铁路科技图书出版基金资助出版

杆 板 壳结构计算理论及应用

王荣辉 著

中 国 铁 道 出 版 社
1 9 9 9年·北京

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是作者近年来在杆 板 壳结构计算理论及应用方面的一些工作成果的总结。全书共分七章,第一章简明地阐述了现代有限变形基本理论。第二章介绍了 Timoshenko 梁结构计算与桁段有限元法。第三章提出了薄壁直线箱梁、斜交箱梁、曲线箱梁、正交双 T 梁及斜交双 T 梁的一些实用计算方法。第四章研究了几种新的板单元和一种新的壳体单元。第五章介绍了 H 型截面杆件结构局部与整体相关屈曲的极限承载力计算。第六章为利用 U.L 列式和截面内力塑性系数法对板桁组合钢梁进行了非线性分析。最后一章介绍了特殊壳体结构几何非线性的解析解和一般壳体结构几何非线性计算的有限单元法。

本书可供工程结构研究与设计人员、工科高年级大学生及研究生阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

杆、板、壳结构的实用计算理论及应用/王荣辉著. 北京:中国铁道出版社, 1999.9
ISBN 7-113-03479-9

Ⅰ.杆… Ⅱ.王… Ⅲ.①杆(结构构件)-结构计算②板-组合结构-结构计算③壳体(结构)-结构计算 Ⅳ.TU3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 40001 号

书　　名:杆 板 壳结构计算理论及应用
作　　者:王荣辉
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:刘桂华
封面设计:陈东山
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:850× 1168 1/32　印张:　　插页:　　字数:　　千
版　　本:1999 年　月第 1 版　　1999　年　月第 1 次印刷
印　　数:　　—　　册
书　　号:ISBN 7-113-03479-9/TU 606
定　　价:　　元

版权所有　盗印必究
凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

序

众所周知,很多工程结构都可以用杆、板、壳这些基本构件组合而成,因此研究杆、板、壳结构的空间计算实际上就是研究工程结构的空间计算。近 30 年来,杆、板、壳结构的空间计算已经取得了突破性的进展,计算理论与方法不断更新,尤其计算机的出现和有限元方法的成熟,使得由杆、板、壳组成的一些大型工程结构的空间计算成为可能。值得注意的是工程结构中遇到的问题是科学研究中永不衰竭的源泉,而对每一项工程都存在不少问题远非当前已有理论所能解决,由此使得工程结构的计算分析研究工作日趋活跃,而且还有广阔的发展前景。

作者近年来致力于桥梁结构稳定与振动研究工作。本书是这一工作成果的总结。本书研究内容比较注重理论性与实用性相结合,比较注重从工程实践里吸取理论。作者根据大型杆、板、壳结构的某些特性,提出了一些实用计算理论与方法,其内容新颖、特色显著,主要体现以下几个方面:(1)桁段有限元法,此方法能方便地考虑桥门架及中间横联的作用,且自由度较常规计算方法要少很多,比较适用于大型桁梁结构的计算分析。(2)根据薄壁箱梁力学行为为梁特征的特点,将组成薄壁箱梁的各板件视为板梁子单元,由此提出了各种箱梁结构的板梁单元法,这样就使得一些过去较繁琐的计算问题现在变得比较简单,这些计算方法特别适用于多室薄壁箱梁的空间计算分析。(3)运用单位宽纵横向有限条带法构造了几种板单元的位移模式,由此导出了一些板单元的计算列式,这些板单元由于采用新的位移模式,克服了 C 连续性和剪切“自锁”的问题。(4)采用局部位移模式与整体位移模式叠加的思想,构造了 H 型截面杆件考虑局部屈曲的空间位移模式,从而可用梁段有限元法来计算 H 型截面杆件考虑局部屈曲的极限承载力,克服

了采用有限条法和板壳单元法只适用于计算这类小型构件的极限承载力。(5)用横向条带法构造了考虑板桁结构桥面板局部屈曲的位移模式,提出了一种板桁组合结构考虑板件局部屈曲空间计算的板梁单元,这样使得板桁结构空间计算变得比较简单。另外书中的一些材料非线性都是用截面内力塑性系数法来考虑的。本书提出的一些实用计算理论与方法,对从事科研、教学和实际工程结构设计与施工人员均十分有益。

本书论理严谨,层次分明,内容丰富,基本上反映了该领域的当代水平,是一本既有学术水平又有实用价值的书,深信本书的出版将会对这一学科研究工作的进一步深入和提高有一定的促进和推动作用。

中国工程院院士　方秦汉

1999.8.3

前　言

杆、板、壳可以说都是古老的结构构件，正是这些古老的结构构件，构筑了很多与人类物质文明和精神文明息息相关的、形状很复杂的工程结构，如大型建筑工程、大型桥梁工程、船舶工程及航空工程等等。因此，研究杆、板、壳结构的计算理论与方法都是非常有实际意义的。

杆、板、壳结构的计算理论与方法近 30 年来有了突破性的发展，这一成就得益于电子计算机的出现和结构有限单元法的产生与成熟。由于电子计算机计算技术与结构有限元法相结合，使得大型杆、板、壳结构的空间计算分析成为可能。这些问题过去只能限于理论性的探讨，而且也只能解决一些边界条件比较简单的情况，对广大工程技术人员是可望而不可及的。目前杆、板、壳结构的一般性计算已基本上得到了满意的解决，并达到了实用化的水平程度。

作者近年来致力于学习与探讨桥梁结构的稳定与振动工作。由于桥梁结构的特殊性，其结构中的一些杆、板、壳基本构件需要采取一些特殊计算方法才能得心应手地解决这类问题。当然这些问题也可以采用常规计算方法，但作者认为，常规计算方法往往显得很累赘，有的甚至影响计算精度。所以，作者在学习与研究过程中，不断切磋琢磨，时有新的想法，每有所得，辑成文稿，这些文稿有一部分已在国内核心期刊上发表。为了与国内外同行交流，求得同行们的指导和帮助，作者将这些文稿和论文反复筛选，不断修正，终成此书，以便促进这一方面研究的提高和发展。

全书共分七章，第一章介绍了与固体力学有关的有限变形基本理论，是现代工程结构线性与非线性计算的重要基础理论。第二章只研究两个特殊问题，即 Timoshenko 梁计算与桁段有限元法。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

这也是工程中经常遇到的问题,这一章是考虑到本书的完整性和系统性而增加的。第三章为薄壁箱梁理论,主要提出了薄壁直线箱梁、斜交箱梁、曲线箱梁、正交双 T 梁及斜交双 T 梁的一些实用计算方法,除第二节提出的薄壁箱梁简化计算是解析法外,其余方法均为有限单元法,因此这些计算方法具有广泛的适用性。工程结构中经常遇到板壳结构的计算,但采用板单元计算时,板单元长期受 C 连续性和剪切‘自锁’的困扰,目前解决这一问题要么理论太复杂,要么增加很多自由度,针对这一问题,本书第四章研究了几种新的板单元和一种曲壳单元。作者认为这些单元比较好地解决了 C 连续性和剪切‘自锁’的问题。第五章为 H 型截面杆件结构的局部与整体相关屈曲极限承载力计算,该章只介绍一种新的 H 型截面杆件考虑局部屈曲的梁段有限元法。据作者所知,用此方法来计算 H 型截面杆件的局部与整体相关屈曲极限承载力,解决了多年来一些计算方法只适用于小型结构计算的问题。第六章为板桁组合钢梁的非线性分析。板桁组合结构目前是比较理想的桥梁结构型式之一,其结构的空间计算比较复杂,而且国内外这方面的研究工作并不多,所以本章除提出了计算理论方法外,还对原广东西江桥板桁组合结构桥梁模型进行了空间非线性分析,以使读者对板桁组合结构受载力学行为有一个初步的了解。书中第七章论述了两种新的壳体结构非线性计算方法,即多抛物面组合扁壳几何非线性计算的试函数法和壳体结构非线性计算的扁壳有限单元 U.C(Updated Co-Moving Coordinate)列式法。

本书取材于作者近年来的工作成果。在编写时比较注重理论性与实用性相结合,注重从工程结构受力特点来研讨一些计算理论与方法,这也能够使读者加深理解,并能更好地掌握运用。国内外有关杆、板、壳结构计算类似的专著出版不少。在名著如林的园地里,作者期望本书能对大型杆、板、壳结构空间线性与非线性计算分析和大型工程结构设计的实际应用有所参考,也期望能引起从事结构工程(尤其桥梁结构工程)稳定与振动研究的大学教师、研究生和同行们的兴趣。

作者要感谢中国工程院院士、铁道部大桥局设计院方秦汉教授(高级工程师)拨冗为本书作序。同时要感谢北方交通大学陈英俊教授、华中理工大学唐家祥教授、铁道部科学研究院潘际炎教授在百忙中评阅了本书初稿,并提出了许多宝贵意见。这里还要特别指出,作者导师长沙铁道学院曾庆元教授和湖南大学刘光栋教授在本书成文过程中给予了很多建设性的指导,同时也给予了很多鼓励和支持。总之,没有导师们的教诲,此书是难已问世的,值此出版之际,作者向恩师表示诚挚的感谢。

本书第二章第二节主要是以曾庆元教授提出的桁段有限元法为基础经适当扩充和改进而写成的,其余章节均由王荣辉完成。由于作者学识水平有限,加之时间仓促,书中疏忽、不当和错误之处恳请广大读者批评指正。

谨将本书献给所有支持、关心和帮助过作者的人们,并致以崇高的敬意。

作者

1999 年 4 月于长沙岳麓书院

目　　录

1　有限变形基本理论简引 …… 1
1.1　变形体的运动描述 …… 1
1.2　有限变形的应变张量与应力张量 …… 3
1.3　有限变形结构的虚功方程——积分形式的平衡条件…… 10
1.4　有限变形结构按 U.L 列式的虚功增量方程 …… 13
1.5　基于 S- R 分解定理的增量变分方程 …… 16
主要参考文献…… 19

2　杆件结构系统的线性计算…… 20
2.1　Timoshenko 梁结构的计算 …… 20
2.2　桁架结构的空间计算…… 24
主要参考文献…… 45

3　薄壁箱梁计算理论…… 47
3.1　概　　述…… 47
3.2　箱梁约束扭转的简化计算…… 49
3.3　箱梁弯曲、扭转、畸变分析的梁段有限元法…… 58
3.4　箱梁空间计算的板梁有限单元法…… 77
3.5　双 T 梁结构的空间受力计算 …… 90
3.6　斜交箱梁结构的空间受力计算 …… 107
3.7　曲线箱梁空间计算的曲板板梁有限单元法 …… 122
3.8　薄壁曲线箱梁有限变形计算的 U.C 列式法…… 133
主要参考文献 …… 145

4　板壳结构的线性计算 …… 148
4.1　一种基于纵横向有限条带的矩形薄板弯曲单元 …… 148
4.2　一种考虑剪切变形影响的矩形板弯曲单元 …… 158
4.3　斜形板结构计算的平行四边形板块有限单元法 …… 166
4.4　扁壳结构计算的曲壳有限单元法 …… 176
主要参考文献 …… 188

5　H 型截面杆件结构局部与整体相关屈曲极限承载力计算 …… 190
5.1　薄壁结构局部—整体相关屈曲极限承载力研究回顾与本章宗旨 …… 190
5.2　H 型截面杆件考虑局部屈曲的空间位移模式 …… 192
5.3　H 型截面杆件结构有限变形平衡方程的建立 …… 197
5.4　H 型截面杆件单元的空间欧拉坐标变换 …… 217
5.5　H 型截面杆件单元弹塑性刚度矩阵的计算 …… 225
5.6　H 型截面杆件单元结构矩阵欧拉坐标变换与其增量平衡方程的求解 …… 227
主要参考文献 …… 229

6　板桁组合钢梁的非线性分析 …… 231
6.1　引　　言 …… 231
6.2　基于横向有限条带板段单元的空间位移模式与其位移参数列阵 …… 234
6.3　横向条带板段单元 U.L 列式平衡方程的建立 …… 237
6.4　板桁组合结构增量平衡方程的求解与计算程序验证 …… 264
6.5　板桁组合钢梁非线性分析 …… 276
主要参考文献 …… 312

7　壳体结构的非线性计算 …… 317
7.1　引言 …… 317
7.2　多抛物面组合扁壳的几何非线性计算 …… 317
7.3　壳体结构非线性计算的扁壳有限单元法 …… 327
主要参考文献 …… 338

1　有限变形基本理论简引

在20世纪初期,固体力学方面的文献。绝大部分都是小变形理论的研究及其应用,即经典材料力学及弹性力学中的线性理论及其应用,且所有的分析和计算都是基于线性理论。这是因为在当时受计算技术的限制,非线性分析难于完成,材料一般不在设计极限状态附近使用,对当时的情况来讲,这样处理可以说抓住了主要矛盾,也使计算工作量大大减少,并可得到比较合理的解。

随着计算技术的发展,工程结构设计往往要求材料省而力学性能最佳,也即要求设计经济合理,使得结构材料在设计极限状态附近工作,这就涉及到失稳大变形问题,这是线性计算理论无法解决的,需要非线性理论来解决。

杆、板、壳结构的计算历来是工程界、力学界的研究热点,本书有一部分内容是涉及到杆、板、壳结构的非线性计算。为了使读者回顾和了解一些非线性计算理论,本章将简明阐述一些有限变形基本理论,即:(1)有限变形应变张量和应力张量的定义与曲线坐标系下的柯西公式。(2)有限变形结构的虚功方程—积分形式的平衡条件。(3)基于U.L列式的虚功增量方程和基于S—R分解定理的增量变分方程。这些是后续章节结构非线性计算分析的理论基础。

1.1　变形体的运动描述

一个物体从微观本质上看是不连续间断的结构,但因为在工程中其几何尺寸远比微观分子或原子尺寸大过万倍、亿倍甚至更多,应力和应变度量都是宏观性质的,不涉及个别原子的形态,因此允许将物体当作连续体处理[1.1][1.8]。若取一个参考系为基准,则

需要全本请访问 www.ertongbook.com

物体运动时,在数学上可看成是点集的函数变换。

设以一个固定于空间的参考系为基准,如图 1-1 所示,当时间为 t_0 时,物体的位形为 ${}^0A$,当时间为 t 时,其位形变换为 ${}^tA$。在 t_0 时,位形 ${}^0A$ 中质点 ${}^0P$ 的坐标为 $({}^0x^1, {}^0x^2, {}^0x^3)$。在 t 时刻变换到新位形 ${}^tA$ 时,${}^0P$ 质点变换到 ${}^tP$,其坐标为 $({}^tx^1, {}^tx^2, {}^tx^3)$。对于变形体及其上的质点运动状态,可以随不同坐标的选择有不同的描述法[1.1][1.2][1.5],一种是拉格朗日(Lagrangian)坐标描述法,即一般称为物质描述法;另一种方法是欧拉(Euler)坐标描述法,即通常所说的空间描述法。对物体 t 时位形的质点 ${}^tP$ 若用它在 t=0 时的坐标来描述,于是 t=0 时刻的坐标便是识别 ${}^tA$ 中的质点 ${}^tP$ 的"标志",这就是拉格朗日描述法,这种描述的注意力集中于在某一特殊质点或其邻域所发生的情况。对物体 t 时位形的质点 ${}^tP$,若用它在 t=t 时的空间坐标来识别,这种描述的注意力集中于空间某一特殊点或其近旁的事件,这种方法叫欧拉描述法。在这种描述法中,有限元网格在空间中是固定的,材料流过这些网格,因此它适用于流体及定常状态过程。当分析物质的本构关系与当时应变或变形历史有关,以及有分布力作用于物体自由表面时,欧拉坐标描述就不方便了。而拉格朗日描述由于坐标附着在物质点上,因而易于引入本构关系和处理自由面外荷载问题。

图 1-1 物体的位形变化

物体在空间作一般形式运动时,可包括局部平动、局部转动与

变形,整体位形的变化是由局部状态改变所合成的[1.8][1.9]。

设在运动物体${}^0A$中任一点${}^0P$在t_0时刻以${}^0P$为基点形成局部正交标架$\{{}^0g_1, {}^0g_2, {}^0g_3\}$,这三个基标矢量嵌含在物体中,称为嵌含标架或拖带标架,也称为自然标架(也称流动物质坐标)。当时间为t时,${}^0A$变换到${}^tA$位形,此时拖带标架在空间的位置为$\{{}^tg_1, {}^tg_2, {}^tg_3\}$,即${}^0P \to {}^tP$, ${}^0g_i \to {}^tg_i$,实现下列变换$\{{}^0g_1, {}^0g_2, {}^0g_3\} \to \{{}^tg_1, {}^tg_2, {}^tg_3\}$。

可变形物体在运动变形过程中,物体中一点的微元线段因形状畸变,各线段在一般情况下将有不同程度的转动和长度改变,构成新的位形,在可变形物体中,局部转动状态在形变体中是点的函数,因此局部转动赋有场函数的概念。

1.2 有限变形的应变张量与应力张量

1.2.1 有限变形的应变张量

如图1-2所示,考查初始位形物体中任一点${}^0P$,在曲线坐标系中的坐标为${}^0x^i$($i=1,2,3$)。在变形位形中原来${}^0P$点现在变成${}^tP$点。${}^tP$点在新坐标系${}^tx^i$($i=1,2,3$)中的坐标点设为${}^tx^i$($i=1,2,3$)。

图1-2 物体的变位与变形

假定物体位形的变化是连续的,并且两个位形中点的映象${}^0P$与${}^tP$也是一一对应的,其变换方程为:

$$ {}^tx^i = {}^tx^i({}^0x^1, {}^0x^2, {}^0x^3) \quad (i=1,2,3) \tag{1-1} $$

在图 1- 2 中, ${}^0P\ {}^0Q$ 为无限小线段, 设 ${}^0Q$ 点的坐标为 $({}^0x^1+d^0x^1, {}^0x^2+d^0x^2, {}^0x^3+d^0x^3)$, 则 ${}^0P\ {}^0Q$ 长度 d^0s 的平方用基矢量的表达形式为:

$$d^0s^2={}^0g_{ij}d^0x^id^0x^j \tag{1-2}$$

式(1- 2)中 ${}^0g_{ij}$ 为坐标系 ${}^0x^i$ 中 ${}^0P$ 点的度规张量。关于基矢量、互易基矢量及度规张量等有关方面的知识请参见一般张量分析文献[1.1][1.2]。

在 t 时刻位形中, 原来的 ${}^0P\ {}^0Q$ 点分别移动到 ${}^tP({}^tx^1, {}^tx^2, {}^tx^3)$ 与 ${}^tQ({}^tx^1+d^tx^1, {}^tx^2+d^tx^2, {}^tx^3+d^tx^3)$。${}^tP\ {}^tQ$ 的长度平方同样为:

$$d^ts^2={}^tg_{ij}d^tx^id^tx^j \tag{1-3}$$

上式中 ${}^tg_{ij}$ 为坐标系 ${}^tx^i$ ($i=1, 2, 3$) 的度规张量。

通过坐标点的变换, 方程式(1- 2)和式(1- 3)可分别写成:

$$d^0s^2={}^0g_{ij}\frac{{}^0x^i}{{}^tx^l}\frac{{}^0x^j}{{}^tx^m}d^tx^ld^tx^m \tag{1-4}$$

$$d^ts^2={}^tg_{ij}\frac{{}^tx^i}{{}^0x^l}\frac{{}^tx^j}{{}^0x^m}d^0x^ld^0x^m \tag{1-5}$$

于是线段长度平方之差, 经过哑标变换之后为:

$$d^ts^2-d^0s^2={}^tg_{lm}\frac{{}^tx^l}{{}^0x^i}\cdot\frac{{}^tx^m}{{}^0x^j}-{}^0g_{ij}\ d^0x^id^0x^j \tag{1-6}$$

也可表示为:

$$d^ts^2-d^0s^2={}^tg_{ij}-{}^0g_{lm}\frac{{}^0x^l}{{}^tx^i}\cdot\frac{{}^0x^m}{{}^tx^j}\ d^tx^id^tx^j \tag{1-7}$$

现在定义应变张量为:

$${}^tE_{ij}=\frac{1}{2}\ {}^tg_{lm}\frac{{}^tx^l}{{}^0x^i}\frac{{}^tx^m}{{}^0x^j}-{}^0g_{ij} \tag{1-8}$$

$${}^te_{ij}=\frac{1}{2}\ {}^tg_{ij}-{}^0g_{lm}\frac{{}^0x^l}{{}^tx^i}\cdot\frac{{}^0x^m}{{}^tx^j} \tag{1-9}$$

即式(1- 6)和式(1- 7)可分别写成

$d^ts^2-d^0s^2=2{}^tE_{ij}d^0x^id^0x^j$ 和 $d^ts^2-d^0s^2=2{}^te_{ij}d^tx^id^tx^j$。

${}^tE_{ij}$ 称为格林应变(Green), 也称格林——拉格朗日应变(Green—Lagrangian), 它是参照未变形前坐标系 ${}^0x^1, {}^0x^2, {}^0x^3$ 定

义,即以初始位形时的坐标作为度量基准,属拉格朗日描述。${}^{t}e_{ij}$ 称为柯西应变(Cauchy),它是参照变形后坐标 ${}^{t}x^{1}$, ${}^{t}x^{2}$, ${}^{t}x^{3}$ 定义,即以 t 时位形的坐标作为度量基准,属于欧拉描述。由式(1-6)和式(1-7)可看出:这两个应变张量只是变形后与变形前微线段长度平方差的系数,并没有直接的物理意义,从这两式还可以看出这样一个结论:一个物体做刚体运动的必要与充分条件是整个物体各点的格林应变或柯西应变为零。

前述对初始位形与 t 时刻位形中的物体位移采用两组曲线坐标系进行表示。关于坐标的选择,有两种很有用的特殊情形值得注意的,一种是拖带坐标系[1.1],也称随动坐标系,另一种是直角坐标系。

先介绍拖带坐标表示的应变张量。拖带坐标系是指参考坐标架,像固定刻画在物体上一样,随着物体一起变形,也就是使 t 位形中质点的坐标 ${}^{t}x^{i}$($i=1,2,3$)与该质点在初始位形中的坐标 ${}^{0}x^{i}$($i=1,2,3$)保持相同,即 ${}^{t}x^{i}={}^{0}x^{i}$, $\frac{{}^{t}x^{1}}{{}^{0}x^{i}}=\delta_{i}$, $\frac{{}^{0}x^{1}}{{}^{t}x^{i}}=\delta_{i}$,于是应变张量式(1-8)、式(1-9)简化为:

$$ {}^{t}E_{ij}={}^{t}e_{ij}=\frac{1}{2}({}^{t}g_{ij}-{}^{0}g_{ij}) \qquad (1-10) $$

可见,采用拖带坐标系,可以保证 t 时刻位形的质点与原始位形的质点具有相同的坐标值,由式(1-10)可见,t 位形的应变张量可以完全由坐标架的度规张量的变化来决定。在许多方法中,这是研究几何非线性问题的一种很方便的坐标系的选择。

下面再介绍比较常用的直角坐标表示的应变张量:

若对初始位形与变形位形采用同一组直角直线坐标系如图 1-3 所示。

则度规张量就变得非常简单,即:

$$ {}^{t}g_{ij}={}^{0}g_{ij}=\delta_{j}\begin{cases}1 & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases} \qquad (1-11) $$

这时位移矢量 ${}^{t}u$ 的分量可表示为:${}^{t}u^{i}={}^{t}x^{i}-{}^{0}x^{i}$($i=1,2,3$)

(1-12)

而

$$\frac{{}^{t}x^{i}}{{}^{0}x^{j}} = \frac{{}^{t}u^{i}}{{}^{0}x^{j}} + \delta_j$$
$$\frac{{}^{0}x^{i}}{{}^{t}x^{j}} = \delta_j - \frac{{}^{t}u^{i}}{{}^{t}x^{j}} \qquad (1\text{-}13)$$

图 1-3 直角坐标系表示物体的变形

于是格林应变张量可表示为:

$${}^{t}E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_m \frac{{}^{t}x^{l}}{{}^{0}x^{i}} \frac{{}^{t}x^{m}}{{}^{0}x^{j}} - \delta_j\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}u^{i}}{{}^{0}x^{j}} + \frac{{}^{t}u^{j}}{{}^{0}x^{i}} + \frac{{}^{t}u^{l}}{{}^{0}x^{i}} \cdot \frac{{}^{t}u^{l}}{{}^{0}x^{j}}\right) \quad (l = 1, 2, 3) \quad (1\text{-}14)$$

同理柯西应变张量可表示为:

$${}^{t}e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{t}u^{i}}{{}^{t}x^{j}} + \frac{{}^{t}u^{j}}{{}^{t}x^{i}} - \frac{{}^{t}u^{l}}{{}^{t}x^{i}} \frac{{}^{t}u^{l}}{{}^{t}x^{j}}\right) \quad (l = 1, 2, 3) \quad (1\text{-}15)$$

1.2.2 有限变形的应力张量

一、曲线坐标系下的应力张量与柯西公式

取一正交曲线坐标系如图 1-4(a)所示,考虑一个处于变形位形的构件,从中截出一个微小四面体 oabc,其四面分别受 T Q R F 作用,如图 1-4(b)所示。作用于物体内任意点的应力张量不仅与其作用点的位置有关,而且与其作用面元的方向有关。设四面体 oabc 外法线矢量为 n,棱边 oa、ob、oc 的矢量分别为 ds_1 ds_2 ds_3,很显然,$ds_1 = g_1 dx^1$、$ds_2 = g_2 dx^2$、$ds_3 = g_3 dx^3$,又设 Δoab、Δoac、Δocb

和 Δabc 的外表面应力分别为 $\vec{\sigma}^{(1)}$、$\vec{\sigma}^{(2)}$、$\vec{\sigma}^{(3)}$、$\vec{\sigma}^{(n)}$, 则

$$\begin{aligned} T &= \vec{\sigma}^{(1)} \cdot dA_1 \\ Q &= \vec{\sigma}^{(2)} \cdot dA_2 \\ R &= \vec{\sigma}^{(3)} \cdot dA_3 \\ F &= \vec{\sigma}^{(n)} \cdot dA_4 \end{aligned} \qquad (1\text{-}16)$$

而

图 1-4 曲线坐标系下微小四面体受力图

$$\begin{aligned} dA_1 &= \frac{1}{2} ds_3 \times ds_2 = \frac{1}{2} g_3 \times g_2 dx^3 dx^2 = -\Delta s_1 l^1 \\ dA_2 &= \frac{1}{2} ds_2 \times ds_1 = \frac{1}{2} g_2 \times g_1 dx^2 dx^1 = -\Delta s_2 l^2 \\ dA_3 &= \frac{1}{2} ds_1 \times ds_3 = \frac{1}{2} g_1 \times g_3 dx^1 dx^3 = -\Delta s_3 l^3 \end{aligned} \qquad (1\text{-}17)$$

实际上 $g^k = \dfrac{g_i \times g_j}{g_i \cdot (g_i \times g_k)} = \dfrac{1}{\overline{g}}(g_i \times g_j)$ $(\overline{i\ j\ k})(\overline{1\ 2\ 3})$

即 $$g_i \times g_j = \overline{g}\, g^k$$

$$g^k = \overline{g^{kk}}\, l^{k[1.1]} \text{(k 不是哑标)}$$

故式(1-17)中, $$\Delta s_1 = \frac{1}{2} \overline{g g^{11}} dx^3 dx^2 \quad l^1 = \frac{g^1}{\overline{g^{11}}}$$

$$\Delta s_2 = \frac{1}{2} \overline{g g^{22}} dx^1 dx^2 \quad l^2 = \frac{g^2}{\overline{g^{22}}}$$

$$\Delta s_3 = \frac{1}{2} \overline{g g^{33}} dx^1 dx^3 \quad l^3 = \frac{g^3}{\overline{g^{33}}}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com