

中国气象局成都高原气象研究所开放基金资助
国家自然科学基金（编号：50279023）资助

水文小波分析

Hydrology Wavelet Analysis

王文圣 丁晶 李跃清 著



化学工业出版社

· 北京 ·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

水文小波分析/王文圣, 丁晶, 李跃清著. —北京: 化学工业出版社, 2005. 4

ISBN 7-5025-6858-1

I. 水… II. ①王…②丁…③李 III. 小波分析-应用-水文学 IV. P333

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 027639 号

水文小波分析

Hydrology Wavelet Analysis

王文圣 丁晶 李跃清 著

责任编辑: 王秀鸾 王斌

责任校对: 蒋宇

封面设计: 鲍萌

*

化学工业出版社出版发行

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话: (010) 64982530

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

北京永鑫印刷有限责任公司印刷

三河市东柳装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 13½ 字数 332 千字

2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-6858-1/X·621

定 价: 42.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前 言

水作为一种资源，是支撑社会、经济和生态环境可持续发展的基础，是一种不可或缺的要害。由于经济发展、认识能力、科学技术水平等诸多原因，目前水资源安全受到了极大的威胁，人类生存环境和空间充满了危机。因此，加强水资源问题的认识、研究和合理开发、利用和保护水资源具有重要的意义，也是水科学工作者的重要课题。作为这一课题的基础内容——水文学，必须得到充分的重视和大量的投入。

水文学研究对象（如洪水、径流、降雨等）具有大量的不确定性和复杂性，常规的分析方法很难对它们的发展规律和变化特征有清晰的了解和准确的预测。因此，水文学问题的研究需要引入新理论、新方法。20世纪80年代初兴起的小波分析（wavelet analysis）就是一种由粗及细的分析方法。它可以观测到细微的变化，也可以展示大的变化趋势，同时能获得不同频带的简单序列。将小波分析引入水文学应用研究中，并与现代各种理论和方法结合，从多方面揭示水文系统的变化规律，从而为水资源合理开发、利用和有效配置提供更多的依据。另一方面，小波分析与水文学结合，不但拓宽了其应用范围，而且还推动了小波理论本身的发展。这正是本书的初衷所在。

由法国科学家 Morlet 提出的小波分析是一种调和分析方法，是 Fourier 分析发展史上的一个里程碑式的进展，被人们誉为数学“显微镜”。小波分析一面世，便在科学技术界引起一场轩然大波并成蔓延之势。小波分析是一种窗口大小固定但形状可变（时宽和频宽可变）的时频局部化分析方法，它具有自适应的时频窗口：高频段时，频域窗口增大，时间窗口减小；低频段时，时间窗口增大，而频率窗口减小。这非常适合于像暴雨、洪水这一类非平稳序列的分析和计算。经过20年来的发展和运用，小波分析方法和技术已初具规模。

目前小波分析理论、方法及其技术在信号处理、图像压缩、语音编码、模式识别、地震勘探、大气科学以及许多非线性科学领域内得到了较为广泛的应用，取得了大量的研究成果。

小波分析在水文学中的应用研究才起步，本书是作者近十年来将小波分析应用于水文学中所开展研究工作的一个初步总结，包括以下10章内容：第1章简要介绍了小波分析的由来、特点，较详细地分析了小波分析在水文学中的应用现状；第2章~第4章分别较详细地介绍了小波分析的基本理论、常用小波函数及其构造和快速小波变换算法；第5章~第7章分别探讨了小波分析在水文序列滤波及消噪、水文序列复杂性分析和水文序列奇异性及趋势性分析中的应用；第8章~第10章分别介绍了小波分析在水文系统多时间尺度变化、水文系统预测和水文系统随机模拟方面的研究成果。

本书是国内水文小波分析领域的第一本专著，其特点是内容新颖，理论联系实际，深入浅出，便于理解和实际分析计算。本书可作为高校水文水资源及环境类专业的高年级本科生和研究生的教材和教学参考书，也可供理工科大专院校相关专业的高年级学生、研究生和教师阅读，同时适合于有关科技工作者使用和参考。

全书各章执笔者：第1章由王文圣、丁晶共同编写；第2章~第7章由王文圣编写；第8章~第10章由王文圣、丁晶、李跃清共同编写；全书由王文圣统稿并负责校阅。

本书在撰写过程中，参考和引用了许多国内外专家和学者的研究成果，在此谨向他们表示衷心的感谢！此外，得到了四川大学水电学院各位领导和水文水资源教研室同事的鼎力支持，特此致谢！我们还要特别感谢的是四川大学水电学院邓育仁教授、合肥工业大学的教授金菊良博士的支持和激励。另外，还要感谢何丽华女士和向红莲女士，她们给予了大力的支持，本书才得以顺利完成。

本书的研究有幸得到了国家自然科学基金（编号：50279023）和中国气象局成都高原气象研究所开放基金的资助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，加之时间仓促和小波分析本身的特点，书中的一些观点、方法难免存在争议，理论介绍有失完整，敬请各位专家和读者给予批评指正。

作者

2005年2月15日

四川大学
成都高原所

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 水文学与小波分析	1
1.2 小波分析的发展简介	1
1.3 小波分析在水文学中的应用研究	4
1.4 本书的内容	8
第 2 章 小波分析的基本理论	9
2.1 连续小波变换	9
2.2 离散小波变换	16
2.3 二进小波变换	17
2.4 多分辨率分析	19
第 3 章 小波函数及其构造	24
3.1 几种基本小波函数介绍	24
3.2 一类二进小波函数介绍	26
3.3 正交小波基构造	27
3.4 双正交小波及其构造	37
3.5 小结	42
第 4 章 快速小波变换算法及滤波器组设计	43
4.1 Mallat 算法	43
4.2 基于二次样条小波的快速算法	48
4.3 A Trous 算法	51
4.4 小波包算法	53
4.5 双通道多采样滤波器组	56
第 5 章 小波分析在水文序列滤波和消噪中的应用	60
5.1 小波分析在水文序列滤波中的应用	60
5.2 小波消噪方法	63
5.3 基于小波消噪的偏最小二乘回归模型	68
5.4 小波消噪在水文序列关联维数估计中的应用	75
第 6 章 小波分析在水文序列复杂性中的应用研究	79
6.1 概述	79
6.2 基于小波分析的水文序列信息量系数计算	80
6.3 基于离散小波变换的水文序列分维估计方法	82
6.4 基于连续小波变换的水文序列分维估计	87
6.5 水文序列 Hurst 系数的小波估计	89

6.6	基于小波消噪的水文序列复杂度研究	92
6.7	基于小波变换的水文动力系统混沌性识别	95
第7章	小波分析在水文序列奇异性检测和趋势识别中的应用	100
7.1	基于小波变换系数分维变化曲线诊断水文序列奇异性	100
7.2	小波奇异点识别原理及其在水文序列奇异性检测中的应用	103
7.3	小波分析在水文序列趋势成分识别中的应用	110
7.4	小结	114
第8章	小波分析在水文系统多时间尺度分析中的应用	115
8.1	水文系统多时间尺度分析的小波分析法	115
8.2	降水量时间序列的多时间尺度变化特征	116
8.3	年径流量的多时间尺度变化特征	120
8.4	月径流量的多时间尺度变化分析	131
8.5	年最大洪峰流量的多时间尺度变化分析	134
8.6	旱涝等级资料的多时间尺度分析	138
第9章	基于小波分析的水文系统预测方法	142
9.1	概述	142
9.2	基于小波消噪的随机模型	143
9.3	基于小波分析的组合随机模型	148
9.4	基于小波变换的最近邻抽样回归组合模型	151
9.5	小波人工神经网络组合模型	154
9.6	小波网络模型	164
9.7	混沌小波网络模型	168
第10章	小波分析在水文系统随机模拟中的应用	173
10.1	概述	173
10.2	常用随机模型介绍	176
10.3	基于小波变换的随机组合模拟方法	180
10.4	基于小波变换的组合随机模型	184
10.5	基于小波分析的核密度估计随机模型	187
10.6	基于小波分析的非参数解集模型	195
10.7	小结	199
	参考文献	201

第 1 章 绪 论

1.1 水文学与小波分析

水文学是研究地球上水的分布、数量、循环、运动等的变化规律及其水与环境相互作用的一门科学，是地球科学的一个分支。通过水文测验可以获得各种水文现象的大量时间序列，这些水文时间序列是水文系统在气象、流域下垫面和人类活动因素作用下的输出，它具有确定性成分、(近似)周期成分和跳跃、突变、趋势等特征。水文学一个重要研究途径就是利用现有的分析技术对水文时间序列进行描述，以探讨水文系统的演变规律。

在对水文时间序列的基本刻画中，常常采取时域和频域两种基本形式^[1]。时域分析是从时间域上描述水文序列，具有时间定位能力，自相关分析和互相关分析就是常用的时域分析方法，但它无法得到关于水文时间序列变化的更多信息（如采样率、周期等）。1822 年 Fourier 提出的频域分析法——Fourier 变换，可以揭示水文时间序列不同的频率成分，具有准确的频率定位能力。这样，许多在时域上看不清的问题，通过频域分析就显得清晰了。但 Fourier 变换仅适合于平稳水文时间序列的分析。

在水文学中，水文时间序列（如暴雨、洪水、径流等）几乎都是非平稳的，是随时间变化的时变序列，它们的频域特征都随时间而变化。对于这一类非平稳序列，需要提取某一时段（或极小瞬间）的频域信息，或某一频段所对应的时间信息，即所谓的时频分析。显然时域分析和频域分析都无能为力。

20 世纪 80 年代初由 Morlet 提出的具有时频多分辨功能的小波分析（Wavelet Analysis，又称子波分析）为更好分析水文时间序列变化特性奠定了基础。水文时间序列呈现各种各样的特性。例如，日流量过程，枯期变化较平稳，汛期变化剧烈，涨水落水之间发生一个峰点。对这样的过程，枯期的分析可粗一点，而汛期分析可精细一点，既前者的分辨力低一点，后者则高一点。因此，小波分析非常适合分析水文时间序列。

在水文学领域引进小波分析开创了一条崭新的研究途径，极大地丰富了水文学的内容。小波分析在水文学应用中发挥了重要的作用，形成了水文小波分析新技术。

1.2 小波分析的发展简介

对给定的信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ [$L^2(\mathbb{R})$ 表示在实数域 \mathbb{R} 上平方可积]，Fourier 变换为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.1)$$

其逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2)$$

Fourier 变换就是将信号用三角基函数来展开，以此揭示信号不同的频率成分，因而具有准确的频率定位能力，这是 Fourier 变换的最大优点。从式 (1.1) 还可以看出，积分时间 t 从 $-\infty$ 到 ∞ ，基函数 $e^{-i\omega t}$ 是无限支撑的，在时域没有任何的衰减，因此不存在任何的时间局域化特征。从这个意义上来讲，它不能告诉人们某种频率成分发生在哪些时间内，即在时域上没有任何分辨率，这是 Fourier 变换的最大缺点。这可以从图 1.1 看出。Fourier 分析在数学领域和工程技术上都长期占有极其重要的地位，但它仅对平稳信号最有效。

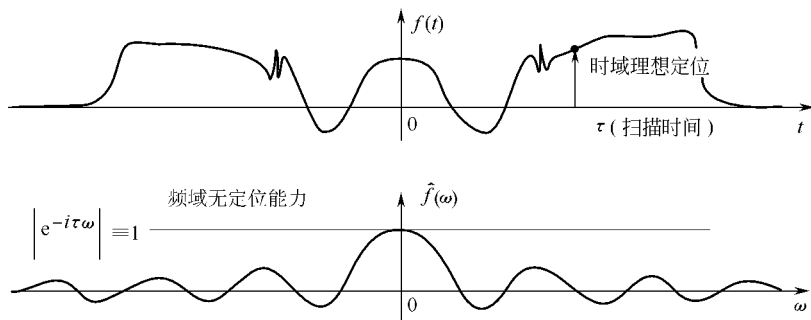


图 1.1 Fourier 变换

在实际工程中，存在的信号几乎都是非平稳的，如音乐信号、探地信号、雷达信号、暴雨、洪水等，它们的频域特征都随时间而变化。对于非平稳信号，Fourier 分析就不适用了。为此，1946 年 Gabor 提出了短时 Fourier 变换 (Short-time Fourier Transform——SFT，又称窗口 Fourier 变换) 理论，它为时频分析开辟了一条道路。

对频率定位，必须保留频率 ω 变量，对时间定位必须保留时间 τ 变量，因此，SFT 定义如下

$$G_f(\omega, \tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t-\tau)} e^{-i\omega t} dt \quad (1.3)$$

式中，“ $\overline{\quad}$ ”表示复共轭 (下同)； $g(t)$ 为窗口函数。 $g(t)$ 起时限作用， $e^{-i\omega t}$ 起频限作用。 $G_f(\omega, \tau)$ 大致反映了 $f(t)$ 在 τ 时刻附近、频率为 ω 的“信号成分”的相对含量。显然，信号的 SFT 变换精确地按窗口宽度分解了信号的频谱，提取了其局部频谱信息，当 τ 在整个信号时间轴 t 上扫描时，就给出了 $f(t)$ 的完整频谱。

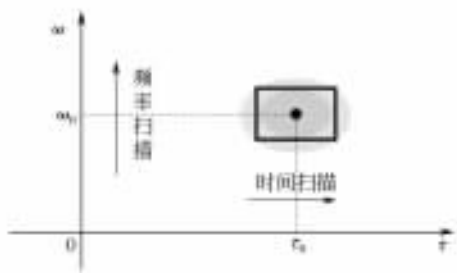


图 1.2 SFT 基函数的时频胞元

SFT 变换的时频分辨率是由窗口函数的时频窗口面积 (如图 1.2 所示) 所决定的。一般窗口面积越小越好，最初 Gabor 选取高斯函数作为窗口函数

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-t^2/(2a^2)} \quad (1.4)$$

我们知道这是最佳的窗口函数，因为它具有最小的窗口面积。

一旦选定窗口函数 $g(t)$ ，时频窗口的时宽和频宽不变，则窗口的形状及其面积就确定了，那么时频分辨率就固定不变。若要改变分辨率，则必须重新选择窗口函数。另外，根据 Heisenberg 原理 (又称测不准原理)，信号的时宽和频宽 (也即时间分辨率和频率分辨率) 是一对矛盾的量，不可能同时得到任意高的时间分辨率和频率分辨率。由于频率与周期成反

比，高频信号需要窄的时间窗，低频信号需要宽的时间窗，即时频窗口的大小应随频率而变；对于快变信号，或瞬态信号，也即高频成分的分析，适宜于采用短时窗口，放宽频率窗口；对于慢变信号，也即低频成分信号，必须选用长时窗口，缩小频域窗口。SFT 解决不了这个问题。20 世纪 80 年代初法国油气工程师 Morlet 在研究地震波的局部性质时，创造性提出了小波分析^[2~5]，它就能成功地解决上述问题。

小波分析是一种窗口大小固定但形状可变（时宽和频宽可变）的时频局部化分析方法，它具有自适应的时频窗口：高频段时，频域窗口增大，时间窗口减小；低频段时，时间窗口增大，而频率窗口减小。小波分析的关键在于引入了满足一定条件的基本小波函数 $\psi(t)$ 以代替 Fourier 变换中的基函数 $e^{-i\omega t}$ 。 $\psi(t)$ 经伸缩和平移得到一族函数

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in R, a \neq 0 \quad (1.5)$$

式中， $\psi_{a,b}$ 称分析小波或连续小波； a 为尺度（伸缩）因子， b 为时间（平移）因子。对于 $f(t) \in L^2(R)$ ，连续小波变换(wavelet transform——WT)为

$$W_f(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1.6)$$

式中， $W_f(a,b)$ 为 $f(t)$ 在相平面 (a,b) 处的小波变换系数。

从式 (1.6) 可知小波分析的原理：当 a 减小时， $\psi_{a,b}(t)$ 的时域波形在时间轴方向上收缩，分析信号的细节，得到信号的高频信息；当 a 增大时， $\psi_{a,b}(t)$ 的时域波形在时间轴方向上展宽，分析信号的概貌，获得信号的低频信息。也就是说，通过调整 a 的大小，改变时频窗口的时宽和频宽，从而实现了信号时频局部不同分辨率的分析。如图 1.3 所示，用大尺度 a_2 ，对应宽时窗口 T_2 ，分析信号的轮廓——“看见森林”；用小尺度 a_1 ，对应短时窗口 T_1 ，分析信号的细节——“观察树木”。

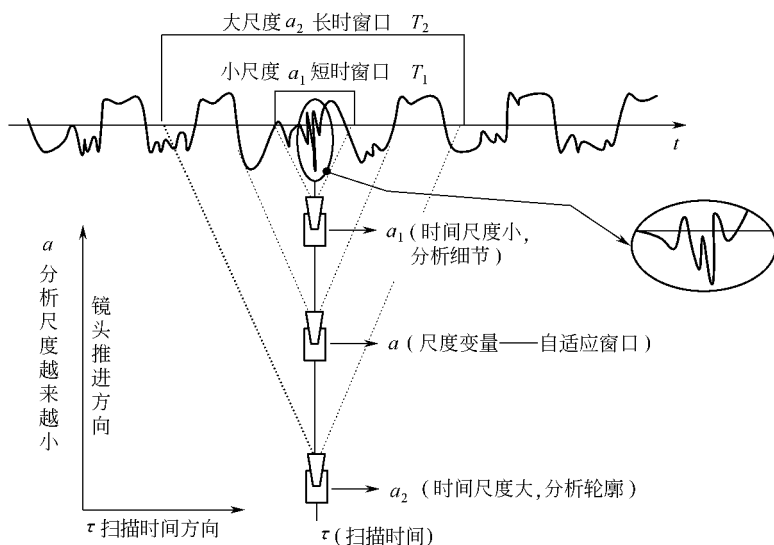


图 1.3 信号小波分析的原理

1980 年 Morlet 提出小波变换概念^[6]之后，用于实际工程中效果很好，但在数学上不严密。1984 年他求助于理论物理学家 Grossman 和数学家 Meyer 等人，寻求这种新技术的理论严密性的支持^[7]。在深入分析新变换中基函数所应当具备的性质（能量有限性、容许性

条件、时-频局域化特征、伸缩与平移不变性)后,他们共同提出连续小波变换的几何体系。1985年 Meyer 创造性构造了规范正交基,提出了多分辨率概念和框架理论。1986年 Battle 和 Lemarie 又分别独立地给出了具有指数衰减的小波函数;随后 Mallat 创造性地发展了多分辨分析概念和理论并提出了快速小波变换算法——Mallat 金字塔算法^[8]。1988年 Daubechies 构造了具有有限紧支集的正交小波基^[9],1990年 Chui 和王建忠构造了基于样条函数的正交小波^[10]。至此,小波分析的系统理论得以建立。

小波分析^[2~5]是一调和分析方法,是 Fourier 分析发展史上的一个里程碑式的进展,被人们誉为数学“显微镜”。小波分析一面世,就在科学技术界引起一场轩然大波并成蔓延之势。目前,小波分析在信号处理、图像压缩、语音编码、模式识别、地震勘探、大气科学以及许多非线性科学领域内取得了大量的研究成果^[5,11,12]。1996年文献 [13] 以二次样条函数作为小波基,采用 Mallat 算法对地震信号进行分解和重构;利用小波变换良好的时频局部化特性,能够较准确地检测出信号的奇异性及其出现位置。1997年文献 [14] 介绍了调频高斯小波并用于心电图信号处理中,研究表明它能正确识别正常与不正常心电图。1998年文献 [15] 应用 Daubechies 小波采用二进尺度小波变换的 Mallat 算法提取局部放电信号,数值仿真研究表明这种途径是可行的。1995年文献 [16] 用小波网络模型对具有混沌特征的时间序列进行了短期和长期预测,并获得了成功。1997年文献 [17] 用小波变换法将太阳黑子数分解成 1 个尺度系数和 5 个残差系数,然后用动态反馈神经网络分别对它们进行拟合与预报,最后进行累加,计算结果表明,这种方式是有效的。同年文献 [18] 基于文献 [17] 的原理对财政数据进行了预报研究。鉴于篇幅,不再列举小波分析在各非线性科学领域内的研究成果,有兴趣的读者可参考相关文献。

小波分析之所以广泛得到应用,在于:时域和频域同时具有良好的局部性质;能将信号分解成交织在一起的多尺度成分,并对各种不同尺度成分采用相应粗细的时域取同样步长,从而能够不断地聚集到所研究对象的任意微小细节,同时在数学上具有严格意义上的突变点诊断能力。

水文学问题的研究,需要引入新理论、新方法。将小波分析引入水文学应用研究中,并与现代各种理论和方法结合,从多方面揭示水文系统的变化规律,从而为水资源合理开发、利用和有效配置提供更多的依据。另一方面,小波分析与水文学结合,不但拓宽了其应用范围,而且还推动了小波理论本身的发展。

1.3 小波分析在水文学中的应用研究

水文时间序列是一个观测到的样本,呈现各种各样的变化特性。小波分析具有多分辨率功能,非常适合于分析水文时间序列。小波分析可以深刻揭露各种水文时间序列的变化特性,如突变、趋势等;通过小波分析的多分辨率功能,可以揭示水文系统的多时间尺度特性;通过小波分析建立合适的小波组合模型可用于水文系统预测预报;通过小波的分解和重构可以随机模拟水文系统以用于水文水资源分析和计算等。

随着小波理论的形成和发展,它的优势逐渐引起许多水科学工作者的重视并引入水文学科中。从 1993 年 Kumar 和 Foufoular-Gegious^[19]将 WT 介绍到水文学中以来,WT 在水文学中已取得了一定研究成果,主要表现在水文系统多时间尺度分析、水文时间序列变化特性分析、水文系统预测预报和水文系统随机模拟等方面。

1.3.1 小波分析在水文系统多时间尺度分析中的应用

所谓多时间尺度,指系统变化并不存在真正意义上的周期性,而是时而以这种周期变化,时而以另一种周期变化,并且同一时段中又包含各种时间尺度的周期变化。多时间尺度的研究,将为水文系统分析、预测提供重要依据。目前水文系统多时间尺度分析已开展了一定的研究工作。

1993年,文献[19]在评述WT基础上,运用正交小波(Haar小波)变换研究了空间降水的尺度和振荡特征。研究表明空间降水存在标度的自相似性和时间尺度的多种成分。WT提供了分解二维空间非均质和各向异性降水场的一种方法。1996年,文献[20]用小波包理论对降水时间序列进行小波分解,识别其时间-频率尺度,进而进行能量分解,为研究降水形成机制开辟了新途径。

1997年文献[21]根据Morlet小波变换系数的模、位相和实部分析了西安市近50年月降水量多时间尺度结构。1999年文献[22]利用Marr小波变换对广州前汛期降水、后汛期降水和全年逐月降水量的多时间尺度进行了分析。发现广州年降水存在28年、7年、2年左右的主要周期;前汛期降水存在25年、2年左右的主要周期;后汛期降水存在23年、9年、2年左右的主要周期。

1999年文献[23]通过Morlet小波变换法分析了华北地区的水资源各分量的时间-频率的多层次结构和突变特征。同年文献[24]将WT引入随机水文过程研究领域,根据水文现象的物理成因,对水文序列进行小波变换,借以测定水文序列隐含的近似周期。2000年文献[25]用小波变换法分析了中国东北地区夏季降水异常情况。文献[26]用Morlet小波变换法分析了河南省近50年来月降水量距平序列的多时间尺度结构,对其旱、涝时频变化特征进行了初步研究。2000年文献[27]用Mexican hat小波变换分析了北京近百年的气候变化。

2001年文献[28]利用小波变换对降水量时间序列的多时间尺度变化及突变特征进行了探讨。小波变换不仅能将降水量时间序列的频率特征在时间域上展现出来,清晰地给出各种时间尺度的强弱和分布情况以及旱涝变化趋势和突变点,而且还能分析出其主周期。文中以新安江流域黄山地区主汛期(5~7月)和年降水量为例,研究表明,主汛期和年降水的年际及年代际时间尺度在时域中分布不均匀,具有明显的局部化特征;同时分析出主汛期降水具有8年、19年左右的周期,年降水存在6年、19年左右的周期;研究还表明,主汛期降水与年降水的时间尺度变化比较接近。

2002年文献[29]以长江宜昌站近百年(1890~1987)年平均流量过程为例,利用Marr小波和Morlet小波变换,对它的多时间尺度演变特性进行了分析。不管是Marr小波变换,还是Morlet小波变换,它们详细地剖析了年平均流量序列内部的结构,可以发现其周期变化是复杂的,长度和强弱在不同时段表现不一,即年平均流量序列是多时间尺度系统;另外,通过小波变换系数的变化,可以考察不同时间尺度下年径流量在不同时期的丰枯变化和突变位置。Fourier分析无法给出水文序列的多时间尺度结构。小波分析较Fourier分析具有无可比拟的优势。

2003年文献[30]根据Morlet小波变换研究了长江宜昌站1877~1976年年最大洪峰流量序列多时间尺度特征和周期变化。小波变换能清晰地给出各种时间尺度的分布情况,而且通过小波方差可分析出其主周期为4.5年、9年、14年和30年。

2003年文献[31]以三峡宜昌站111年(1877~1987)年最大洪峰序列和金沙江屏山

站 53 年 (1940~1992) 年平均流量序列为例, 利用 Morlet 小波变换时频局部化功能, 将上述水文序列的频率特征在时间域上展现出来, 清晰地给出了各种周期的强弱和分布情况以及突变点; 而且还分析出其周期: 屏山站年平均流量存在 3 年、4.5 年、8.5 年及 14 年左右的周期; 宜昌站年最大洪峰流量存在 4.5 年、8 年、14.5 年及 30.5 年左右的周期。由于资料有一定的差异, 计算结果与文献 [30] 略有不同。

2003 年文献 [32] 运用小波分析方法对黄河上中游天然径流序列进行了分析, 揭示了河川径流多时间尺度变化规律, 并对径流在不同时间尺度上变化的影响因素进行了探讨。研究结果对于认识黄河径流的变化规律、开发利用管理黄河水资源有着重要的意义。

2004 年文献 [33] 用小波分析法对黄河青铜峡 270 多年 (1724~1997) 的年径流时间序列变化进行了多尺度分析, 展示了在不同时间尺度下黄河上游年径流丰、枯变化的过程。揭示了其年径流具有 128 年、64 年和 32 年左右的周期性变化。这三个主要周期的变化, 主导着黄河上游天然年径流的变化特性。研究也表明, 自 1997 年以来, 黄河天然年径流变化的大趋势是处于接近或低于其多年平均水平, 并会延续若干年, 这对进一步研究黄河径流演变规律具有重要的意义。

小波分析为水文系统多时间尺度分析研究提供了强有力的工具。目前研究手段已基本成熟。

1.3.2 小波分析在水文序列变化特性描述上的应用

受气候和人类活动影响, 水文序列复杂多变。描述其变化特性是水文学的一个重要工作。小波分析在水文序列变化特性描述上的应用包括两方面的内容: 一是奇异性检测; 二是过程特性定量表征。

根据小波变换良好的时、频局部化特性, 可以确定水文时间序列奇异性及其强弱。文献 [21] 利用小波分析给出了西安市降水序列中所包含的突变点的存在性和具体位置, 如 1952 年、1959 年、1964 年、1976 年和 1984 年。文献 [31] 基于小波分析给出了水文序列的突变特征, 如屏山站年径流在 14 年时间尺度下丰、枯变化明显, 丰枯突变点在 1947 年、1955 年、1961 年、1968 年、1975 年、1981 年和 1988 年。文献 [34] 应用小波分析将水文时间序列分解成不同尺度下的低频成分和高频成分, 然后对低频成分进行重构, 可以获得趋势变化。文中以黄河上、中、下游四个水文站实测年径流序列为例进行了研究。文献 [35] 从小波分析的多分辨率角度探讨了水文序列变化的统计特征。将水文序列进行连续小波变换, 得到小波变换系数, 计算出小波变换系数的动力学特征指标——分维, 建立分维随尺度的变化过程。根据分维随尺度的变化特性, 探讨了水文序列的奇异性 (突变、跳跃等) 变化。通过仿真试验和实际径流资料计算分析, 表明提出的方法是有意义而可行的。

径流变化复杂, 其复杂性的定量描述是需要研究的重要内容。随着小波理论的出现, 小波分析法在过程变化特性定量表征上显示出巨大的优势。文献 [36] 基于 Mallat 算法给出了表征水文过程变化特征的信息量系数, 同时与不均匀系数、分维数进行了比较。以长江流域宜昌站和屏山站年、月平均流量过程和汛期日流量过程为例, 研究表明, 信息量系数从频率能量分布出发刻画过程变化的复杂程度: 水文过程越复杂, 信息量系数越大; 水文过程越简单, 信息量系数越小。

文献 [37] 提出了基于 Mallat 小波变换的 Hurst 系数估计方法, 估计量是半参数无偏的; 文中应用的是 Dabechies4 小波。以中国 5 条河流洪峰流量资料为例进行了研究, 表明借助小波分析可揭示水文序列的长持续性结构。

文献 [38] 提出了基于连续小波变换的水文时间序列分维数的估计方法, 将该法运用于黄河流域兰州、河口镇、三门峡、青铜峡、利津和花园口 6 个水文站年径流的分维计算, 同时与 R/S 法估计值进行了对比。如兰州站年径流的分维值为 1.277, 花园口站年径流的分维值为 1.198。研究表明, 建议的基于连续小波变换的分维估计法是可行的。

文献 [96] 提出了基于 Mallat 小波变换的水文时间序列分维数的估计方法, 探讨了分维小波估计法的稳定性和影响因素。以长江、黄河年、月、日径流资料为例, 运用小波方法估计出了其对应的分维值。文中指出, 在水文时间序列分维估计时宜采用 Daubechies4、Daubechies5、Daubechies6 为基小波。研究表明该法是可行而有效的。

文献 [40] 提出了基于小波消噪的符号动力学研究径流变化复杂度的途径。首先对径流序列进行小波消噪, 然后运用 Lempel-Ziv 算法计算其复杂度, 最后以长江、黄河流域为例定量计算了径流的复杂性。该文为研究水文系统的复杂性提供了新的工具。研究表明: ①黄河流域径流变化比长江流域要复杂; ②黄河流域径流的平均复杂度为 8.3, 且从上游到下游的复杂性变化趋势不明显; ③从时间纵向看, 黄河径流变化的复杂性并未发生显著的变化。

最近, 作者将小波分析用于水文系统混沌性识别研究工作。包括两个方面的内容: 一是先消除水文序列的噪声, 再进行混沌性识别; 二是在假定混沌性存在前提下, 探讨水文水资源序列在小波变换后, 不同尺度下的小波变换系数的关联维数是否发生改变。

上述研究表明, 小波分析在水文序列变化特性描述上具有独特的优势。我们的尝试工作是成功的。

1.3.3 小波分析在水文系统预测预报中的应用

近十多年来, 出现了许多新理论、新方法, 并在水文系统预测预报中得到了广泛应用研究。将它们相互耦合构建模型, 将是现代水文预测的发展方向。小波分析与分形、混沌、人工神经网络、随机理论结合, 不失为一种有效途径。

1998 年文献 [41] 基于小波分析、混沌和人工神经网络构造了混沌小波网络模型, 用该模型对金沙江屏山站汛期日流量序列进行了长期预测, 文中还与多元线性回归模型作了比较, 研究表明混沌小波网络模型是优越的。

1999 年文献 [42] 将人工神经网络与小波耦合, 提出了基于小波变换序列的人工神经网络组合预测模型: 首先对水文序列实行 A Trous 小波变换; 再利用人工神经网络对小波变换系数进行多尺度组合预测; 最后对预测分过程重构即得原始水文序列预测。文中对宜昌站年平均流量作了研究, 表明预测效果理想。同年文献 [43] 将小波分析与混沌耦合建立了不同时间尺度的气候预测模型, 并对滇中月降水距平值在月、季、年三种尺度上进行了预测。

2000 年文献 [44] 基于人工神经网络与小波的优点提出了多步预测的小波神经网络模型并应用于大气中, 研究成果表明, 建议模型对历史样本具有很好的拟合效果, 独立样本的预测结果也令人满意。

文献 [30] 提出了基于小波变换序列的最近邻抽样回归组合预测模型。对水文序列施行快速小波变换算法, 分解得到小波变换序列; 根据最近邻原理, 对各小波变换序列分别建立最近邻抽样回归模型; 然后将预测的小波变换序列经快速小波逆变换算法重构得到原水文变量的预测值。文中以长江宜昌站年最大洪峰流量序列为例进行了探讨。

文献 [45] 针对日流量时间序列的非线性和多时间尺度特性, 将小波分析与人工神经网络进行耦合, 提出了一种新的组合模型——小波人工神经网络组合模型: 将非线性时间序列

施行小波变换,再以小波变换系数序列作为人工神经网络的输入,原始时间序列作为人工神经网络的输出,最后训练网络并进行预测。以长江三峡水库入库站寸滩日流量预测为例,对该模型进行了验证。研究表明,小波人工神经网络组合模型延长了预见期,提高了预报精度,具有广阔的应用前景。同时作者将提出的小波人工神经网络组合模型用于地下水位动态变化的预测,取得了较好的成果^[12]。

文献 [46] 提出了一种随机组合预测模型:利用 Mallat 算法对水文时间序列进行多尺度分解,得到对应尺度下的概貌(低频)分量和细节(高频)分量;分别对概貌(低频)分量和细节(高频)分量建立随机模型进行预测,预测结果的叠加即为原水文变量的预测。将该模型用于黄河三门峡年径流预测中并与传统预测模型进行了对比分析,研究结果表明,建议的组合模型充分利用了现有信息,预测精度高。

1.3.4 小波分析在水文系统随机模拟中的应用

水文系统随机模拟是水文学研究的又一项重要内容。原则上,上面的各种组合模型都可以用于水文系统随机模拟中。所谓随机模拟,即建立反映水文序列随机变化规律的随机水文模型,根据模型由 Monte Carlo 试验生成大量水文序列。小波分析能充分展示水文序列的组成成分,可应用于水文系统随机模拟。

文献 [47] 利用 A Trous 算法将日流量过程分解成几个小波系数序列和一个尺度系数序列,即小波变换序列,根据水文时间序列显示的主周期(年)将小波变换序列分解成若干段,经无条件随机抽样,获得无数组合,再由小波逆变换得到模拟日流量过程。以金沙江屏山站日流量为例,研究表明该途径是可行而有效的。

文献 [48] 将小波分析与随机理论结合提出了基于小波变换的组合随机模型。以屏山站年径流过程为例建立了基于小波变换的组合随机模型并进行随机模拟研究,模型实用性分析表明是可行的。

将小波分析和非参数模型^[199,201]结合提出了基于小波分析的非参数模型并应用于水文系统的随机模拟中,取得了较好的成果。

1.4 本书的内容

小波分析理论和方法处于发展阶段。从已有的自然科学各领域应用看,小波分析具有很大的潜力。小波分析在水文学中的应用研究才起步^[49,50],本书是作者近十年来将小波分析应用于水文学中所开展研究工作的一个总结,包括以下 10 章:第 1 章简要介绍了小波分析的由来、特点,较详细分析了小波分析在水文学中的应用现状;第 2~4 章分别较详细地介绍了小波分析的基本理论、常用小波函数及其构造和快速小波变换算法;第 5~7 章分别探讨了小波分析在水文序列滤波及消噪、水文过程复杂性分析和水文序列奇异性和趋势性分析中的应用;第 8~10 章分别介绍了小波分析在水文系统多时间尺度变化、水文系统预测和水文系统随机模拟方面的研究成果。

第 2 章 小波分析的基本理论

Fourier 变换把信号分解成许多不同频率的正弦信号的叠加, 没有时域信息, 对于 Fourier 谱中的某一频率, 不知道是在什么时候产生的, 因而没有局部化分析功能, 特别不适用于非平稳信号的处理。窗口 Fourier 变换通过窗函数处理具有时频局部化分析特点, 但它的局限性在于其局部化是一次性的, 即窗函数一定, 窗口的大小、形状就固定不变。对所有的频率都使用单一的窗, 不能敏感地反映出信号的突变。而实际应用中, 为了精确地确定信号中的高频现象发生的时间位置, 应该使用窄时域窗; 为了全面观察低频现象, 应该使用宽时域窗。因此, 窗口 Fourier 变换分析也无法真正满足非平稳信号的时域和频域的局部化分析要求。Morlet 提出的小波分析是一种可调时频窗的分析方法, 能很好地描述非平稳信号, 成功解决了时频局部化问题。实践证明, 小波变换使人类的信号分析与处理真正地发生了质的飞跃。

本章主要介绍小波分析的基本理论, 包括连续小波变换、离散小波变换、二进小波变换和多分辨分析等内容。由于水文系统研究对象一般是一维情形, 因此, 这里介绍的是一维小波变换。

2.1 连续小波变换

2.1.1 连续小波变换定义

令 $L^2(\mathbb{R})$ 表示定义在实轴上、可测的平方可积函数空间, 若函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 满足

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2.1)$$

那么, 这样的函数可用来表示能量有限的连续时间信号或模拟信号。对于信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 连续小波变换 (continue wavelet transform, CWT) 定义为^[2~5]

$$W_f(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (2.2)$$

式中, $W_f(a, b)$ 称为小波变换系数; $\psi(t)$ 称为基本小波或母小波 (mother wavelet); \langle, \rangle 表示内积; a 是尺度伸缩因子, b 是时间平移因子; $\psi_{a,b}(t)$ 是由 $\psi(t)$ 伸缩和平移而成的一族函数

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (2.3)$$

称 $\psi_{a,b}(t)$ 为分析小波或连续小波。

有些工程技术人员往往直接按卷积形式定义小波变换 (如 Mallat 在有关小波变换用于边沿检测的论文中) 并应用到实际工作中。设 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 则卷积形式的小波变换为

$$W_f^c(a, b) = f(b) * \psi_a(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{b-t}{a}\right) dt \quad (2.4)$$

其中, $\psi_a(b) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

比较式 (2.2) 和式 (2.4), 区别仅仅在于小波的形式上: 一个取共轭, 一个不取共轭; 一个要时间反转 (即时间对折) 而另一个不反转。对于线性时不变系统, 内积形式与卷积 (convolution) 形式没有本质上的区别。

2.1.2 连续小波变换的时频分辨特性

对于母小波 $\psi(t)$, 其中心 t^* 与有效宽度 Δ_ψ 可由下式求出

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt}, \quad \Delta_\psi = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt} \quad (2.5)$$

相应地, 可以求出 $\psi_{a,b}(t)$ 的中心与有效宽度是 $b + at^*$ 与 $a\Delta_\psi$ 。同样可定义 $\psi(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 的中心 ω^* 与有效宽度 $\Delta_{\hat{\psi}}$

$$\omega^* = \frac{\int_0^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}, \quad \Delta_{\hat{\psi}} = \frac{2 \int_0^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.6)$$

相应地, $\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ 的中心与有效宽度分别为 ω^*/a 和 $\Delta_{\hat{\psi}}/a$ 。那么, 式 (2.2) 的小波变换的时窗范围为 $[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi]$, 这称为“时间局部化”, 频窗范围为 $[\omega^*/a - \Delta_{\hat{\psi}}/a, \omega^*/a + \Delta_{\hat{\psi}}/a]$, 称为“频率局部化”。 $W_f(a, b)$ 的时域和频域表现限制在一个“时间-频率窗”里

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi] \times [\omega^*/a - \Delta_{\hat{\psi}}/a, \omega^*/a + \Delta_{\hat{\psi}}/a] \quad (2.7)$$

“时间-频率窗”是自适应的, 如图 2.1 所示。图 2.1 (a) 表明, a 变大时, $\psi(t)$ 在时域变宽, 而频域变窄; 反之亦然。图 2.1 (b) 表明, a 较大时, 频窗中心自动地调整到比较低的位置, 同时频域窗口自动变窄, 时域窗口自动变宽, 这时对信号的频率定位能力较强, 频率分辨率高, 时间分辨率则低, 检测到的是低频信号成分; a 变小时, 频窗中心自动地调整到比较高的位置, 同时频域窗口自动变宽, 时域窗口自动变窄, 这时对信号的时间定位能力越强, 时域分辨率高, 频域分辨率则低, 检测到的是高频信号成分。

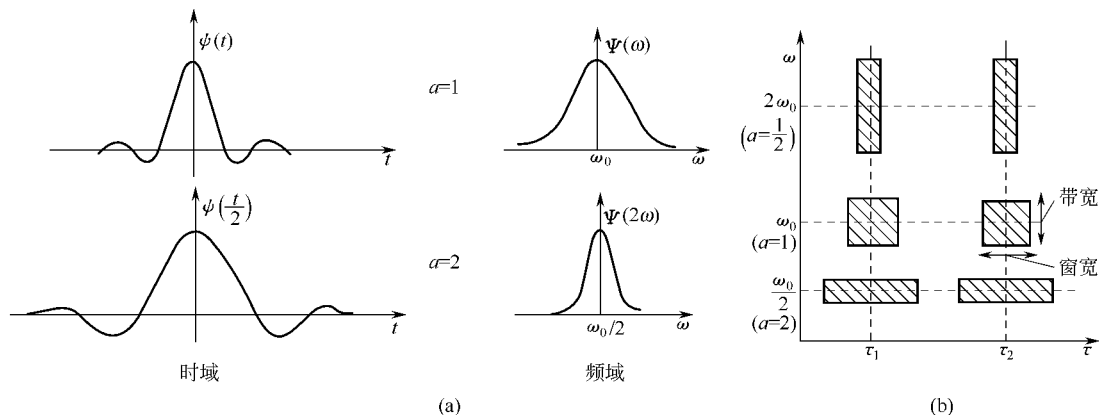


图 2.1 连续小波变换的时间-频率窗

从图 2.1 可以明显地看出 CWT 与 SFT 的不同时间频率窗特征。对于 SFT, 一旦确定

窗函数，其时间-频率窗便固定不变，而 CWT 的时间窗及频率窗的宽度却随 a 的取值不同而不同。小波变换这种信号的时间-频率分析方法，使它在时频两域都具有局部化功能，即多分辨分析功能，所以被誉为分析信号的“显微镜”。

从上面分析知，时间-频率窗的形状在改变，那么窗口的面积是否发生了变化呢？窗口的面积为

$$\text{时间-频率窗的时宽} \times \text{频宽} = 2a\Delta\psi \times \frac{2\Delta\hat{\psi}}{a} = 4\Delta\psi\Delta\hat{\psi}$$

可见面积与 a, b 无关，而仅仅取决于母小波函数。据测不准原理可知，时域窗和频域窗不能同时任意窄。对于给定的小波函数，小波分析也只能以一种分辨率的降低换取另一种分辨率的提高。

2.1.3 连续小波变换的性质

连续小波变换是线性变换，具有以下几个方面的性质。

(1) 叠加性（线性性）

如果 $f_1(t)$ 的 CWT 是 $W_{f_1}(a, b)$ ， $f_2(t)$ 的 CWT 是 $W_{f_2}(a, b)$ ，则 $f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$ 的 CWT 为 $k_1 W_{f_1}(a, b) + k_2 W_{f_2}(a, b)$ 。

(2) 平移不变性

若 $f(t)$ 的 CWT 是 $W_f(a, b)$ ，则 $f(t-\tau)$ 的 CWT 是 $W_f(a, b-\tau)$ 。所谓平移不变性，指信号延迟多少时间，其小波变换也在时间轴上延迟多少。

(3) 伸缩共变性（尺度转换性）

若 $f(t)$ 的 CWT 是 $W_f(a, b)$ ，则 $f(ct)$ 的 CWT 是 $W_f(ca, cb)/\sqrt{c}$ 。该性质表明，当信号 $f(t)$ 作某一倍数伸缩变换时，其 CWT 将在时间 b 轴、尺度 a 轴上同时作相同倍数的伸缩变换，但不发生失真变形。这是使小波变换成为数学“显微镜”的重要依据。

(4) 自相似性与冗余性

由于 $\psi_{a,b}(t)$ 是同一基小波 $\psi(t)$ 经过伸缩和时间平移获得的，而 CWT 又具有平移不变性和伸缩共变性，所以在不同的 (a, b) 点的 CWT 具有自相似性，或者说具有一定程度的自相关性，特别是靠得近的两点的相似性更大。

本质上，连续小波变换是将一维信号等距映射到二维的时间-尺度 (a, b) 相平面上，其自由度明显增大，从而使得小波变换中存在信息表述的冗余度 (redundancy)。冗余性事实上也是自相似性的直接反映。

(5) 内积定理（Moyal 定理）

用基本小波分别对信号 $f_1(t) \in L^2(R)$ ， $f_2(t) \in L^2(R)$ 作连续小波变换，即 $W_{f_1}(a, b) = \langle f_1(t), \bar{\psi}_{a,b}(t) \rangle$ ， $W_{f_2}(a, b) = \langle f_2(t), \bar{\psi}_{a,b}(t) \rangle$ ，则有

$$\langle W_{f_1}(a, b), W_{f_2}(a, b) \rangle = c \langle f_1(t), f_2(t) \rangle \quad (2.8)$$

式中， $c = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega$ 。通过变换，可将式 (2.8) 写成更具体的形式

$$\int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int \langle f_1(t), \bar{\psi}_{a,b}(t) \rangle \langle f_2(t), \bar{\psi}_{a,b}(t) \rangle db = c \int f_1(t) \bar{f}_2(t) dt \quad (2.9)$$

这就是 Moyal 定理。如果 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ ，则由 Moyal 定理有