

第一章 随机过程的一般概念

§ 1.1 概述

目前采用的海上观测仪器和实验室内的波浪记录仪等能进行快速取样。它们的记录大多是等时间间隔取样的数字记录。由于取样时间间隔比所研究问题的时间尺度短得多，因此在处理时也常将这些离散数据序列看成一连续曲线。例如，测波仪每次观测记录下的一系列波面随时间变化的序列或曲线，称为波面坐标序列或曲线。海流计能同步记录下流速量值序列和流向序列，它们可换算成流速东分量和北分量，并以东分量为实部、北分量为虚部构成一列用来表示矢量序列的复数序列。无论是实数（标量）序列还是复数 矢量 序列都可表示成时间的函数 $x(t)$ 。

有实践经验的人都知道，尽管从通常意义上说观测或实验条件没有什么变化，但每次观测或实验所得序列或曲线都不会重合。若将每次观测用一数字 ζ 来表示（例如 ζ 可以取成观测或实验的序号），于是每次观测可表示成 $x(\zeta, t)$ 。所以，每次观测或实验记录下的结果和以后观测或实验将要记录下的结果合在一起便构成一以时间 t 为变量的函数族，记为 $\mathbf{x}(\zeta, t)$ 。对确定的时间 t ，某次观测（即确定的 ζ ）所得观测值为一确定量。对同一观测时间 t ，不同次的观测 ζ 为变量，得到不同的观测值，可以记为 $\mathbf{x}(\zeta)$ 。 $\mathbf{x}(\zeta)$ 在观测前是无法确切知道的。图 1.1.1 所示为实验室风浪实验波面坐标记录曲线。

根据随机过程理论，上述函数族 $\mathbf{x}(\zeta, t)$ 可抽象成一随机过程。一确定的即某一次观测结果，称为这一随机过程的一次现实或一个样本函数 $x(\zeta, t)$ 。某一时刻各次观测所得值的集合称为一个随机变量，所有 ζ 的集合 S 称为样本空间。下面更严格地引入一些随机过程理论中常用的术语。

随机过程 设有以 S 为样本空间的试验 ζ ，每一试验结果 ζ_i 产生一个随时间变化的实或复的函数值 $x(t, \zeta_i)$ 对所有的试验形成一函数族 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ ，称此函数族为随机过程。它是两个变量 t 和 ζ 的函数。 ζ 落在样本空间 S 中，而 t 在实数集中取值。遵循习惯用法，用粗体字母 $\mathbf{x}(t, \zeta)$, $\mathbf{y}(t, \zeta)$ 等表

示随机过程。为书写简便，也常省略 ζ 而写成 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 等。这时仍应将它们理解为是 ζ 与 t 的函数。

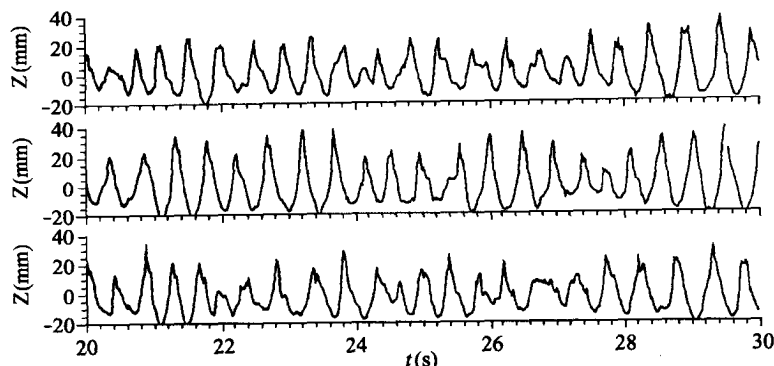


图 1.1.1 实验室风浪实验波面坐标记录曲线（青岛海洋大学物理海洋实验室提供）

随机函数 变量 t 既可代表时间坐标，也可代表某一空间坐标。当 t 为一空间坐标（如沿铅直方向或水平方向）时，随机过程也称为随机函数。

现实（样本函数）对于作为随机过程的一系列试验中之某一次试验 ζ 是确定的，因而 $x(t, \zeta)$ 就仅是 t 的函数，它称为随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 的一次现实或一个样本函数（或样本曲线），记为 $x(t, \zeta)$ 。通常样本函数是极其复杂的，很难用数学式子表示出来，即使知道了 $t < t_1$ 时的 $x(t)$ ，也很难确切地预报出 $t > t_1$ 时的 $x(t)$ 。例如，风浪观测记录中的波面坐标曲线。然而，有时样本曲线也可能是相当简单的，例如若在波浪槽中做一系列规则波实验，其频率及初始相位在这一系列的实验中保持不变，只有波高在每次实验开始时随机地设定，在实验过程中不再变更，于是此过程可用简单的数学式子描述为

$$\mathbf{x}(t, \zeta) = \mathbf{a}(\zeta) \sin(\omega t + \theta) \quad (1.1.1)$$

因而对每一次实验（ ζ 确定），此随机过程之现实就成了一条简单的正弦曲线。

时间序列 如前所述，观测记录通常是一等时间间隔取样的数列或在作资料处理时由记录曲线离散化成这样的数列，在数学上称之为时间序列。泛泛地说，时间序列可以是确定性的，也可以是随机的。然而，在资料分析中所指的一般是随机序列。所以，随机过程的现实（样本函数）通常都表示成时间序列的形式。与前面所述相同，记录也可能是在空间某一方向上的等距离间隔采样获得而构成的一空间序列。在数学上，空间序列的处理方法与时间序列是一样的。

截口 当 t 确定时, $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 就仅是 ζ 的函数, 即它退化为随机变量, 此随机变量 $\mathbf{x}(\zeta)$ 称为随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 的一个截口或一个状态。

总体 所有试验结果的集合 S 称随机过程的总体。

随机过程的相等 若随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 和 $\mathbf{y}(t, \zeta)$ 对任意 ζ_i 存在

$$\mathbf{x}(t, \zeta_i) = \mathbf{y}(t, \zeta_i)$$

则称这两个随机过程相等, 记成 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ 。

随机过程的函数

$$\mathbf{u}(t) = f[\mathbf{x}(t)] \quad (1.1.2)$$

仍为一随机过程。例如, 在海洋调查中用 CTD 剖面仪获得一系列温深剖面 $T(z, \zeta)$ 是一随机过程 (或随机函数), 它在 z 方向的导数 $\frac{\partial T}{\partial z}$ 称为垂向温度梯度, 自然是 T 的函数, 也是随机过程 (或随机函数)。

复随机过程 若实随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 分别作实部与虚部构成另一随机过程 $\mathbf{z}(t)$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t) \quad (1.1.3)$$

则 $\mathbf{z}(t)$ 为一复随机过程。例如, 用海流计记录下一列流速和一系列流向序列, 多次观测得一族流速序列 $\mathbf{w}(t)$ 和一族流向序列 $\theta(t)$, 它们都可视为随机过程。由这两个随机过程换算出的流速东分量 $\mathbf{u}(t)$ 和北分量 $\mathbf{v}(t)$ 亦是随机过程, 而且是实过程。由东分量 $\mathbf{u}(t)$ 作实部、北分量 $\mathbf{v}(t)$ 作虚部构成一表示矢量的复过程

$$\mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t) \quad (1.1.4)$$

这在海洋资料处理中是常用的。

多维过程 上述 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 为一维过程, 它们在一起构成一个二维过程, 因而复过程 $\mathbf{z}(t)$ 在这一意义上说是一个二维过程。若将多次观测所得的温度、盐度、密度、流速、流向等一维过程结合在一起则构成一多维随机过程。

§ 1.2 概率密度函数

一阶分布函数 讨论一实随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 。如前所述, 对于任一确定的时间 t , $\mathbf{x}(t, \zeta) = \mathbf{x}(\zeta)$ 为一随机变量, 因而它有概率分布函数

$$F(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} \quad (1.2.1)$$

以及概率密度函数 $f(x)$ 。当 $F(x)$ 为连续函数时, $f(x)$ 可表示成

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x) \quad (1.2.2)$$

推广到 t 为变量的情况, 即随机过程 $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 之情况, 它也有概率分布函数 $F(x, t)$ 和概率密度函数 $f(x, t)$ 。一般情况下, 它们不但是 x 的函数, 也是 t 的函数, 即

$$F(x, t) = P\{\mathbf{x}(t) \leq x\} \quad (1.2.3)$$

当 $F(x, t)$ 为 x 的连续函数时,

$$f(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \quad (1.2.4)$$

与 $F(x)$, $f(x)$ 一样 $F(x, t)$, $f(x, t)$ 不是随机函数而是确定性函数, 是随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的统计量。图 1.2.1 为概率密度函数曲线的实例。

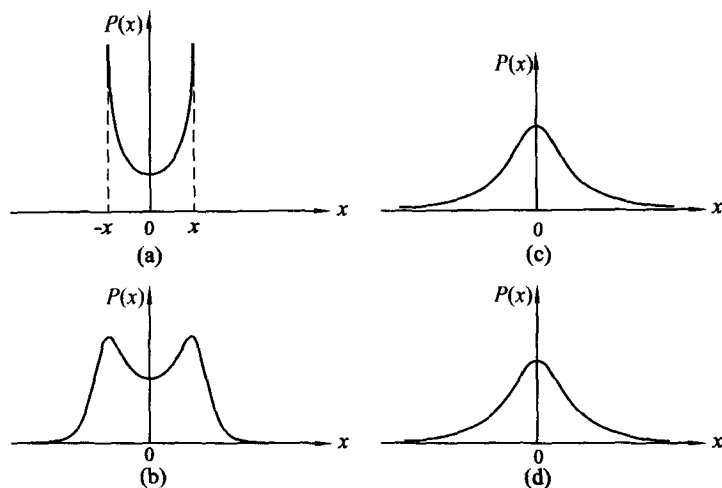


图 1.2.1 概率密度函数举例 [引自 [26]]

(a) 正弦波 (b) 正弦波加噪声 (c) 窄带噪声 (d) 宽带噪声

在实际工作中常用出现频数分布来近似概率分布。在大样本时, 这种作法具有较高的精度。假设进行了 n 次观测, 每次观测获得一样本曲线 $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$)。若以 $n_t(x)$ 表示在 t 时刻 n 次观测值中纵坐标 $\mathbf{x}$ 不超过某一值 x 的次数, 当 n 足够大时, 可以将 $F(x, t)$ 近似地表示成

$$F(x, t) = \frac{1}{n} n_t(x) \quad (1.2.5)$$

二阶分布函数 给定时刻 t_1 和 t_2 , 随机过程分别有截口 $\mathbf{x}(t_1)$ 和 $\mathbf{x}(t_2)$, 它们的联合分布称为此随机过程的二阶分布函数, 记为 $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2\} \quad (1.2.6)$$

当 $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 是 x_1, x_2 的连续函数时, 其相应的密度函数为

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (1.2.7)$$

n 阶分布函数 同样可以定义随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的 n 阶分布函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \dots, \mathbf{x}(t_n) \leq x_n\} \quad (1.2.8)$$

以及 n 阶密度函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (1.2.9)$$

概率密度函数或概率分布函数的主要用途为对资料序列各截口的取值作概率描述。只有当随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 对任意的 n 及 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 之概率分布函数 (1.2.8) 都已知时 此随机过程才统计地完全确定了。所以 随机过程的分布函数或密度函数具有根本的重要性。

§ 1.3 单一实随机过程的各阶矩

一阶原点矩 (均值) 随机过程的另一类重要统计量为它的各阶矩, 本节仅讨论实过程的各阶矩。

与随机变量相似, 随机过程也有均值, 它是每个截口处的总体平均, 即

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= E\{\mathbf{x}(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

式中算子 $E\{\}$ 表示总体平均。由上式看出, 均值即为 $\mathbf{x}(t)$ 的一阶原点矩。经总体平均后所得均值不再是随机的, 而是时间的确定性函数, 它描述了此过程的统计平均状态。例如, 海洋调查中多次下放 CTD 探头, 获得多条温深曲线, 一般地它们都非“光滑”曲线而且互不重合, 以深度变量替换式 (1.3.1) 中的时间变量 t 可以将每一条温度-深度曲线看成随机过程的一条样本曲线 所有观测曲线的集合构成一随机过程。将同一层截口的历次观测到的所有温度值取平均 (总体平均) 就得到一条较“光滑”的温度-深度曲线, 此曲线代表的就是这一过程的均值, 它描述了海水温度随深度变化的平均特性。

二阶原点矩 (自相关) 随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的截口 t_1 和 t_2 之取值的乘积作总体平均得到此随机过程关于此两截口的二阶原点矩

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

它也称为随机过程截口 t_1 和 t_2 之间的自相关。图 1.3.1 表示了这种运算过程。一般地它是 t_1, t_2 的函数。当 $t_1 = t_2$ 时自相关 $R(t_1, t_2)$ 变成均方函数

$$\begin{aligned}
 R(t, t) &= E\{\mathbf{x}^2(t)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx
 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

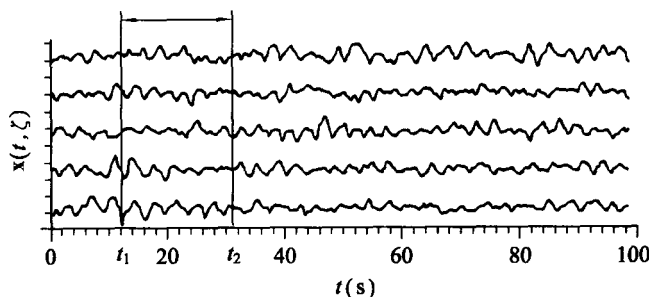


图 1.3.1 自相关运算的截口

二阶中心矩（自协方差）两截口取值的二阶中心矩定义为

$$\begin{aligned}
 C(t_1, t_2) &= E\{[\mathbf{x}(t_1) - \mu(t_1)][\mathbf{x}(t_2) - \mu(t_2)]\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu(t_1)][x_2 - \mu(t_2)] f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

它又称为随机过程的自协方差，由式 (1.3.2) 和 (1.3.4) 可得

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2) \quad (1.3.5)$$

当 $t_1 = t_2$ 时

$$\begin{aligned}
 C(t, t) &= R(t, t) - \mu^2(t) \\
 &= \sigma_{\mathbf{x}}^2(t)
 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$\sigma_{\mathbf{x}}^2(t)$ 称为随机过程的方差 $\sigma_{\mathbf{x}}(t)$ 称为标准差。

可以用下面的统计量来衡量两截口的取值的相关程度

$$R(t_1, t_2) / \sqrt{R(t_1, t_1)R(t_2, t_2)} \text{ 和 } C(t_1, t_2) / \sqrt{\sigma_{\mathbf{x}}^2(t_1)\sigma_{\mathbf{x}}^2(t_2)} \quad (1.3.7)$$

它们分别为标准化自相关和标准化自协方差，在 $[-1, 1]$ 之间取值 是描述两截口取值的线性相关程度的统计量。它们的绝对值越大，表示统计相关程度越高；负值表示负相关。

n 阶原点矩和 n 阶中心矩

可用同样方式定义高阶原点矩和高阶中

心矩。 n 阶原点矩为

$$E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\cdots\mathbf{x}(t_n)\} \quad (1.3.8)$$

n 阶中心矩为

$$E\{[\mathbf{x}(t_1) - \mu(t_1)][\mathbf{x}(t_2) - \mu(t_2)]\cdots[\mathbf{x}(t_n) - \mu(t_n)]\} \quad (1.3.9)$$

由定义式 (1.3.2) 和 (1.3.5) 可以得到实过程的自相关与自协方差的一个基本性质, 即

$$R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1) \quad (1.3.10)$$

$$C(t_1, t_2) = C(t_2, t_1) \quad (1.3.11)$$

自相关 $R(t_1, t_2)$ 自协方差 $C(t_1, t_2)$ 均方值 $R(t, t)$ 及方差 $\sigma_x^2(t)$ 在物理海洋学资料分析中有广泛的应用。例如, 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 为水位的时间曲线总体, 则均方值正比于位能高低, 方差正比于波动位能大小。若 $\mathbf{x}(t)$ 为描述速度量值的随机过程, 则其方差正比于波动动能, 均方值正比于总动能。由自相关和均方函数构成的标准化自相关以及由自协方差和方差构成的标准化自协方差式 (1.3.7), 则可能揭示出资料中隐含的周期分量或准周期特性。例如, 由验潮仪记录下的水位曲线构成的随机过程, 其标准化自相关或标准化自协方差会在 $(t_1 - t_2)$ 等于潮周期时呈现出极大值。

由于自相关与自协方差的这一特性, 可以用历史资料统计地预报未来情况, 以后还将用它们来作自谱计算。

§ 1.4 复随机过程的矩及两个过程的交叉矩

对于复过程 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$ 有如下定义:

均值

$$\begin{aligned} \mu_z(t) &= E\{\mathbf{z}(t)\} \\ &= E\{\mathbf{x}(t)\} + iE\{\mathbf{y}(t)\} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

自相关 即二阶原点矩)

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{z}(t_1)\mathbf{z}^*(t_2)\} \\ &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} + E\{\mathbf{y}(t_1)\mathbf{y}(t_2)\} \\ &\quad - i[E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)\} - E\{\mathbf{x}(t_2)\mathbf{y}(t_1)\}] \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

式中, “*” 表示共轭 (下同) 于是可以得出

$$R_z(t_1, t_2) = R_z^*(t_2, t_1) \quad (1.4.3)$$

图 1.4.1 给出了这一运算的示意图。

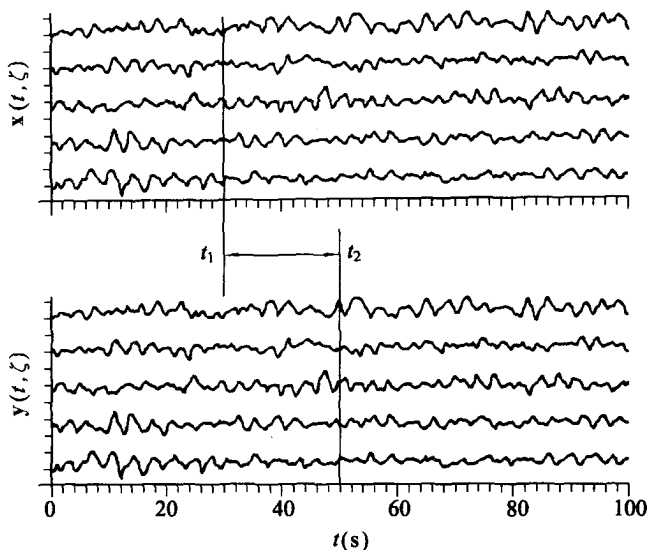


图 1.4.1 交相关的运算

自协方差 (即二阶中心矩)

$$\begin{aligned} C_z(t_1, t_2) &= E\{[z(t_1) - \mu_z(t_1)][z^*(t_2) - \mu_z^*(t_2)]\} \\ &= R_z(t_1, t_2) - \mu_z(t_1)\mu_z^*(t_2) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

同样可得出

$$C_z(t_1, t_2) = C_z^*(t_2, t_1) \quad (1.4.5)$$

当 $z(t)$ 之虚部 $y(t)$ 为零时, 以上各式退化为上一节中所述的实过程的相应式子。

交相关和交协方差 对于复随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 可以定义出它们的交叉矩 即交相关 $R_{xy}(t_1, t_2)$ 和交协方差 $C_{xy}(t_1, t_2)$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y^*(t_2)\} \quad (1.4.6)$$

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E\{[x(t_1) - \mu_x(t_1)][y^*(t_2) - \mu_y^*(t_2)]\} \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y^*(t_2) \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

同理, 可以定义两个过程的 $n+m$ 阶联合矩为

$$E\{x(t_1)x(t_2)\cdots x(t_n)y^*(t_1')y^*(t_2')\cdots y^*(t_m')\} \quad (1.4.8)$$

不相关 若对于任意的 t_1 和 t_2 过程 $x(t), y(t)$ 满足

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= \mu_x(t_1)\mu_y^*(t_2) \\ \text{即} \quad C_{xy}(t_1, t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

则称 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{y}(t)$ 互不相关。

正交 若对于任意的 t_1 和 t_2 过程 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 满足

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0 \quad (1.4.10)$$

则称 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{y}(t)$ 正交。

独立 如果对于任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 和 $t'_1, t'_2, \dots, t'_n$, 随机变量群 $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ 和随机变量群 $\mathbf{y}(t'_1), \mathbf{y}(t'_2), \dots, \mathbf{y}(t'_n)$ 彼此独立 则称随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{y}(t)$ 彼此独立。

以后将会看到, 交协方差和交相关有广泛而重要的用途。

标准化交相关和标准化交协方差 与自相关和自协方差的处理相似, 可以写出标准化交相关和标准化交协方差的定义式:

$$\frac{R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{\mathbf{x}}(t_1, t_1)R_{\mathbf{y}}(t_2, t_2)}} \text{ 及 } \frac{C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1, t_1)C_{\mathbf{y}}(t_2, t_2)}} \quad (1.4.11)$$

它们可以用来衡量随机过程 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 之相关程度。若上述量值高, 则两个过程相关程度高。

§ 1.5 平稳随机过程

有一类随机过程的理论及与之相应的处理问题的方法在物理海洋学中得到广泛的应用, 它就是平稳随机过程。根据不同条件, 它有两种定义, 一种为狭义 (严格意义) 平稳过程, 另一种为广义 (弱) 平稳过程。

狭义平稳过程 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的统计量不受 t 的变化之影响, 即对于任意的 $\epsilon, \mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}(t+\epsilon)$ 有相同的统计量, 则称此随机过程为狭义的平稳过程。

由上述定义可推知: 对于任意的 ϵ 平稳过程 $\mathbf{x}(t)$ 的 n 阶密度函数必须满足

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \epsilon, t_2 + \epsilon, \dots, t_n + \epsilon) \quad (1.5.1)$$

进而由上式可得如下一些结论。

狭义平稳过程的一阶密度函数与 t 无关 即

$$f(x, t) = f(x) \quad (1.5.2)$$

平稳过程的均值为常量

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \mu = \text{常量} \quad (1.5.3)$$

二阶概率密度函数必须满足

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (1.5.4)$$

于是其自相关仅取决于 $\tau = t_1 - t_2$ 而与 t_1, t_2 之取值无直接关系 即

$$R(\tau) = E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}(t)\} \quad (1.5.5)$$

进而可得

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (1.5.6)$$

联合平稳 对于任意的 ϵ 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 之联合统计量与 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t + \epsilon)$ 之联合统计量相同 则称 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 是联合(狭义)平稳的。

复平稳过程 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 为联合平稳过程 则称

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t) \quad (1.5.7)$$

为复平稳过程。

容易地 复平稳过程 $\mathbf{z}(t)$ 之均值为

$$\mu_z = \mu_x + i\mu_y$$

自相关为

$$R_z = E\{\mathbf{z}(t + \tau)\mathbf{z}^*(t)\}$$

与式(1.5.5)相似 平稳过程 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 的交相关具有如下特性:

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{y}^*(t)\} \quad (1.5.8)$$

k 阶平稳过程 若对于 $n \leq k$ 式(1.5.1)成立 则称 $\mathbf{x}(t)$ 为 k 阶(狭义)平稳过程。

其实,上述定义中的条件 $n \leq k$ 可以改为 $n = k$ 因为 k 阶密度函数可以完全决定低于 k 阶的密度函数。

以上所述为狭义平稳过程的定义和一些最基本的性质。由于狭义平稳过程的限制过严,实际工作中不易满足,而且大量的工作仅需要应用过程的第一、二阶统计特性,于是引入要求条件宽松得多的广义平稳过程的概念。

广义平稳过程 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的期望值为常量,而且自相关仅是 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数 即

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \mu = \text{常量} \quad (1.5.9)$$

$$E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}^*(t)\} = R(\tau) \quad (1.5.10)$$

则称 $\mathbf{x}(t)$ 为广义平稳过程或弱平稳过程。

二阶狭义平稳过程必然是广义平稳过程,然而,广义平稳过程却不一定是二阶狭义平稳过程。因为广义平稳过程不涉及概率密度函数,因而并不一定满足 $n \leq 2$ 时之式(1.5.1)或(1.5.4)。

根据实际工作的需要,还可定义其他类型的平稳过程。例如

渐近平稳过程 若存在极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon) \quad (1.5.11)$$

则称 $\mathbf{x}(t)$ 为渐近狭义平稳过程。

区间内平稳过程若 $\mathbf{x}(t)$ 在 $T_1 < \varepsilon < T_2$ 的区间内满足

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon) \quad (1.5.12)$$

则称 $\mathbf{x}(t)$ 为在时间区间 $[T_1, T_2]$ 内的狭义平稳过程。

若每次风浪观测都从风起时开始，一直到风浪充分成长之后较长时间为止，显然这些记录不能构成一平稳过程，但它们可以构成一渐近平稳过程，因它们满足式 (1.5.11)。

若在风浪槽实验中，每次观测都记录下从风起至风浪充分成长再到风停风浪消衰的全过程。它们自然不能构成平稳过程，但在充分成长期间 (T_1, T_2) 它们是平稳过程。

用类似的方法可以定义渐近广义平稳过程和某时间区间内的广义平稳过程。

在这里再介绍一种极为有用的正态过程及其在平稳条件下的特性。

正态过程 若随机变量 $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ 对任意的 n 及 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是联合正态的，则随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 是正态的。

要注意，不仅 $\mathbf{x}(t)$ 一阶密度函数 $f(x, t)$ 是正态的，而且任意阶密度函数也为正态的，随机过程才是正态的。

正态过程的一个良好特性是它的统计量完全由均值 $\mu(t)$ 和自相关 $R(t_1, t_2)$ 或自协方差 $C(t_1, t_2)$ 所决定。例如，一阶密度函数为

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(t, t)}} \exp \left\{ - [x - \mu(t)]^2 / [2C(t, t)] \right\} \quad (1.5.12)$$

因而，如果正态过程 $\mathbf{x}(t)$ 是广义平稳的，则它也一定是狭义平稳的。

§ 1.6 随机过程的变换 (I)

海洋观测仪器如 CTD 仪，其压强、电导率和温度探头输入到处理器中的都是电学量，再由电学量转换成物理量。例如，设压强探头输出的电学量为 V ，一般地 V 与压强 P 具有线性关系，即

$$P = \alpha V$$

式中 α 为转换系数。当探头在水中不断沉降时， V 就随时间变化，即 $V = V(t)$ ，于是得到压强随时间变化的 $P(t)$ ：

$$P(t) = \alpha V(t) \quad (1.6.1)$$

如果每次观测给出不同的电学量 $V(t, \zeta)$ ，则会得到不同的 $P(t, \zeta)$ ，它们仍

满足

$$P(t, \zeta) = aV(t, \zeta) \quad (1.6.2)$$

若将 $V(t, \zeta)$, $P(t, \zeta)$ 分别视为随机过程 $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ 的样本函数 则随机过程 $\mathbf{V}(t)$ 与 $\mathbf{P}(t)$ 也应满足式 (1.6.1)。式 (1.6.1) 或 (1.6.2) 就是第一节中所定义的随机过程的函数之简单例子。根据下面将给的定义, 它也是随机过程的变换或随机过程的系统之简单例子。

随机过程的变换 根据某种规则由随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 确定出另一随机过程 $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = T[\mathbf{x}(t)] \quad (1.6.3)$$

则称它将 $\mathbf{x}(t)$ 变换到 $\mathbf{y}(t)$ 算子 T 规定了这一变换的规则。

若将在风浪槽实验中某一点处的风生成浪的过程看成一种变换或一个系统 T , 而将观测得的风速序列曲线看成输入 $\mathbf{v}(t)$ 、波面坐标序列曲线看成输出 $\mathbf{z}(t)$ 则构成符合定义的变换或系统, 当然这是一种理想化的简单模型, 实际情况要复杂得多, 不可能用这样一个简单模型来描述。

一个变换 若输入量相等时输出量也相等 即

$$\mathbf{x}(t, \zeta_1) = \mathbf{x}(t, \zeta_2) \quad (1.6.4)$$

且

$$\mathbf{y}(t, \zeta_1) = \mathbf{y}(t, \zeta_2) \quad (1.6.5)$$

则称这变换为确定性 即非随机变换。

一个变换 若输入量相等时输出量不等 即

$$\mathbf{x}(t, \zeta_1) = \mathbf{x}(t, \zeta_2) \quad (1.6.6)$$

但

$$\mathbf{y}(t, \zeta_1) \neq \mathbf{y}(t, \zeta_2) \quad (1.6.7)$$

则称此变换为随机变换。

前面关于 CTD 观测的例子中, 若仪器性能稳定, 没有零点漂移等影响, 则为一确定性变换; 若探头和电子元件性能不稳定, 存在随机的零点漂移等影响 则构成一随机变换。若风浪试验记录符合关系式 (1.6.4) 与 (1.6.5) 则为确定性变换 若符合关系式 (1.6.6) 与 (1.6.7) 则为随机变换。

从数学上说, 若构成此变换的方程式所含系数或参数都是确定性的, 则变换是确定性的; 反之, 若所含系数或参数中含有随机因数, 则变换是随机的。以后我们将仅讨论确定性系统。

原则上 对于给定的变换 T 其输出 $\mathbf{y}(t)$ 的统计特性可以由输入的统计特性确定。但实际上 即使对确定性系统 这也是个很复杂且困难的问题。下面仅讨论两种较简单但很重要的情况, 即时间无关系统和线性系统。

时间无关系统 若系统

$$\mathbf{y}(t) = g[\mathbf{x}(t)] \quad (1.6.8)$$

的变换 g 中不含 t 即 $g(x)$ 仅是 x 的函数, 则称此系统为时间无关系统。

在给定时刻 $t=t_1$ 输出 $y(t_1)$ 仅由输入 $x(t_1)$ 决定, 于是此系统有如下特性, 即对任意的 ϵ 有

$$y(t+\epsilon) = g[x(t+\epsilon)] \quad (1.6.9)$$

对于任意一个截面, 可以得到随机变量 x 及其函数 y 之性质, 即若由 $y=g(x)$ 求出 x 的全部实根为

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1.6.10)$$

则 y 的概率密度函数 $f_y(y)$ 可由下式确定:

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_x(x_n)}{|g'(x_n)|} + \dots \quad (1.6.11)$$

此方法同样可用来求随机过程 $y(t)$ 之密度函数。

与用随机变量 x 的联合密度函数 $f_x(x_1, x_2)$ 求函数 y 的联合密度函数 $f_y(y_1, y_2)$ 的方法相同, 可由 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 之联合密度函数 $f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 求出 $y(t_1)$ 和 $y(t_2)$ 的联合密度函数 $f_y(y_1, y_2; t_1, t_2)$ 。用同样方法可求出更高阶的输入和输出联合密度函数。

在随机变量的函数中采用的方法还可直接用来求随机过程的变换之均值与自相关:

$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x, t) dx \quad (1.6.12)$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)g(x_2)f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.6.13)$$

定理 若输入 $x(t)$ 是狭义平稳过程 (或 k 阶平稳过程) 则输出也是狭义平稳过程 (或 k 阶平稳过程)。

证明 要确定输出的 k 阶密度函数 (k 为任意的) 需先求解方程组

$$y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots, y_k = g(x_k) \quad (1.6.14)$$

由于变换的雅可比式为

$$J = g'(x_1) \dots g'(x_n) \neq 0 \quad (1.6.15)$$

因此可假设式 (1.6.14) 具有惟一的解 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 。于是, 应用随机变量的函数中所用之方法可以得出

$$f_y(y_1, \dots, y_k; t_1, \dots, t_k) = \frac{f_x(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)}{|g'(x_1)| \dots |g'(x_k)|} \quad (1.6.16)$$

由于式 (1.6.14) 中没出现时间变量 t , 因此 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 仅与 $y_1, y_2, \dots, y_k$ 有关, 式 (1.6.16) 也如此。并且由于 $x(t)$ 是一平稳过程, 所以式 (1.6.16) 中的 $t_1, \dots, t_k$ 均时移一任意时段 ϵ 即用 $t_1+\epsilon, t_2+\epsilon, \dots, t_k+\epsilon$ 代替

$t_1, t_2, \dots, t_k$ 时, 结果不变。于是式 (1.6.16) 左侧的结果也不变, 由此得出 $y(t)$ 为平稳过程。

然而必须注意, 由于在证明中采用了概率密度函数, 而非二阶矩, 上述定理仅对狭义平稳过程成立, 对广义平稳过程则不成立, 即当输入 $x(t)$ 为广义平稳过程时 输出 $y(t)$ 不一定是广义平稳过程。

§ 1.7 随机过程的变换 (II)

由于线性变换的特殊重要性, 以后还要作进一步的研究。在这里, 简要地介绍线性变换的意义、均值和自相关的导出。

线性变换 若对随机过程 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 及任意的常量或随机变量 a_1 和 a_2 , 有

$$L[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 L[x_1(t)] + a_2 L[x_2(t)] \quad (1.7.1)$$

则称算子 L 为线性变换。若 L 与 ζ 无关 (确定性系统) 则称算子 L 为确定性的线性变换。

若

$$y(t) = L[x(t)] \quad (1.7.2)$$

对于任意的 ϵ 有

$$y(t + \epsilon) = L[x(t + \epsilon)] \quad (1.7.3)$$

则称 L 为时间无关线性系统。

以下讨论的线性系统都仅限于确定性、时间无关线性系统。

均值 线性系统输出的均值等于输入的均值之线性变换, 即

$$E\{y(t)\} = L[E\{x(t)\}] \quad (1.7.4)$$

它可以通过相对频率来证明。

证明

$$y(t, \zeta_i) = L[x(t, \zeta_i)] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.7.5)$$

$$\begin{aligned} E\{y(t)\} &\approx \frac{1}{n} [y(t, \zeta_1) + \dots + y(t, \zeta_n)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L[x(t, \zeta_i)] \\ &= L\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t, \zeta_i)\right] \\ &\approx L[E\{x(t)\}] \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

相关和高阶矩 线性变换 $y(t) = L[x(t)]$ 有如下性质:

$$R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = L_{t_2}[R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2)] \quad (1.7.7)$$

$$R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = L_{t_1}[R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2)] \quad (1.7.8)$$

$$R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = L_{t_1}L_{t_2}[R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2)] \quad (1.7.9)$$

$$E\{\mathbf{y}(t_1)\cdots\mathbf{y}(t_n)\} = L_{t_1}\cdots L_{t_n}[E\{\mathbf{x}(t_1)\cdots\mathbf{x}(t_n)\}] \quad (1.7.10)$$

式中 L_{t_1} 表示线性运算时将 t_1 视为变量而将 t_2 等视为参量, L_{t_2} 表示线性运算时将 t_2 视为变量而将 t_1 等视为参量。证明从略。

在时间无关变换中, 输出的 k 阶密度函数可用输入的 k 阶密度函数确定。但在线性变换中这性质不成立。然而对于线性变换, 输出的 k 阶矩可由输入的相应的矩表示出来, 但这在一般的时间无系统中不一定成立。

平稳性 若时间无线性系统的输入 $\mathbf{x}(t)$ 是狭义(广义)平稳过程, 则其输出 $\mathbf{y}(t)$ 也是狭义(广义)平稳过程。

证明 根据时间无线性系统的定义, $\mathbf{y}(t+\epsilon)$ 与 $\mathbf{x}(t+\epsilon)$ 之关系式与 $\mathbf{y}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t)$ 的关系式相同, 又根据狭义平稳过程定义, $\mathbf{x}(t+\epsilon)$ 与 $\mathbf{x}(t)$ 具有相同的统计特征, 于是证明了 $\mathbf{y}(t)$ 的统计特性与时间无关, 即 $\mathbf{y}(t)$ 为狭义平稳过程。

设 $\mathbf{x}(t)$ 为广义平稳过程

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \mu_{\mathbf{x}}$$

根据线性变换定义

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{y}(t)\} &= L[E\{\mathbf{x}(t)\}] \\ &= L[\mu_{\mathbf{x}}] \\ &= \mu_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

它与时间无关。

又因 $\mathbf{x}(t)$ 为广义平稳过程, 有

$$R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau), \tau = t_1 - t_2 \quad (1.7.12)$$

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2) &= L_{t_2}[R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2)] \\ &= L_{t_2}[R_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)] \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

所以有

$$R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(\tau) \quad (1.7.14)$$

同理得

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_2) &= L_{t_1}[R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2)] \\ &= L_{t_1}[R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(\tau)] \\ &= R_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(\tau) \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

所以 $y(t)$ 为广义平稳过程。

1.8 随机过程的连续性

在以后的研究中,我们会经常涉及到随机过程(对时间)的导数或积分,与确定性的函数一样,这是求极限的运算。然而对随机过程而言,此极限运算中包含了随机变量,于是如何定义随机过程的连续和微分就含有新的内容了。

读者可能会认为,只要随机过程的每一样本曲线对 t 连续、可微或可积,则对此随机过程就连续、可微或可积了。这当然没有错,然而这一条件太苛刻了,在处理随机过程问题时不一定能满足。于是引入其他意义的连续、可微或可积的定义,也就是以概率 1 和在均方意义下连续、可微或可积。

为了叙述方便,先引入一个随机序列收敛的定义,而后再进行随机过程问题的讨论。

随机序列的收敛性 对于随机序列

$$\mathbf{x}_n(\zeta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8.1)$$

若其极限

$$\lim \mathbf{x}_n(\zeta) = \mathbf{x}(\zeta) \quad (1.8.2)$$

存在的概率为 1 即

$$P\{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}\} = 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.8.3)$$

则称随机序列 $\mathbf{x}_n(\zeta)$ 以概率 1 收敛于 $\mathbf{x}(\zeta)$ 。

若

$$E\{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|^2\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.8.4)$$

则称随机序列 $\mathbf{x}_n(\zeta)$ 在均方意义下收敛于 $\mathbf{x}(\zeta)$ 。

与随机序列收敛相应,随机过程的连续也可以作两种相应的定义。

连续 随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 若对几乎所有的试验 ζ 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(t + \epsilon) = \mathbf{x}(t) \quad (1.8.5)$$

成立,即上式不成立的概率为 0 则称 $\mathbf{x}(t)$ 以概率 1 连续。

若

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E\{[\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)]^2\} = 0 \quad (1.8.6)$$

则称 $\mathbf{x}(t)$ 在 t 处以均方意义连续。

以后若无特殊说明,随机过程的连续都是指在均方意义下的连续。

由于

$$\begin{aligned} & E\{[\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)]^2\} \\ &= R(t + \tau, t + \tau) - R(t, t + \tau) - R(t + \tau, t) + R(t, t) \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

因此 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的自相关 $R(t_1, t_2)$ 在 $t_1 = t_2 = t$ 时连续 则 $\mathbf{x}(t)$ 在 t 处在均方意义下连续; 若 $R(t_1, t_2)$ 在任意的 $t_1 = t_2 = t$ 时连续 则 $\mathbf{x}(t)$ 对任意的 t 在均方意义下连续。

定理 1 若随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 连续 则它的期望值必定连续 即若

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E\{\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)\}^2 = 0 \quad (1.8.8)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E\{\mathbf{x}(t + \tau)\} = E\{\mathbf{x}(t)\} \quad (1.8.9)$$

证明 设 $\mathbf{z}$ 为随机变量 由于

$$\sigma_z^2 = E\{\mathbf{z}^2\} - E^2\{\mathbf{z}\} \quad (1.8.10)$$

所以有

$$E\{\mathbf{z}^2\} = \sigma_z^2 + E^2\{\mathbf{z}\} \geq E^2\{\mathbf{z}\} \quad (1.8.11)$$

再设

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t) \quad (1.8.12)$$

于是

$$E\{[\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)]^2\} \geq E^2[\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)] \quad (1.8.13)$$

又因是连续的, 所以当 $\tau \rightarrow 0$ 时上式左侧极限为 0 那么其右侧极限也应为 0 且开方后也为 0 得

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E\{\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)\} = 0 \quad (1.8.14)$$

即

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E\{\mathbf{x}(t + \tau)\} = E\{\mathbf{x}(t)\} \quad (1.8.15)$$

由此定理可得出如下结论: 均方连续的随机过程, 取极限的运算和取均值的运算可互换运算顺序。

定理 2 平稳过程连续的充分必要条件是 其自相关 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续。

证 明 因 $\mathbf{x}(t)$ 为平稳过程, 故其自相关为

$$R(\tau) = E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}(t)\} \quad (1.8.16)$$

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)]^2\} &= E\{\mathbf{x}(t + \tau)^2 + \mathbf{x}(t)^2 - 2\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}(t)\} \\ &= 2E\{R(0) - R(\tau)\} \end{aligned} \quad (1.8.17)$$

若在 $\tau = 0$ 处 $R(\tau)$ 连续 则上式取 $\tau \rightarrow 0$ 之极限得 0。所以 只要 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续 即可得平稳过程 $\mathbf{x}(t)$ 连续。

上面的推导同样可得出: 只要平稳过程 $\mathbf{x}(t)$ 是连续的, 则其 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续。

由此定理 可进一步得出 若平稳随机过程 $\mathbf{x}(t)$ 的自相关 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$