

第一篇 河口学基础

根据 Pritchard 的定义 河口是一个半封闭的沿岸水体 它与外海直接相连 在这里海水被来自陆地的径流冲淡。

在称为“河口”的地区 咸水、淡水相遇，源于口门并向内传播的潮汐运动至河口地区，导致河口环境中物质与能量的混合和扩散 因此 河口水体呈现“分层结构”。

河口地区存在的基本问题：①盐水入侵；②污水排放产生的污染；③沉积过程 ④与层状流的扩散运动密切相关的泥沙运动。通常，在三个坐标方向均存在盐度梯度及相应的密度梯度，但是三维物质扩散方程的复杂性限制了它在河口地区潮流分析中的应用，因此，最常用的工具是用一维方程来近似分析盐水入侵、水污染以及泥沙运动等问题。

我们的基本目标是提供一本讲授对河口初步认识的教材，由于篇幅有限，河口有关问题要在有限的 11 个章节中介绍较为困难 因此 本书的重点放在分析方法、简单的模型以及理想化的河口等方面。虽然在这里不详细介绍复杂条件下的数学计算过程和详细的实验数据及其结果，然而本书介绍的基本原理对于理解在现场遇到的更为复杂情况将会大有帮助。

第 1 章 扩散过程

1.1 引言

河口学涉及的基本问题可以归结为以下四类：废弃物处理及其运移、盐水入侵、沉积过程以及泥沙输移，所有这些问题都与密度分层流环境下的扩散过程密切相关。本章旨在提供恒定或非恒定、均匀或层状流系统下，研究扩散现象的基本知识。

河口水体在三个坐标方向均存在密度梯度。但是三维物质扩散方程的复杂性限制了它在河口地区潮流分析中的应用，因此，本章介绍的一维近似方程是分析河口地区的盐水入侵、水污染以及泥沙运动等问题的最常用的框架。

1.2 湍流对流扩散方程

相对于宏观的湍流混合 其微观的分子运动可以忽略不计 在 x 方向进入研究单元的物质通量为 $(\rho c u) dy dz$ 。这里

$u = x$ 向的瞬时流速

$\rho = \text{密度} = \frac{\text{溶液质量}}{\text{溶液体积}}$

$c = \text{扩散物的瞬时浓度} = \frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}$

$\rho c = \frac{\text{溶液质量}}{\text{溶液体积}} \times \frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}} = \frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液体积}}$

通过流体单元的物质通量如图 1-1 所示。

在 x 向, 从单位体积出去的物质通量为 $\left[\rho c u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u) dx \right] dy dz$ 。

x 向的流动引起单元体内质量的净变化(输入减去输出)为 $\frac{\partial}{\partial x}(\rho c u) dx dy dz$ 。

单元体内 y 方向和 z 方向的质量净变化分别为 $\frac{\partial}{\partial y}(\rho c v) dx dy dz$; $\frac{\partial}{\partial z}(\rho c w) dx dy dz$ 。

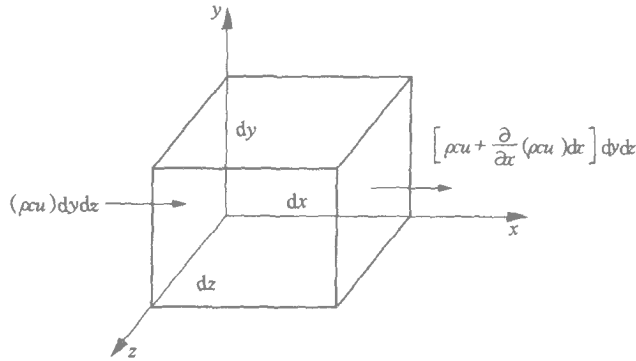


图 1-1 通过流体单元的物质通量示意图

在 x, y, z 三个方向上总的变化必然等于单位体积 ($dx dy dz$) 内物质质量随时间 t 的变化, 然后除以单元体的体积之后得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho c w) = 0$$

式中: u, v, w 分别为 x, y, z 各向的瞬时流速; t 为时间。

应用该方程 如果总的密度(ρ)变化随溶解物质的变化最大为 2% 那么 相对于浓度梯度 ∇c 而言 密度梯度 $\nabla \rho$ 相当小。在自然条件下 确实如此。

当 $\nabla \rho$ 远小于 ∇c 可以将上面的方程近似表示为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c u) + \frac{\partial}{\partial y}(c v) + \frac{\partial}{\partial z}(c w) = 0 \quad (1-1a)$$

对于湍流场, 瞬时流速与浓度可以表达为关于时间的平均值及波动值之和:

$$u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v'; w = \bar{w} + w'; c = \bar{c} + c'$$

带入公式(1-1a) 得到

$$\frac{\partial(\bar{c} + c')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{c} + c')(\bar{u} + u')] + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{c} + c')(\bar{v} + v')] + \frac{\partial}{\partial z}[(\bar{c} + c')(\bar{w} + w')] = 0$$

取时间平均, 则 $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'; \overline{u'u'}, \overline{v'v'}, \overline{w'w'}$ 均为 0, 上述方程可简化为

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \bar{u}c'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'c'}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \bar{v}c'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'c'}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial \bar{w}c'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'c'}{\partial z} \right] = 0 \quad (1-1b)$$

利用湍流连续方程 即

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

方程式(1-1b)进一步简化为

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'c'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'c'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'c'}{\partial z} = 0 \quad (1-2a)$$

交叉乘积项如 $\bar{u}'c'$ 必然表示整个场的平均状况。为此 引用菲克斯扩散法则 质量通量 ($u'c'$) 正比于平均浓度梯度, 其方向为浓度增长的方向。因此

$$\bar{u}'c' = -D_{tx} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}; \bar{v}'c' = -D_{ty} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}; \bar{w}'c' = -D_{tz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (1-2b)$$

式中 D_{tx}, D_{ty} 为水平湍流扩散系数; D_{tz} 为垂向湍流扩散系数。

式(1-2b)代入式(1-2a) 得到三维对流扩散方程如下:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) \quad (1-3)$$

式中 等号左方为随流速变化的物质对流输移 等号右方为非平流紊动质量输移。

1.3 恒定密度流的一维湍流扩散

1.3.1 一维湍流扩散方程及其解

假设只考虑 $c = f(x, t)$ 以及 $v=0, w=0, u=U$ 的情况 式(1-3)的三维扩散方程简化为一维方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (1-4)$$

方程(1-4)的解依赖于边界条件及施加的初始条件。为了检验扩散方程及其解, 我们建立下面的边界和初始条件(图 1-2):

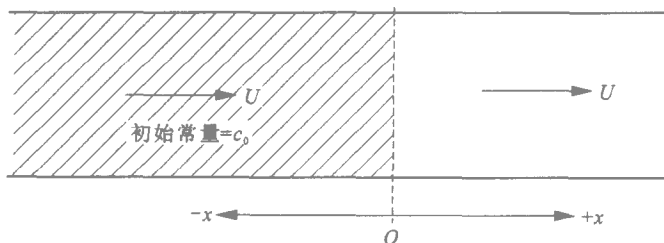


图 1-2 一维湍流扩散方程初始条件图解(在 $x=0$ 处 浓度为常量)

$-\infty < x < +\infty, c = c_0$, 当 $x \leq 0, c$ 为常数, 那么

$c(x=0, t) = c_0$	当 $t \geq 0$	边壁处的边界条件
$c(x, t=0) = 0$	当 $x > 0$	初始条件
$c(\infty, t) = 0$	当 $t \geq 0$	水道末端的边界条件

基于这些初始条件，美国地质调查局的 Ogata 和 Banks 在一篇学术论文中给出了一维扩散方程(1-4)的解

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} e^{\frac{Ux}{D_t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x+Ut}{2\sqrt{D_t t}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-Ut}{2\sqrt{D_t t}}\right) \quad (1-5)$$

其中 余误差函数 $\operatorname{erfc}(\alpha) = 1 - \operatorname{erf}(\alpha)$

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-\eta^2} d\eta$$

需查数学积分表。给定一些 $\operatorname{erfc}(\alpha)$ 的值： $\operatorname{erfc}(+\infty) = 0$ ， $\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$ ， $\operatorname{erfc}(0) = 1$ 。图 1-3 表示方程(1-5)。

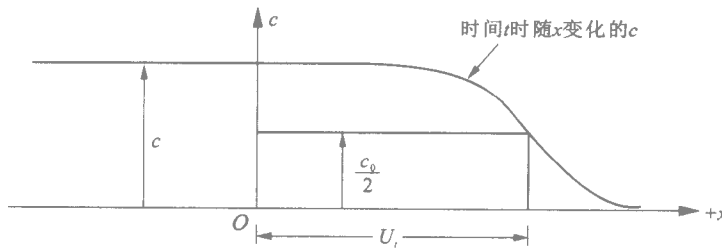


图 1-3 密度流浓度曲线 ($x=0$ 处 浓度为常量)

浓度曲线上中点 $c = c_0/2$ 以速度 U_t 运动 即如图所示像锋面一样在 x 方向传播。

当 $t \rightarrow \infty$ 对一个正数 U 的固定解为

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} e^{\frac{Ux}{D_t}} \operatorname{erfc}(\infty) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-\infty) = 1$$

这就意味着当 $t \rightarrow \infty$ 时 $c = c_0$ 。后面我们会用一些室内实验来证明这个方程解的正确性。

1.3.2 三个室内实验

设计了三个实验验证方程解的有效性。

例 1 当 $U=0, u' \neq 0$ 。可以通过在矩形水渠放置一个震动的格网来模拟这种特殊条件。

为了保证边界条件 对任意时刻在 $x=0$ 处 $c = c_0$ 我们改变初始条件 在 x 为负值的区域 $c = 2c_0$ 。方程(1-5)可以写为

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} e^{\frac{Ux}{D_t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x+0}{2\sqrt{D_t t}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-0}{2\sqrt{D_t t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_t t}}\right) \quad (1-6)$$

图示为图 1-4。

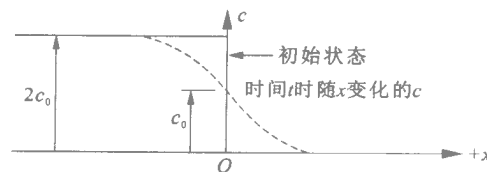


图 1-4 $U=0, x=0$ 处浓度为常量，
均匀湍动通过流体

方程(1-6)恒定解为:当 $t \rightarrow \infty$, $\frac{c}{c_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\infty}\right) = \operatorname{erfc}(0) = 1$, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $c = c_0$ 。

例 2: 已知流速方向与 x 正向相反, 求当 $t \rightarrow \infty$, 方程的恒定解。

根据已知条件, 令 $u = -U_r$, $t = \infty$, 方程(1-5)简化为

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} e^{-\frac{U_r x}{D_t}} \operatorname{erfc}\left[\frac{x - U_r \infty}{2\sqrt{D_t t}}\right] + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{x + U_r \infty}{2\sqrt{D_t t}}\right] = e^{-\frac{U_r x}{D_t}} \quad (1-7)$$

图示为图 1-5。

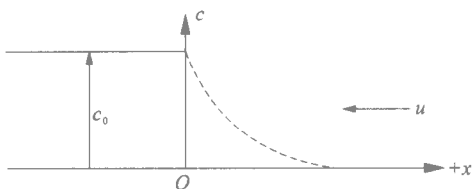


图 1-5 当 $u = -U_r$, $D_t = \text{常量}$ 时, 稳定状态浓度的分布

注意, 这个解与恒定状态的一维扩散方程有关, 即

$$-U_r = \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\left(D_{tx} \frac{dc}{dx}\right) \quad (1-8a)$$

其物理含义代表一种在浓度减少的方向 ($+x$), 无对流的质量通量 $x \left[\frac{d}{dx}\left(D_{tx} \frac{dc}{dx}\right) \right]$ 与水流方向 ($+x$) 的对流质量通量 $x \left(-U_r \frac{dc}{dx}\right)$ 之间的平衡状态。

例 3: 已知扩散系数 $D_x \approx \frac{1}{x}$, $u = -U_r$, $t = \infty$ 。

为保证以上条件, 并防止 $\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$, 假设 $\frac{D_{tx}}{D_0} = \frac{B}{(x+B)}$, 其中 $B = \text{常数}$, D_0 是 D_{tx} 在 $x=0$ 的值。对方程(1-8)求积分得

$$\begin{aligned} \int -U_r dc &= \int d\left(D_{tx} \frac{dc}{dx}\right) \\ -U_r c &= D_{tx} \frac{dc}{dx} = \left(\frac{BD_0}{x+B}\right) \left(\frac{dc}{dx}\right) \end{aligned} \quad (1-8b)$$

为使积分简单, 将原点移到 $x = -B$, 从而 $dx = d(x+B)$ 。

由式(1-8b)求积分, 得

$$\begin{aligned} -U_r(x+B)dx &= \frac{BD_0}{c} dc \\ \int_{-B}^{\infty} \frac{-U_r(x+B)}{BD_0} d(x+B) &= \int_{-B}^{\infty} \frac{dc}{c} \\ \text{即} \quad -\frac{U_r(x+B)^2}{BD_0(2)} &= \ln c - \ln c_0 = \ln \frac{c}{c_0} \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中, $\frac{c}{c_0} = e^{-\frac{U}{2BD_0}(x+B)^2}$ 是一个高斯曲线。

表示方程式(1-9)的图解如图1-6所示。

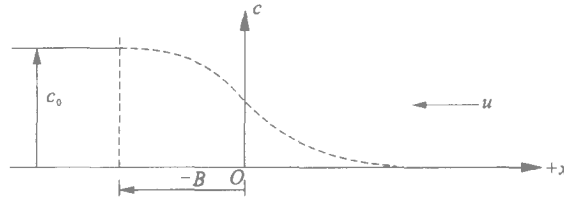


图1-6 当 $u = -U_r, D_{Lr}$ 为 x 的反函数, 稳定状态下浓度分布图

1.3.3 在 $x=0$ 处注入有限的水体

当 $x=0, t=0$ 横向均匀地加入定量的示踪物质 物质会向下游对流扩散, U 和 D_L 不随 x 变化。

引入一个函数 $\delta(x)$ 表示上面提到的条件。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1-10)$$

借助函数 $\delta(x)$ 我们可以将 $t=0$ 时的浓度表示为:

$$c(x, t=0) = \frac{M}{\rho A} \delta(x)$$

式中: $M\delta(x)$ 为瞬时注入量 其中质量 $M = \rho c A$, A 为截面积。

边界条件为 $c(x = \pm \infty, t) = 0$ 当 $t \geq 0$ 。在这些初始条件和边界条件下, 得出方程(1-4)表示的一维扩散方程的解如下:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{Lx} \frac{\partial c}{\partial x} \right)$$

$$c(x, t) = \frac{M}{A\rho \sqrt{4\pi D_L t}} e^{-\frac{(x-Ut)^2}{4D_L t}} \quad (1-11)$$

该解的图形表示示踪物质向下游移动, 扩散形式呈对称的高斯曲线, 浓度峰值以速度 U 运动 最高浓度 c_{\max} 沿 $+x$ 方向减小 (图1-7)。

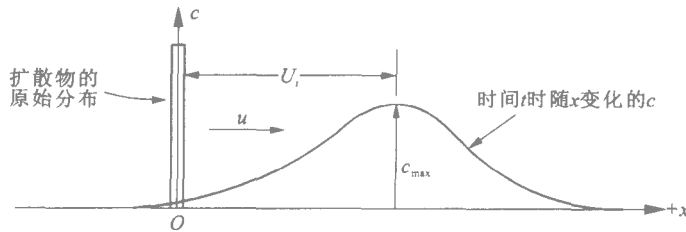


图1-7 当 $x=0$, 瞬时注入示踪剂的非稳定浓度分布曲线

当 $t \rightarrow \infty$, 方程(1-11)的恒定解为

$$c(x, t = \infty) = \frac{M}{A\rho \sqrt{\infty}} e^{-\infty} = 0 \quad (1-12)$$

1.3.4 随时间变化 $d\tau$ 的射流物质增量 dM

一定剂量的液体 dM 随着时间变化被逐渐注入，连续的注入速率是单位时间注入的液体质量 即

$$Q_{in} = dM/d\tau$$

方程(1-11)改写为

$$dc = \frac{dM}{A\rho \sqrt{4\pi D_t(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-U(t-\tau)]^2}{4D_t(t-\tau)}}$$

Riemann 对该式求积分得到如下解:

$$C = \frac{Q_{in}}{A\rho U} \left[e^{4\alpha} \left(R_1 \mu \frac{1}{2} \right) + \left(R_2 \pm \frac{1}{2} \right) \right]$$

其中, $\alpha = \frac{Ux}{4D_t}$; R_1 是瑞曼积分的第一类型; R_2 是瑞曼积分的第二种类型。

当 $t \rightarrow \infty$, 方程恒定解为

$$c = \frac{Q_{in}}{A\rho U} \quad \text{当 } x > 0; \quad c = \frac{Q_{in}}{A\rho U} e^{\frac{Ux}{D_t}} \quad \text{当 } x < 0 \quad (1-13)$$

1.3.5 剪切流的纵向扩散

浓度变化 $c(x, t)$ 依赖于湍流扩散系数 D_t 以及流体的性质 例如黏性 μ 分子扩散率 η_0 。因为 D 湍流不是流体的性质 我们需要建立 D_t 与流体的特性之间的相关关系, 类似于 $\mu = \frac{\tau}{\partial u / \partial y}$ 等。

考虑管道中的湍流 (在 $r-x$ 的二维平面) 径向速度变化 Δu 是示踪物纵向扩散的决定因素 已知“扩散”是由于相邻层以不同速度运动引起的径向混合 我们称 D_L 为扩散系数 测出对管道直段流体 D_L 比 D_t 大 200 倍 而且在管道弯曲处 D_L 更大 (图 1-8)。

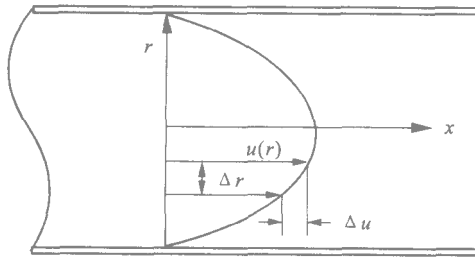


图 1-8 管道湍流的速度剖面

为建立 D_L 与流体的容器特征之间的关系, 泰勒 (G. I. Taylor) 提出对于管道内流体

$$D_L = 10.1 r_0 u' \quad (1-14)$$

式中: r_0 为管道半径; $u' = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ 。

对于明渠 哈勒曼 (Harleman) 提出:

$$D_L = 14.3 R \sqrt{2gRS_e} \quad (1-15)$$

式中: R 为水力半径; S_e 为能量梯度; g 为重力加速度。

应用查兹(Chezy)公式: $U = C_c \sqrt{RS_e}$, 则有 $S_e = \frac{U^2}{C_c^2 R}$, 将此式代入式(1-15), 得到

$$D_L = \frac{14.3 \sqrt{2g}}{C_c} RU \quad (1-16)$$

应用曼宁(Manning)公式: $C_c = \frac{1.49}{n} R^{\frac{1}{6}}$, 代入式(1-15), 从式(1-16)得到

$$D_L = \frac{1.43}{1.49} \sqrt{2g} = \left(\frac{n}{R^{1/6}} \right) \left(\frac{RU}{\nu} \right) \nu$$

$$\frac{D_L}{\nu} = \left(\frac{n}{R^{1/6}} \right) \mathcal{R} \quad (1-17)$$

式中: $\mathcal{R} = \frac{RU}{\nu}$; $\frac{n}{R^{1/6}}$ 称为相对糙率; ν 为流体的黏滞系数。

例如: $U = 3 \text{ ft/s}$ ($1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$), $n = 0.025$, $R = A/P = 30 \text{ ft}$, 得 $D_L = 100 \text{ ft}^2/\text{s}$ 。

1.4 非均值流的一维湍流扩散方程

1.4.1 第一个实验室实验

回忆 1.3.2 节例 1 中当 $U = 0, u' \neq 0$ 以及 $\rho = \text{常数}$ (均值流体) 则有

$$\frac{c}{c_0} = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_t t}} \right)$$

参考图 1-9。

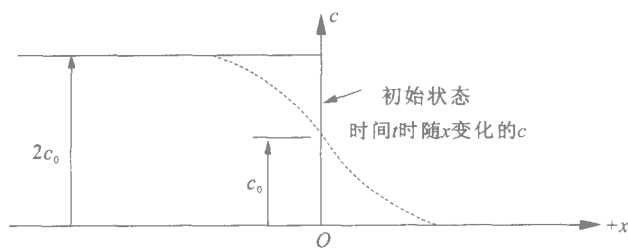


图 1-9 当 $U = 0, u' \neq 0$ 时, 浓度随时间变化的分布
($x = 0$ 处, 浓度为常量)

图 1-10 表示当流体分层, 而且突然抽去挡板的情形。

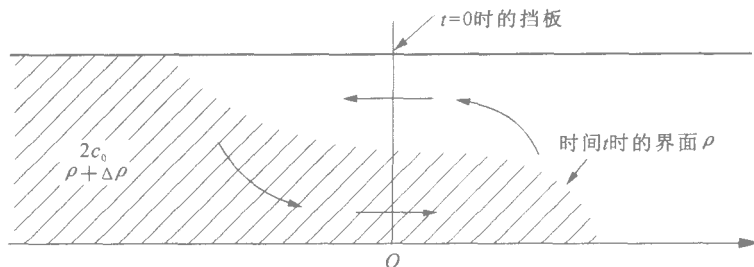


图 1-10 抽去挡板后的密度交换

流动倾向于产生大尺度漩涡，而湍动产生较小的和中等尺度的漩涡。图 1-11 表示当施加能够产生湍流的动力之后，层流之间的界面会抹去直至消失。产生这种现象的原因是重力不稳定性，当两种流体的密度不同时，将会感到水平方向的物质运移增多。

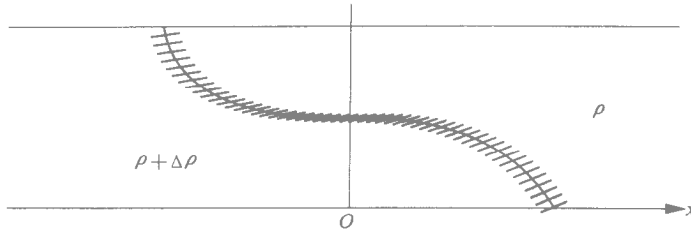


图 1-11 施加产生湍流的机械作用之后的密度交换流

因缺乏关于层流问题的精确推导，我们利用与均值流相同的模型，即 $\frac{c}{c_0} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_t t}}\right)$ 。由于重力差异产生流体交换以及涡流产生的物质运移的组合作用可以用表面扩散系数 D_x 表示。图 1-12 提供了由实验得出的 D_t 和 D_x 值 可以发现 D_x 为 D_t 的三倍。

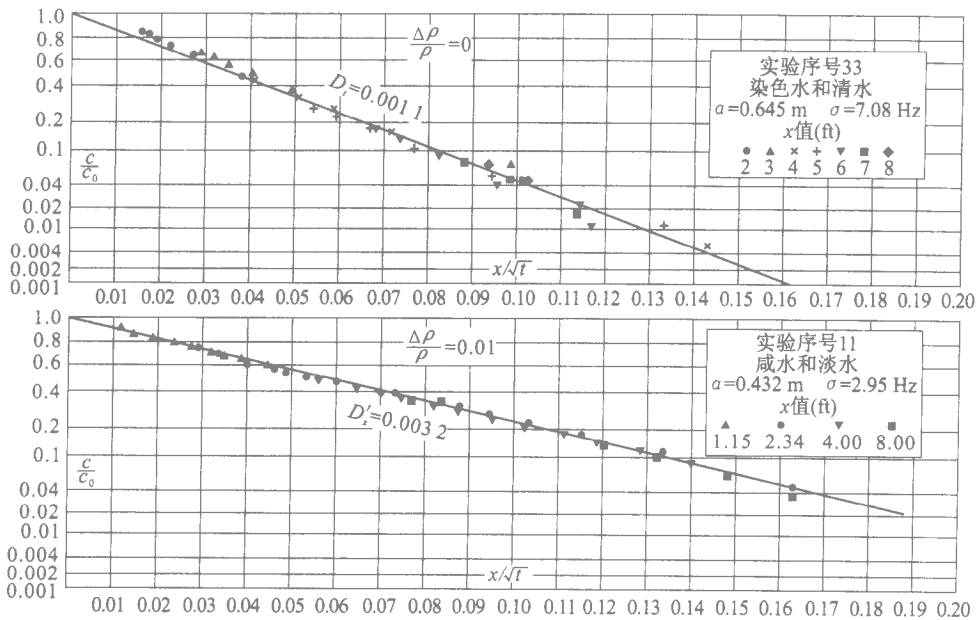


图 1-12 与 x/\sqrt{t} 相对应的浓度变化图(有无密度差异均随时间变化而变化的扩散)

1.4.2 第二个实验室实验

这个实验是关于盐水入侵。回忆一下 1.3.2 节中的例 2, $U = -U_r$, $D_t = \text{常数}$, $t \rightarrow \infty$ 和

$$\frac{c}{c_0} = e^{-\frac{U_r x}{D_t}}$$

参考下面的图 1-13。

如果将注入水渠原点左边的液体替换为一种比注入右边的液体密度大的液体，这可以代表在混合型河口的盐水入侵的基本特征。

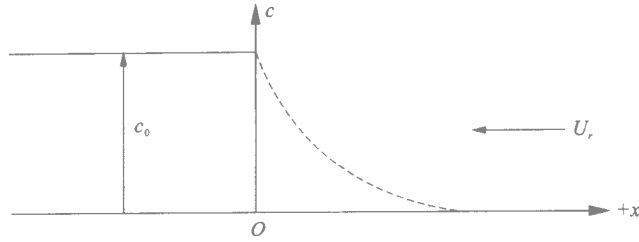


图 1-13 $U = -U_r, D_t = \text{常数}$, 稳定状态下的浓度分布

图 1-14 表示一种理想状态的河口中稳定状态下盐水扩散的特征：①盐水入侵区域的湍流强度；②淡水径流速率；③在河口入口处盐淡水的密度差异。实验室水槽的下游引入咸水的插管部分的浓度为衡量可以代表理想河口的海水边界。

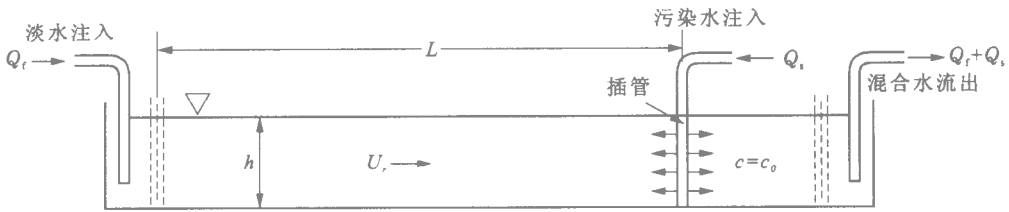


图 1-14 理想河口示意图

给定流速 U_r 以及湍流级别，扩散系数可以通过适当曲线与实测浓度分布曲线相互配置求得 见图 1-15。

通过在插管处不断注入盐水(图 1-14) 可以确保在 $x=0$ 处盐水浓度保持恒定，在上游开端以均一的速率注入淡水，这样使得在相反的末端充满混合流。利用可导探测器能够测量在上游方向恒定的盐水入侵，并在 x 轴反向绘制曲线图，图 1-16 表示不同湍流强度及淡水注入速率下的盐水入侵速率曲线。浓度的对数曲线并不是一条如图 1-15 所示的直线 所以表面扩散系数 D' 一定是 x 的函数。稳定层流的权威方程为

$$-U_r \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \left(D_x' \frac{dc}{dx} \right)$$

该式为一维扩散方程，求一次积分

$$\int -U_r dc = \int d \left(D_x' \frac{dc}{dx} \right)$$

$$-U_r c = D_x' \frac{dc}{dx} \quad (1-18)$$

用 $c \frac{d(\ln c)}{dx}$ 替换 $\frac{dc}{dx}$ ，式(1-18)变为

$$-U_r c = D_x' \frac{dc}{dx} = D_x' \left[c \frac{d(\ln c)}{dx} \right]$$

即

$$D_x' = -U_r \left[\frac{1}{\frac{d(\ln c)}{dx}} \right]$$

用这个等式我们可以通过绘制对应于不同 x 的 c 值曲线图(图 1-16)求得 D_x' ， D_x' 可以通过直接测量上面曲线的斜率求得。

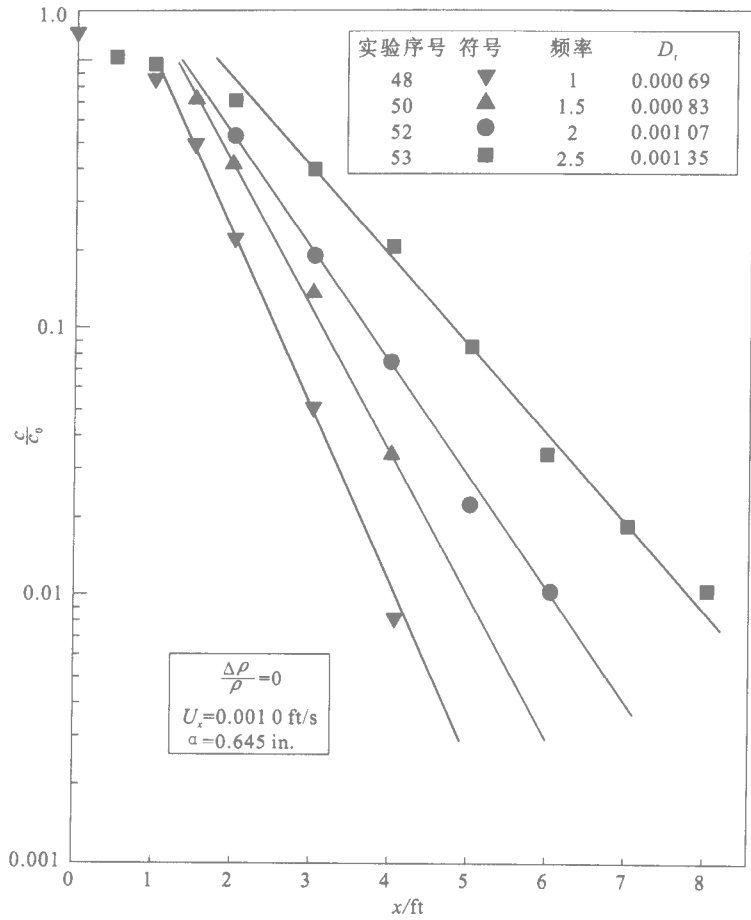


图 1-15 不同级别的湍流条件下,随距离变化的浓度分布图

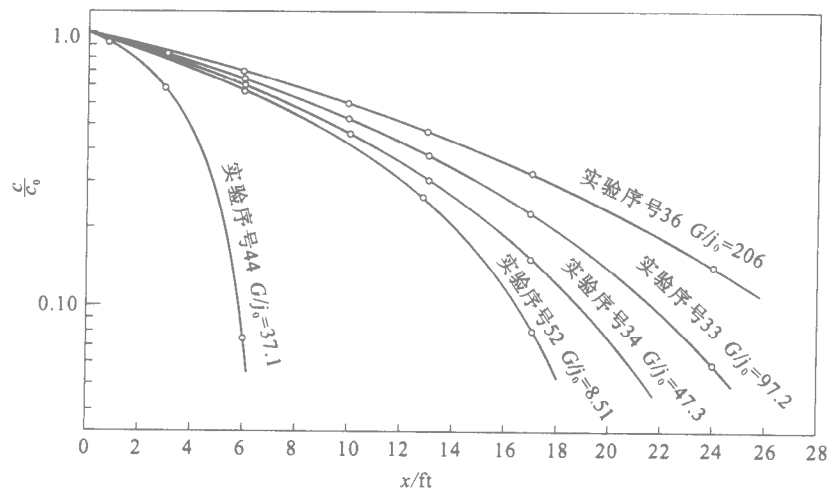


图 1-16 不同层流参数值的浓度随距离变化曲线图

图中 G/j_0 为层流参考数值。

第 2 章 湍流射流动力学

2.1 引言

暴风雨带来的径流、工农业废水、城市废水和生活污水等直接通过河流或者地下管道排入河口地区。以上各种情况都会产生速度梯度，如果雷诺数足够大，流体不稳定就会形成湍流混合区域。理解湍流动力表现对海岸工程师很重要，因为这非常有用。

湍流可以归为下面两类：

- (1) 自由湍流：主要由速度梯度产生的湍流。
- (2) 岸壁湍流：主要由岸壁处的非滑动条件产生的湍流。

对于自由湍流，剪切力 τ 通常可以忽略不计，在流前进方向 $\partial p / \partial x = 0$ 即 x 正方向。射流属于自由湍流。

2.2 观测 由图 2-1 说明自由湍流

- (1) 流入静止水体的平面射流的形状与形态。
- (2) 混合区域的宽度 b 大于射流的轴 x_0 。
- (3) 流速梯度 $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ 。
- (4) L_0 是潜在的中心的长度 当 $x < L_0$ 时 $u = U_0$ 为中间流速。
- (5) 周围的液体被从孔中注入的流体挟带并发生混合。
- (6) 由于一部分被带走， x 轴方向的流的速率 Q 随之增大。

2.3 平面射流动力学

2.3.1 基本方程

对于流体力学，无压力梯度的边界层等式可以用于湍流平面射流，即

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2-1)$$

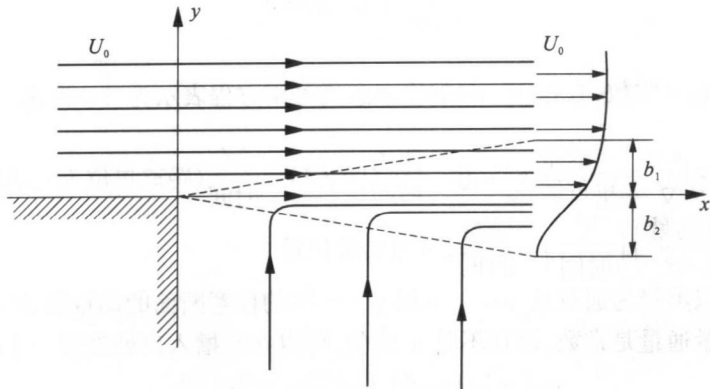
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-2)$$

沿 y 轴对方程(2-1)积分，得

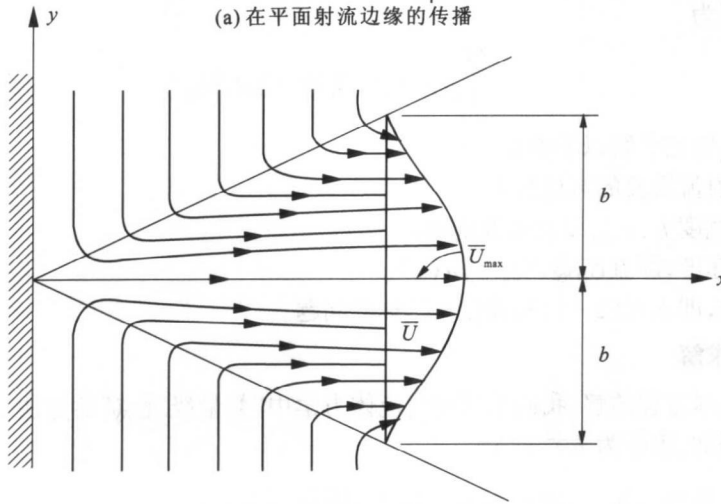
$$\rho \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \rho \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (2-3a)$$

对第一项， $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$ ， ρ 以及第二项进行局部积分，得

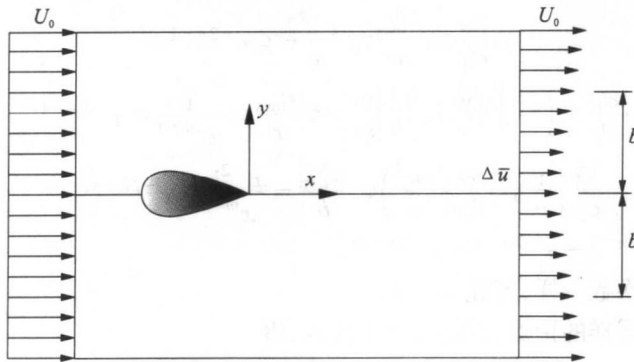
$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \rho v u \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} dy \quad (2-3b)$$



(a) 在平面射流边缘的传播



(b) 完全发育的沉入射流的速度分布



(c) 沉入对象的尾迹速度分布

图 2-1 自由湍流

将式(2-3b)代入式(2-3a)得

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = 0 \quad (2-4)$$

已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \text{常数}$, 方程(2-4)的物理意义可用方程表示为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho u)(u dy)$
 = 常数。其中 $\rho u = \frac{mu}{\nabla} = \frac{\text{动量}}{\text{单位体积}}$; $u dy = \frac{\text{距离}}{\text{时间}} (\text{ft} \times 1) = \frac{\nabla}{\text{时间}}$ (距离单位为 ft, 时间单位为 s), 所以 $(\rho u)(u dy) = \left(\frac{\text{动量}}{\nabla}\right) \left(\frac{\nabla}{\text{时间}}\right) = \frac{\text{动量}}{\text{时间}}$, 称为动量通量。

式(2-4)可以解释为通过从 $y = +\infty$ 到 $y = -\infty$ 的任意断面的动量通量均为独立于 x 轴的常数。因为动量通量是常数, 而且不随 x 变化, 可以在水槽入口处设置一个动量通量。

$$\rho u(u dy) = \rho U_0 U_0 (2b_0) = 2\rho U_0^2 b_0$$

式(2-4)改写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \text{常数} = 2\rho U_0^2 b_0 \quad (2-5)$$

剩下的问题是求解以下参数:

- (1) 产生射流需要的区域长度。
- (2) 射流宽度 b 、 u_{\max} 以及速度剖面。
- (3) 挟带速度 即流速 $Q/Q_0 = fn(x)$ 。

换句话说 即求式(2-1)和式(2-2)解的问题。

2.3.2 方程求解

为了求基本方程的解 我们采用现代流体力学中‘数量级观点’的方法。通过观察发现: b 随 x 增加而增加 表示为 $b \propto x^m$ 。

u_{\max} 随 x 增加而减小, 表示为 $u_{\max} \propto \frac{1}{x^n}$, 因此

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &\propto \frac{u_{\max}^2}{x} \propto \frac{x^{-2n}}{x} \propto x^{-2n-1} \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(-\int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \propto \frac{u_{\max}^2}{x} \propto \frac{1}{x^{2n+1}} = x^{-2n-1} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho u^2}{\rho}\right) \propto \frac{u_{\max}^2}{b} = \frac{x^{-2n}}{x^m} = x^{-2n-m} \end{aligned}$$

代入式(2-1), 得 $x^{-2n-1} + x^{-2n-1} = x^{-2n-m}$ 。

因为等式两边的次数一样, 因此 $m = 1$ 。

对式(2-5)应用同样的论点, 并将 $m = 1$ 代入, 得

$$u^2 dy \propto u_{\max}^2 b \propto x^{-2n} x^m = x^{-2n+m}$$

因为动量通量独立于 x , 必须使 $-2n + m = 0$, 即 $n = \frac{1}{2}$ 。

求出 m 和 n 的值之后, 可得

$$b \propto x^m = x; \quad u_{\max} \propto \frac{1}{x^m} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

定义射流雷诺数 R_{jet} 为

$$R_{jet} = \frac{u_{max} b}{\nu} \propto x^{-n} x^m = x^{-\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{1}{2}}$$

即 R_{jet} 与 \sqrt{x} 成正比。

为了回答关于速度分布的问题，以及实际射流维数，我们采用基于速度剖面几何形态相似的假设的半经验方法。

假设在区域 $x > L_0$ ，速度剖面几何形态相似(图 2-2)，即 $\frac{u}{u_{max}} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\xi)$ ，其中 $\xi = \frac{y}{x}c$ 。

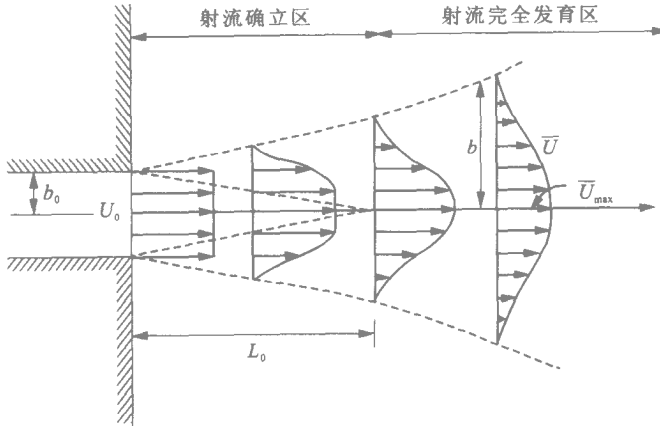


图 2-2 平面射流相似速度剖面的形成

通过观测 速度剖面的形态与高斯曲线类似 即 $f(\xi) = e^{-k\left(\frac{y}{x}\right)^2} = e^{-\left(\frac{y^2}{2c^2 x^2}\right)}$ ，其中 c 由实验确定 并将此式代入(2-5)得

$$2\rho U_0^2 b_0 = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} [u_{max} f(\xi)]^2 \left[x d\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

$$2U_0^2 b_0 = u_{max}^2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\xi) d\xi = u_{max}^2 x I_2$$

其中 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\xi) d\xi$ ，整理得

$$\frac{u_{max}}{U_0} = \sqrt{\frac{2b_0}{x I_2}} \quad (2-6)$$

在潜在的轴线长度范围内，当 $x = L_0$ ， $u_{max} = U_0$

式(2-6)变为

$$L_0 = \frac{2b_0}{I_2} \quad (2-7)$$

当 $x > L_0$ 可以沿射流剖面对局部速度 u 进行积分求得单位宽度射流流速 Q 。

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} u dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{max} f(\xi) dy = u_{max} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = I_1$ 。单位宽度水槽的流量为 $Q_0 = U_0(2b_0)$, 可得

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{u_{\max} x I_1}{2b_0 U_0} = \frac{x I_1}{2b_0} \sqrt{\frac{2b_0}{x I_2}} = \sqrt{\frac{x I_1^2}{2b_0 I_2}} \quad (2-8)$$

据实验结果得 $c_1 = 0.109$; $I_1 = 0.272$; $I_2 = 0.192$ 。将这三个数代入式(2-6)、式(2-7)及式(2-8) 得到下面的公式:

$$\frac{u_{\max}}{U_0} = 2.28 \sqrt{\frac{2b_0}{x}} \quad \text{当 } x > L_0 \quad (2-9)$$

$$L_0 = 10.4b_0 \quad (2-10)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.62 \sqrt{\frac{x}{2b_0}} \quad (2-11)$$

实验证明上面几个等式完全正确, 当满足 $R = \frac{U_0 d}{\nu} > 30$, 其中 d 为水槽高度, 湍流平面射流假设成立。

2.4 轴向对称射流

2.4.1 基本方程

通过一个圆孔注入液体形成圆形射流并且同周围的液体相混合, 可以认为这种情况下的射流是沿纵轴方向对称的。采用与平面射流同样的边界层近似值, 我们发现在圆柱坐标中的运动方程可以简化为一个简单的纵向或 z 向方程:

$$\rho v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \quad (2-12)$$

将 $\tau = \mu(\partial v_z / \partial r)$ 代入上式得
$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} \quad (2-13)$$

连续性方程
$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-14)$$

方程式(2-13)和式(2-14)是对应于平面射流方程式(2-1)与式(2-2)的轴向对称形式, 我们再次计算运动方程两边各项的次数, 得到动量通量为常数的圆形射流的等价方程:

$$2\pi\rho \int_0^{\infty} (\bar{v})^2 r dr = \text{常数} = \rho V_0^2 (\pi d_0^2 / 4) \quad (2-15)$$

式中: V_0 为射流中心流速。

2.4.2 解方程

根据涡流黏滞性 η 概念, 观测到整个射流混合区域涡流黏滞系数为常数。用涡流黏滞系数 η 替换分子黏滞系数 μ 方程(2-12)变为

$$\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right), \quad \epsilon = \eta / \rho \quad (2-16)$$

可通过假设速度剖面几何相似以及下面的边界条件求方程(2-16)与连续方程(2-14)的解为: 当 $r = \infty$ 时 $\bar{v}_z = 0$; 当 $r = 0$ 时 $r \bar{v}_r = 0$; $\partial \bar{v}_z / \partial r = 0$ 。

关于速度分布的解为

$$\frac{\bar{v}_z}{(\bar{v}_z)_{\max}} = \frac{1}{(1 + \bar{v}_z \max r^2 / 8\epsilon z)^2}, \epsilon = 0.00196z \bar{v}_z \max \quad (2-17)$$

因此射流形成区域的流速分布变为

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_z \max} = \frac{1}{(1 + r^2 / 0.016z^2)^2} \quad (2-18)$$

中心流速的纵向变化

$$\frac{\bar{v}_z \max}{V_0} = 6.4 \left(\frac{d_0}{z} \right) \quad (2-19)$$

式中： V_0 为中心流速； d_0 为射流孔径。

方程(2-19)中径向距离 z 可以从距实际射流原点 0.6 的类似几何原点量测(见图 2-3) 据方程(2-19) 当 $z=6.4$ 射流完全形成 因此形成射流区域的距离长度

$$L_0 = 6.4d_0 + 0.6d_0 = 7d_0 \quad (2-20)$$

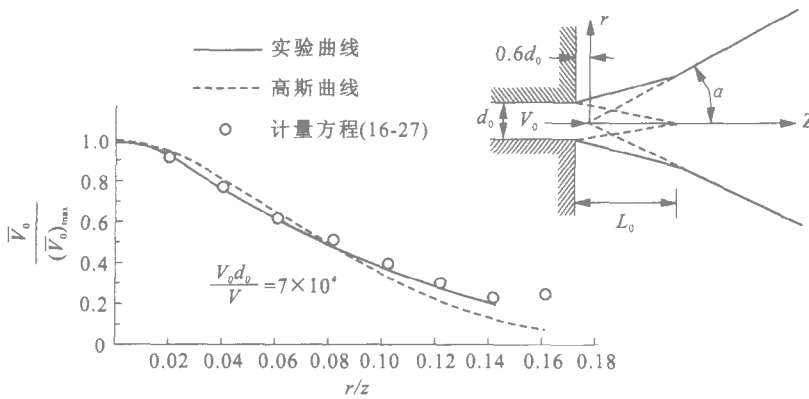


图 2-3 圆形射流的径向速度分布

解式(2-17) 与式(2-19) 组成的方程组 涡流黏滞系数由 $\epsilon = 0.013V_0d_0$ 给出 因此

$$\epsilon / \nu = 0.013(V_0d_0 / \nu) = 0.013R_0 \quad (2-21)$$

因为射流侧面的传播是线性的，传播的角度可以由一个任意给定的宽度求得。沿着直线，平面射流的角度为 6.5° 圆形射流的角度为 5° 。然而 并不能得出这样的结论 所谓的射流边界可以精确地定义。由于流的湍流特性，实际射流界线只具有统计意义。

由圆形射流挟带的流体的量可以通过对产生射流区域的速度剖面积分求得，下面仅给出流速的简单方程：

$$Q = 8\pi\epsilon z \quad (2-22)$$

由式(2-21) 求出 ϵ 得到

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.42 \left(\frac{z}{d_0} \right) \quad (2-23)$$

对高斯曲线进行类似计算 得

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.28 \left(\frac{z}{d_0} \right) \quad (2-24)$$

然而 如图 2-3 所示，后者在圆形射流边缘产生的速度非常小。