\partial 孕}{\partial 赠}越\frac{\partial 匝}{\partial 曾}援$$

由此定出 λ援再由$\frac{\partial 孕}{\partial 赠}越\frac{\partial 匝}{\partial 曾}$知 $\exists$ 怎越怎(曾赠，使 凿怎越孕则曾垣匝则赠$\Longrightarrow$怎(曾赠 越$\int_{(圆,圆)}^{(曾赠}$孕则曾垣匝则赠援

摇摇解摇令 孕越圆赠(曾垣赠)λ，匝越原曾(曾垣赠)λ，则

$$\frac{\partial 孕}{\partial 赠}越圆曾(曾垣赠)^{\lambda}垣圆赠蚤λ(曾垣赠)^{\lambda原员}\cdot 圆赠$$

$$\frac{\partial 匝}{\partial 曾}越原圆曾(曾垣赠)^{\lambda}原曾\cdot\lambda(曾垣赠)^{\lambda原员}\cdot 源曾,$$

由$\frac{\partial 孕}{\partial 赠}越\frac{\partial 匝}{\partial 曾}$得 源曾(曾垣赠)^λ(λ 垣员 越圆 即有 λ 越原员(曾>圆援

摇摇于是在右半平面内任取一点，例如取 (员园 作为积分路径的起点 (曲线积分与路径无关)，则得

$$怎(曾赠越\int_{(员园}^{(曾赠}\frac{圆赠}{曾垣赠}蚤\frac{曾赠}{曾垣赠}躁赠垣悦摇摇摇摇$$

$$越圆原\int_{圆}^{赠}\frac{曾赠}{曾垣赠}垣悦越原\int_{圆}^{赠}\frac{员}{员垣\left(\frac{赠}{曾}\right)^{圆}}则\left(\frac{赠}{曾}\right)垣悦$$

$$越原葬则则则

需要全本请访问 www.ertongbook.com