高等学校教学用书

地质实用画法几何

邢凤柏　段云舫　郭　颖　编著

石油大学出版社

鲁新登字10号

内 容 提 要

本书介绍画法几何的基本原理，同时联系地质工作中的一些实际问题，使理论与实际相结合，达到学以致用的目的。

全书共分四章。第一章正投影是以讨论点、直线和平面的空间位置和相互间距离、夹角等问题为主；第二章标高投影是以讨论地形等高线图的绘制及平面与地表面交线的问题为主；第三章轴测投影是以讨论正等轴测图和斜二轴测图的画法为主；第四章赤平投影是以介绍赤平投影的基本原理，吴尔福网的绘制及其基本应用的内容为主。

为了帮助读者学习，每章之后都编有思考练习题。

本书可作为大专院校地质专业的教材、选修课程教材、教学参考书、学生自学用书，也可作为地质工作者和野外勘探技术人员学习提高用参考书。

地 质 实 用 画 法 几 何
邢凤柏　段云舫　郭颖　编著

石油大学出版社出版
（山东省东营市）
新华书店发行
石油大学出版社激光照排室排版
山东省东营新华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　6.625 印张　165 千字
1993 年 2 月第 1 版　1993 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—2000 册
ISBN 7-5636-0287-9/Z_4 · 10
定价：3.80 元

前　言

地质用画法几何，是用画法几何的基本原理和方法，分析讨论各类地质图件的成图原理。学习本书可帮助读者提高用平面图或剖面图表达三维地质体形象的能力，为读者正确识读和绘制地质图打下必要的理论和方法的基础。

在多年教学实践中，我们深感地质类专业的学生和野外地质工作者，如果画法几何的基本知识不足，会给专业学习和工作带来不少的困难。本书就是为了适应大专院校地质类各专业加强基础的教学需要而编写的。本书力求把画法几何学的基本原理和方法，紧密地结合地质工作的实际问题进行分析讨论，努力做到使读者学以致用，提高读者解决实际问题的能力。

学习画法几何学，就是学习如何在平面上表达空间几何要素、形体；就是学习如何根据平面图形正确认识和理解空间几何要素、形体的位置、形状和大小。通过这种双向的学习思维活动，丰富和发展学习者的空间想象能力。

丰富的空间想象能力，是地质工作者必须具备的能力之一。因为地质工作者必须能够根据对地面上各种地质现象的直接观测，或通过各种手段所获得的间接资料的分析研究，清楚具体地推断出地壳内部的各种不能直接观测到的复杂地质情况，因此地质工作者学习和掌握画法几何学的基本理论和方法是非常重要的。

全书分为四章：第一章正投影是以讨论点、直线和平面的空间位置和相互间距离、夹角等问题为主；第二章标高投影是以讨论地形等高线图的绘制和平面与地面交线（岩层出露线）的问题为主；第三章轴测投影是以讨论正等轴测图和斜二测轴测图的画法为主；第四章极射赤平投影是以介绍赤平投影的基本原理，投影网的成图原理及绘制，投影网的基本应用的内容为主。

本书由中国地质大学郭颖编写第一章第五节和第四章，石油工业出版社段云舫编写第二章，江汉石油学院邢凤柏编写第一章和第三章。全书由中国地质大学朱志澄教授进行了审阅，提出了不少宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，书中难免有缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

1992年6月

目　录

绪　论

一、画法几何学的任务

画法几何是一门图示和图解空间几何问题的科学。其任务是研究在平面上表示空间几何要素及形体的原理和方法，就是研究空间几何要素和形体的图示法；同时研究在平面上，用几何作图的原理和方法，解决空间的几何问题，即研究空间几何问题的图解法。

空间形体与几何问题的图示方法和图解方法，在工业生产活动和科学技术活动中，是一种不可少的手段。

根据图样来分析研究所画物体的形状和几何性质，并用图解的方法解决各种空间的几何问题，这种能力对于从事技术工作的人员来说，是必须具备的基本能力之一，对于从事地质工作的人员来说，这种能力更是十分重要的。

在地质工作中，应用画法几何学的基本原理和方法，解决地质工作中遇到的一些空间几何问题时，常比用数学解析的方法速度快，节省时间和精力，很适合地质的野外工作特点。因此，地质专业的大学生、地质工作者，应该学习并掌握好画法几何学的基本原理和方法。

学习时，应在掌握基本原理的过程中，注意掌握和建立起科学的概念，注意培养和发展自己的空间想象能力。空间想象力是工程技术人员，特别是地质工作者解决实际问题能力的重要基础。读者在学习本课程的过程中，要善于在学习内容的变动中，发展自己的思维认识能力；在学习内容的前后对比中，发现特点，掌握规律，加深对学习内容的理解。

二、投影法的基本概念

1. 画法几何学的基础是投影法

如图 0－1 所示，假设在空间有一定平面 P，称为投影平面（简称投影面），和不在该平面内的定点 S 称为投影中心。射线均由投射中心射出。

射过空间 A 点的投射线 SAa 与投影平面 P 交于 a 点，a 点称为空间 A 点在投影平面 P 上的投影；同样 b 点是空间 B 点在投影平面 P 上的投影。在图 0－1 中所示的全过程称为投影。

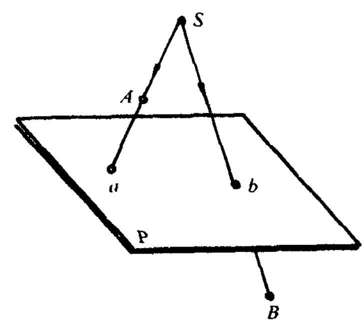


图 0－1　投影的概念

画法几何就是用这种投影的方法，确定出空间几何要素和形体与投影平面（图纸）上投影图之间的对应关系，并通过研究投影平面（图纸）上的投影图，识读和解决空间几何要素和形体的几何问题。

2. 投影法的分类

（1）中心投影法

如图 0－2 所示，投射线（也称为投影线）都是通过投

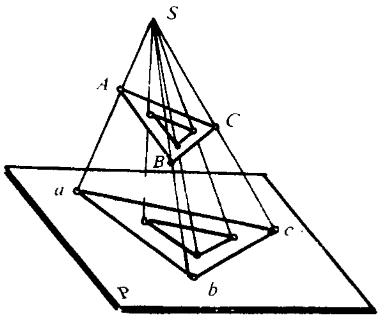


图 0－2　中心投影法

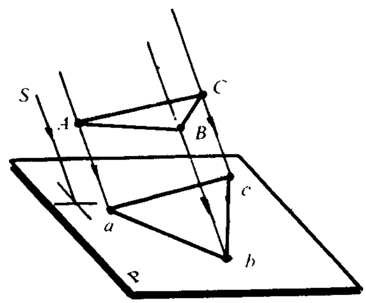


图 0－3　平行投影法

影中心 S 的投影方法，称为中心投影法。

（2）平行投影法

如图 0－3 所示，如果投影中心 S 距投影面 P 的距离为无穷远，则投影线均互相平行，此时画投射线时必须知道投影的方向 S，这种投影方法称为平行投影法。

如果互相平行的投射线与投影面 P 垂直，这种平行投影法称为正投影法。如图 0－4 所示，由于正投影法能在投影平面上获得画法简单的投影图形，因此在工程技术的实际工作中，被广泛的使用。

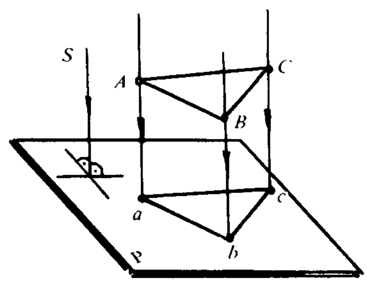


图 0－4　正投影法

3. 正投影法的基本特性

① 点的投影仍是一点；直线的投影在一般情况下仍是一直线。属于直线内的点，该点的投影必在该直线的同面投影上。同面投影就是在同一个投影面上的投影。如图 0－5 所示，C 点在 BD 直线上，C 点对 P 平面的投影 c 点，就在 BD 直线对 P 平面的投影 bd 内。

② 直线上两线段的长度比，等于其投影的长度比。如图 0－5 所示，因为 $Bb /\!/ Cc /\!/ Dd$，所以 $BC/CD=bc/cd$。

③ 空间两直线是平行的，它们对同一投影平面的投影，也是相互平行的。且该两平行线段长度之比，等于其投影的长度之比。如图 0－6 所示，因为 $AB /\!/ CD$，所以 $ab /\!/ cd$；且 $AB/CD=ab/cd$。

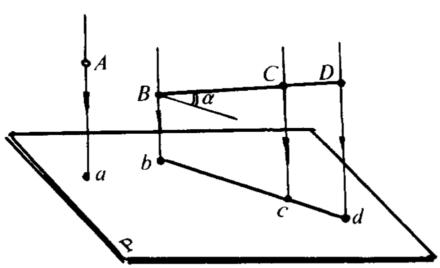


图 0－5　点直线的正投影

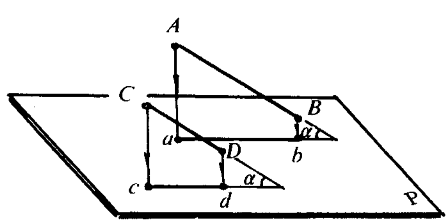
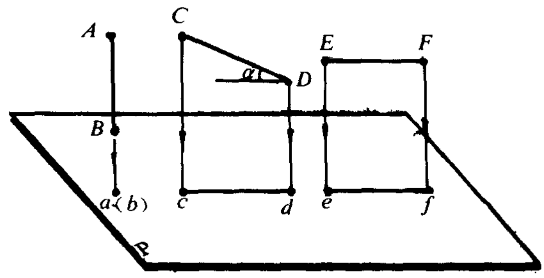


图 0－6　平行线段的投影

④ 当直线段平行于投影平面 P 时，其投影的长度等于空间直线段的实长；当直线段垂直

于投影平面 P 时，其投影积聚成一个点；当直线段与投影平面 P 倾斜时，其投影仍为直线，但比空间直线段的实长缩短。如图 0－7 所示，从初等几何可以证明：$ab=AB\cos\frac{\pi}{2}=0$；$cd=CD\cos\alpha$；$ef=\cos(0)=EF$。

⑤ 当平面图形平行于投影平面时，它对投影平面 P 的投影与原图形的形状和大小都一样的图形；当平面图形垂直于投影平面 P 时，它对投影平面 P 的投影积聚成一条直线；当平面图形与投影平面 P 倾斜时，它对该投影平面的投影为与原图形形状相类似的图形。如图 0－8 所示。



直线垂直、倾斜、平行于投影平面的投影

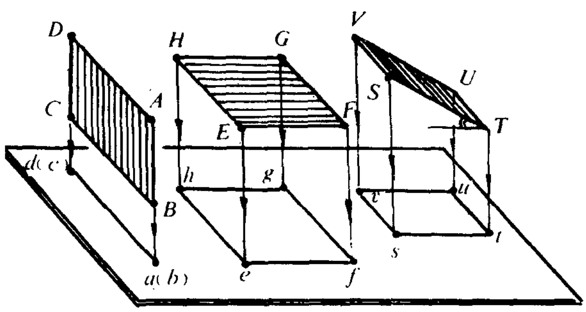


图 0－8　平面图形垂直于、平行于、倾斜于投影平面 P 的投影

第一章　正　投　影

第一节　点、直线、平面的正投影

1. 点在两投影面体系中的投影及点对辅助投影面的投影

讨论点的投影问题，首先要明确空间点的一个投影是不能确定出该点空间位置的。如图1-1所示，空间点 A 与投影面 H 的相对位置是确定的，它在 H 面上的投影 a 的位置，就是过空间点 A 向 H 面作垂线，垂线与 H 面的交点。这个交点的位置是唯一被确定的。反之，如果只根据一个投影 a 的位置，是不能确定出空间点 A 的位置的，所以为了能够用投影图确定出点的空间位置，必须采用多面投影的方法。为此，建立起两投影面体系。

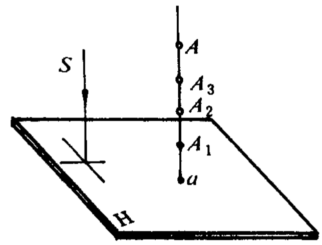


图 1-1　点对 H 面的正投影

（1）点在两投影面体系中的投影

两投影面体系是由互相垂直的水平投影面 H 和正立投影面 V 组成，如图 1-2 所示。两投影面的交线 X 称为投影轴。V 和 H 面把空间分成四个分角，用 Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ 表示。

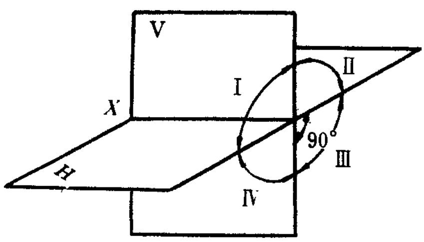


图 1-2　两投影面体系

假设在第一分角空间内有一个点 A，如图 1-3(a) 所示，过 A 点向 H 面作垂线，其垂足即为点 A 对 H 面的正投影，也称为点 A 的水平投影，用 a 表示。过点 A 向 V 面作垂线，其垂足即为点 A 对 V 面的正投影，用 a' 表示。

从图 1-3(a) 还可以看出，由 Aa 和 Aa' 两相交直线确定的矩形平面 $Aa'a_xa$ 是垂直于水平投影面 H 和正立投影面 V 的，所以平面 $Aa'a_xa$ 也一定垂直于 H 面和 V 面的交线 OX 轴，也就是 aa_x 和 $a'a_x$ 都垂直于 OX 轴，且交 OX 轴上的同一个点 a_x。显然 A 点距 H 面的距离为 $Aa=a'a_x$；A 点距 V 面的距离为 $Aa'=aa_x$。

为了把两投影面的投影 a' 和 a 能画在同一个平面上，规定在画投影图时，正立面 V 面不动，水平面 H 面，绕 X 轴按图 1-3(a) 所示的箭头方向旋转到与 V 面重合。显然，两投影面展开后 aa_x 仍然是空间点 A 距 V 面的距离，$a'a_x$ 仍然是空间点 A 距 H 面的距

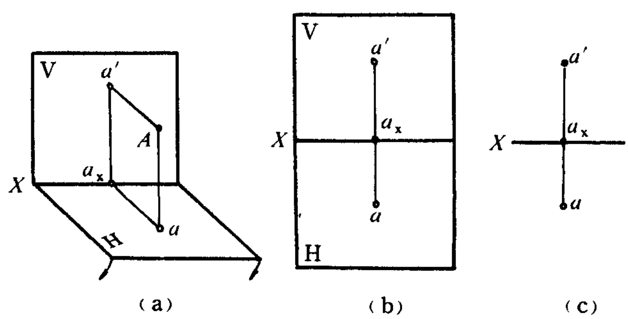


图 1-3　点的两面投影

离，且在投影图中 $a'a \perp OX$。这就是一个空间点在两投影面体系中的投影规律。

通常画投影图时，投影面的大小可根据需要确定，所以不必画出投影面的边界，如图 1－3(c)所示。

[例] 已知：点 A 和点 B 的两面投影图，如图 1－4。

求作：比较点 A 和点 B 对 V 面的距离。

作法：根据投影图所示，$aa_x > bb_x$，故点 A 比点 B 距 V 面远，且点 A 比点 B 距 V 面的距离差为 $\Delta y = aa_x - bb_x$。

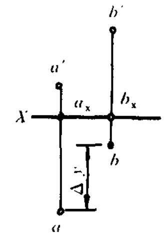


图 1－4 A、B 两点的投影图

(2) 点对辅助投影面的投影

如图 1－5(a)所示，在原来的两投影面体系中，在适当的位置增加一个与 H 面垂直的 V_1 投影面，这个 V_1 投影面称为第一次辅助投影面，它与 H 面的交线称为第一次辅助投影轴，用 X_1 表示。空间点 A 对 V_1 面的投影，用 a_1' 表示，称为点 A 在第一次辅助投影面上的投影。a_1' 也称为点 A 的辅助投影。

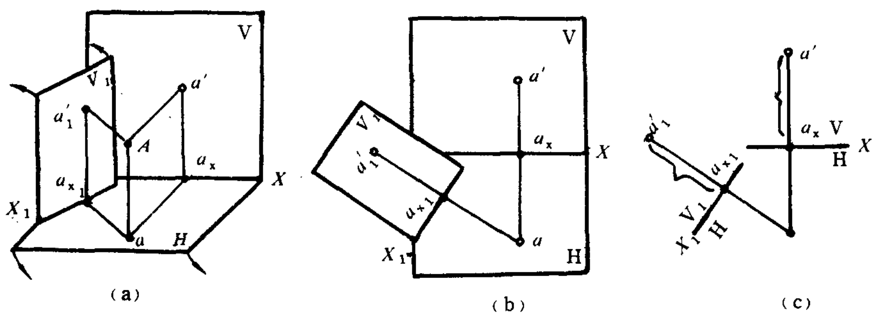


图 1－5 点对辅助投影面 V_1 面的投影

画投影图时，为把投影平面展成同一个平面的位置，规定正立投影面 V 面及其上的投影不动，V_1 面连同 H 投影面一起绕 X 轴旋转到与 V 面重合的位置，然后 V_1 面再绕 X_1 轴，按图 1－5(a)所示的箭头指向，旋转到与 H 面重合的位置，如图 1－5(b)所示。展开后在投影图中可以看出，只要 X_1 轴的位置选定了(即第一次辅助投影面 V_1 的位置选定了)，a_1' 的位置就确定了。因为在投影图中 a'和 a 必定是在一条垂直于 X_1 轴的直线上，并且 $a_1'a_{x1} = a'a_x$。图 1－5(c)是没有投影面边界的投影图。

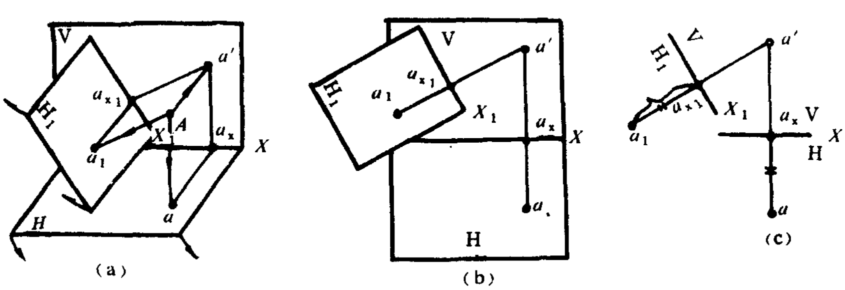


图 1－6 点对辅助投影面 H_1 面的投影

如图 1－6(a)所示，在原来的两投影面体系中，在适当的位置，增加一个与 V 面垂直的投影面，这个投影面也是第一次辅助投影面，用 H_1 表示，H_1 面与 V 面的交线也称为第一次辅助投影轴，用 X_1 表示，空间点 A 对它的投影为 a_1，显然存在有 $a_1a_{x1} = aa_x = Aa'$的关系。画投影图

时，投影平面的展开规定为：H 面绕 X 轴向下旋转到与 V 面重合的位置，H_1 面绕 X_1 轴按图 1－6(a)中箭头的指向，旋转到与 V 面重合的位置。投影平面展开后，投影图中的投影关系如下：$a'a$ 在一条垂直于 X 轴的直线上，$a'a_1$ 在一条垂直于 X_1 轴的直线上，而且 $aa_x=a_1a_{x_1}$，投影图如图 1－6(b)(c)。

有了上面的认识，就可以在已知的两面投影体系的投影图中，根据给定的第一次辅助投影轴 X_1 的位置，作出空间点对第一次辅助投影面的投影。

［例］ 已知：点 B 的两面投影 b、b' 及第一次辅助投影轴 X_1，如图 1－7(a)。

求作：点 B 对第一次辅助投影面的投影。

作法：根据 X_1 的具体位置，可以确定辅助投影平面为 V_1。

① 自 b 点向 X_1 轴作垂线，交 X_1 轴于 b_{x_1} 点。

② 自 b_{x_1} 点在该垂线延长线上截取 $b_{x_1}b_1'=b'b_x$。

③ 截得的 b'_1 点即为 B 点对 V_1 面的投影，如图 1－7(b)。

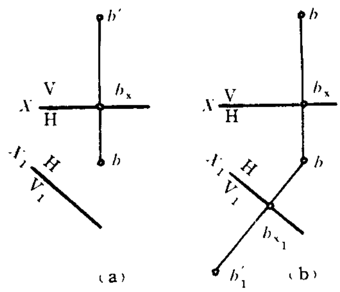
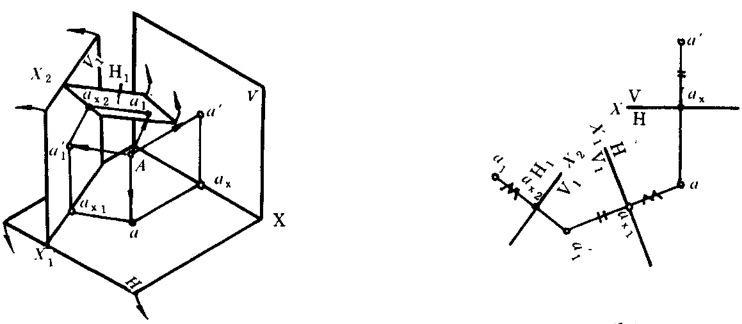


图 1－7 求点 B 的辅助投影

应当指出，在解决带有辅助投影面的问题时，为了使投影图醒目，须在轴线端部标出$\dfrac{V}{H}$、$\dfrac{H}{V_1}$等投影面的符号。如图 1－7(a)(b)所示。

有时为了求空间几何要素间的关系，在选取的第一次辅助投影平面上，再选取第二次辅助投影平面。第二次辅助投影平面，必须垂直于第一次辅助投影面，如图 1－8(a)所示。V_1 面垂直于 H 面，H_1 面垂直于 V_1 面，H_1 面与 V_1 面的交线 X_2，称为第二次辅助投影轴。



(a) (b)

图 1－8 点对第一次、第二次辅助投影面的投影

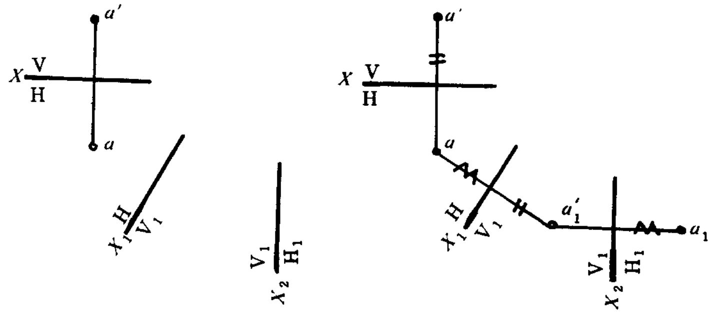
在这种条件下，空间点 A 除了向 V_1 面作正投影得到投影 a_1' 外，还要向 H_1 面作正投影得到 a_1。画投影图时，投影面的展开规定为：V 面不动，H 面连同 V_1 和 H_1 面一起绕 X 轴，向下旋转到与 V 面重合，然后 V_1 面连同 H_1 面绕 X_1 轴展成与 H 面重合，最后 H_1 面再绕 X_2 轴，展成与 V_1 面重合。它们展开时的旋转方向，图 1－8(a)中已用箭头指明。从图 1－8(b)可知，点对第一次，第二次辅助投影面的投影之间，存在有以下的关系：$a_1'a_{x_1}=a'a_x$，$a_1a_{x_2}=aa_x$，同时 aa_1' 和 $a_1'a_1$ 两直线分别垂直于 X_1 轴和 X_2 轴。由此可以得出已知空间点的两个投影及第一和第二辅助投影轴 X_1 和 X_2 的位置求空间点对第一次和第二次辅助投影平面投影的方法。

［例］ 已知：a、a' 及 X、X_1、X_2 轴的位置，如图 1－9(a)。

求作：a_1 及 a_1' 的投影位置。

作法：① 过 a 作 $aa_1'\perp x_1$，交 x_1 于 ax_1。

② 截取 $a_{x_1}a'_1=a_xa'$ 得 a'_1 点。



（a）　　　　（b）

图 1 - 9　求点 A 对第一次、第二次辅助投影面的投影

③ 过 a'_1 作 $a'_1a_1 \perp x_2$，交 x_2 于 a_{x_2}。

④ 截取 $a_{x_2}a_1 = a_{x_1}a$，得 a_1 点。

a'_1、a_1 的位置即为所求的位置。

2. 直线在两投影面体系中的投影及直线对辅助投影面的投影

(1) 直线在两投影面体系中的投影

空间一直线的正投影，可由直线上的两个点（通常总是取直线段的两个端点）的同面投影的连线来确定，如图 1 - 10 所示。直线段 AB 的两端点的同面投影 a'、b' 和 a、b 的连线，就是空间直线 AB 的两面投影。

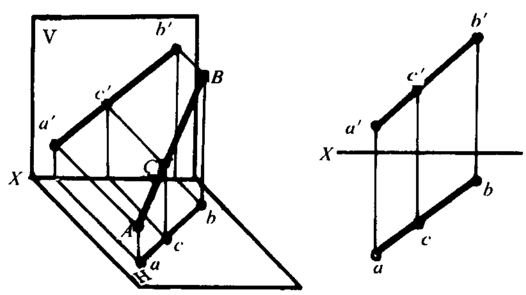


图 1 - 10　直线 AB 的正投影

如果 C 点属于直线段 AB，C 点的两个投影，分别在直线段 AB 的两个同面投影连线内，并且直线段上，两段直线长度之比等于其投影长度之比，即 $AC : CB = ac : cb = a'c' : c'b'$。

(2) 直线的空间位置

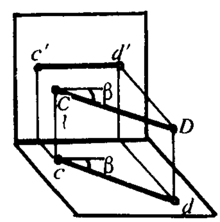
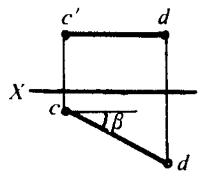
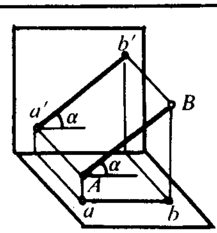
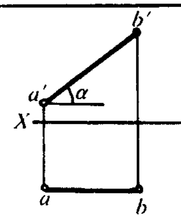
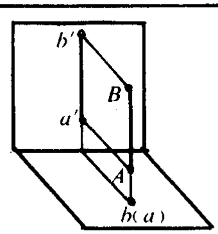
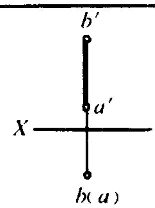
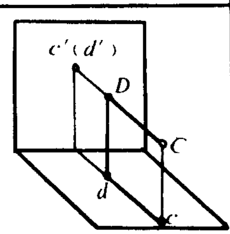
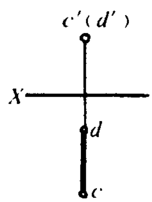
一直线的空间位置，可根据直线和投影面的相对位置分为三类：

① 一般位置直线——空间直线对两投影平面既不平行也不垂直的直线。它的两面投影长度都将小于空间直线段的实际长度。如图 1 - 10，直线 AB 就是一般位置直线，它的投影 $a'b'$ 和 ab 的长度都小于 AB 的实际长度。

② 投影面的平行线——平行于某一投影面的空间直线称为投影面的平行线，其投影的特性，见表 1 - 1。

③ 投影面的垂直线——垂直于某一投影面的空间直线，称为投影面的垂直线，其投影特性见表1 - 1。

表 1-1

	轴测图	投影图	投影特征
水平线			1. $cd = CD$ 2. $c'd' \parallel X$轴 3. cd与X轴夹角等于CD与V面的夹角
正平线			1. $a'b' = AB$ 2. $ab \parallel X$轴 3. $a'b'$与X轴夹角等于AB与H面的夹角
铅垂线			1. $b(a)$积聚成一个点 2. $a'b' \perp X$轴 3. $a'b'$等于AB实长
正垂线			1. $c'(d')$积聚成一个点 2. $cd \perp X$轴 3. cd等于CD实长

(3) 特殊位置直线的投影特性

投影平面的平行线和投影平面的垂直线，称为特殊位置的直线，它们的投影特性见表 1－1。

(4)直线对辅助投影面的投影

由表 1－1 可以看出如下的两方面问题：

① 当直线平行于某一投影面时，直线对该投影面的投影长度为实际长度，该投影与投影轴的夹角，即为直线对另一投影平面的夹角；而直线的另一投影一定是平行于投影轴的。

② 当直线垂直于某一投影面时，直线对该投影面的投影积聚成为一个点；另一投影，应该是垂直于投影轴的等于实长的直线。

因此，当想在投影图中，求得一般位置直线段的实长时，可以在原来的两投影面体系中，选取一适当的辅助投影面，令辅助投影轴 X_1 与空间直线在 X_1 轴所在的投影面上的投影平行，这就使空间位置为一般位置的直线段与辅助投影平面之间，成为平行的位置关系，这时直线段对与其平行的辅助投影平面投影的长度，应等于空间直线段的实际长度，该辅助投影与 X_1 轴的夹角，即为空间直线段对 X_1 轴所在的投影平面的夹角。

当要求辅助投影平面与空间直线互相垂直时，须选取辅助投影平面的新轴与原反映直线实际长度的投影成垂直的位置关系。如空间直线是一般位置时，则需首先把直线变换成第一次辅助投影平面的平行直线，然后再把空间直线变换成第二次辅助投影平面的垂直直线。

具体的选取辅助投影面的方法，见下面例题。

［例］ 已知：一般位置直线的两面投影如图 1－11。

求作：直线的实长及其对 H 面的夹角 α。

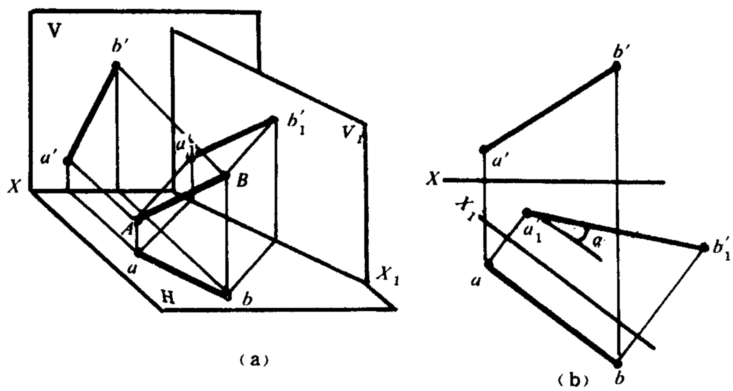


图 1－11 直线 AB 对 V_1 辅助投影面的投影

作法：根据前面的分析，选取的辅助投影面应与直线 AB 平行。如选取的辅助投影平面是垂直于 H 面的 V_1，其 X_1 轴应平行于 AB 的 H 面投影。

具体的作法如下：

① 作 X_1 轴 $/\!/ ab$。

② 过 a、b 两点分别作 X_1 的垂直线，交 X_1 轴于 a_{x_1} 和 b_{x_1} 点。

③ 在垂线上截取 $a_{x_1}a'=a_xa'$；$b_{x_1}b_1'=b_xb'$。

④ 连 $a_1'b_1'$ 得到直线 AB 对辅助投影面 V_1 的投影，且 $a_1'b_1'=AB$，$a_1'b_1'$ 与 X_1 轴的夹角 α，就是直线 AB 对 H 面的夹角。

如果本例题要求作出直线 AB 对 V 面的夹角 β 时，只能选取垂直于 V 面的辅助投影面 H_1，才能作出，具体的作法从略。

［例］ 已知：一般位置直线 AB 和一点 C 的两面投影，如图 1－12(a)所示。

求作：C 点距直线 AB 的距离。

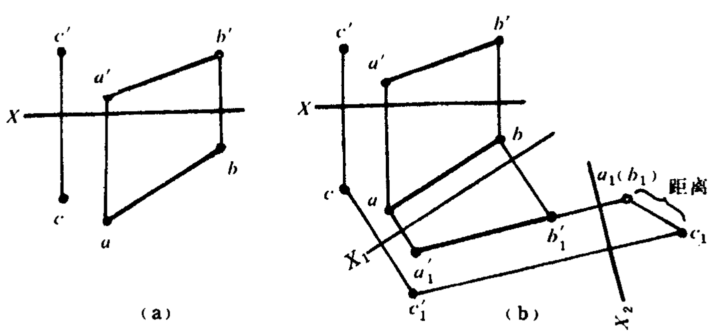


图 1－12 直线对辅助投影面的投影

作法：根据前面的分析，首先把直线 AB 变换成辅助投影面 V_1 的平行线，其具体作法见前

一例题所述。其次再把直线 AB 变换成为第二次辅助投影面 H_1 的垂直位置，第二次辅助投影轴 X_2 选取成与 $a_1'b_1'$ 垂直的位置即可，此时空间直线 AB 对第二次辅助投影面的投影，积聚为一个点，空间点 C 对第二次辅助投影面的投影 c_1 与点 $a_1(b_1)$ 的距离，即为 C 点距直线 AB 的距离。具体的作法见图 1－12(b)。

3. 平面在两投影面体系中的投影及平面对辅助投影面的投影

(1) 平面在两投影面体系中的投影

由初等几何学可知，不属于同一直线上的三个点，可以确定一个平面。因此，在投影图中，可以用图 1－13 所示的任何一组几何要素的两面投影，都可以表示平面的投影。显然这些表示平面的形式是可以互相转换的。

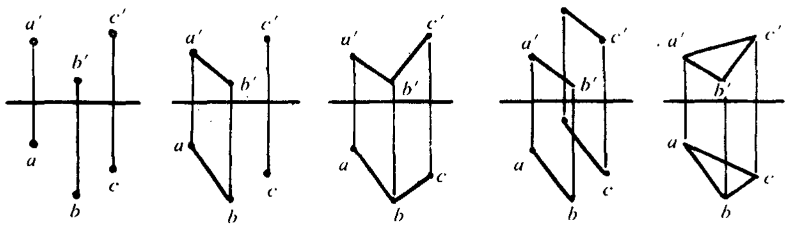


图 1－13　平面的几何元素表示法

如图 1－14 所示，空间平面用不在一条直线上的三个点 A、B、C 确定，该平面的两面投影图的作法，就是作 A、B、C 三点的两面投影，为了具体形象地表明空间平面，一般是把 A、B、C 三个点，顺次连成一三角形的平面图形，此时△ABC 的两面投影，就是把 A、B、C 三点的同面投影也顺次地连接起来，△ABC 的正面投影为△$a'b'c'$，它的水平投影为△abc。

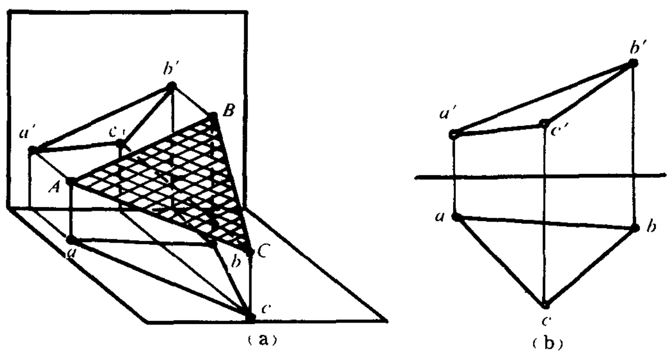


图 1－14　一般位置平面的投影

空间平面对投影面的相对位置，可以分为：

① 一般位置平面——空间平面和投影平面既不平行也不垂直，该平面称为一般位置的平面。图 1－14 就是一般位置的△ABC 平面的投影及投影图。从图中可以看出，它的两个投影三角形的面积，都比空间平面△ABC 的实际面积小。

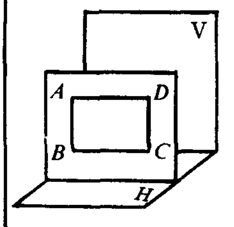
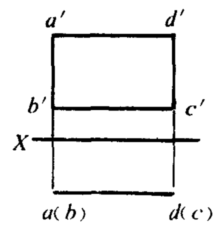
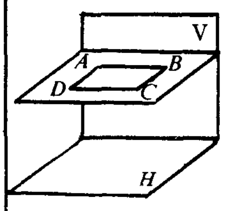
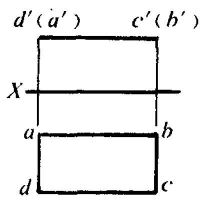
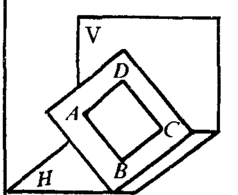
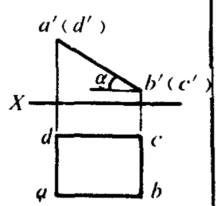
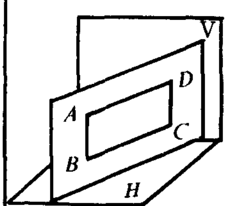
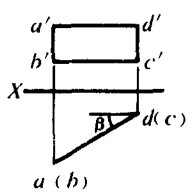
② 投影面的平行面——空间平面与投影平面成平行关系，这种空间位置的平面称为投影面的平行面。

③ 投影面的垂直面——空间平面与投影平面成垂直关系，这种空间位置的平面称为投影面的垂直面。

投影面的平行面和投影面的垂直面，它们也称为特殊位置的平面。这种平面对投影面的投

影具有特殊的性质，其投影特性见表 1－2。

表 1-2

	轴测图	投影图	投影特性
正平面			1.正面投影的形状和面积大小等于实形和大小 2.水面投影积聚为一直线平行于X轴
水平面			1.水平投影的形状和面积大小等于实形和大小 2.正面投影积聚为一直线平行于X轴
正垂面			1.水平投影是原形的类似形 2.正面投影积聚为一直线，其与X轴夹角即为平面对H面的夹角
铅垂面			1.正面投影是原形的类似形 2.水平投影积聚为一直线，其与X轴夹角即为平面对V面的夹角

(2) 平面上的点和直线

由初等几何可知，一个点如位于一平面内，它一定是在平面内的一条直线上，如果点不在平面内，它也一定不在平面内的直线上。

由初等几何还可知，一条直线如果属于一平面，该直线一定过平面内的两个点；如果直线不在平面内(直线不属于平面)，它一定不会过平面内的两个点。

根据上述原理，可以①判断点是否在平面内；②判断直线是否在平面内；③已知平面内一点的一个投影，求出该点的第二个投影；④在平面内作一水平线或正平线。

[例] 已知：平面△BCD 和点 A 的两面投影图，如图 1－15(a)。

求作：判断点 A 是否在平面△BCD 内。

作法：如图 1－15(b)，

① 过 a' 作 $b'a'e'$ 直线交 $c'd'$ 于 e'。

② 过 e' 作 $e'e \perp X$ 轴，交 cd 于 e。

③ 连 be。如果 a 点在 be 上，说明点 A 在平面△BCD 内。如果 a 点不在 be 上，说明点 A 不在平面△BCD 内。

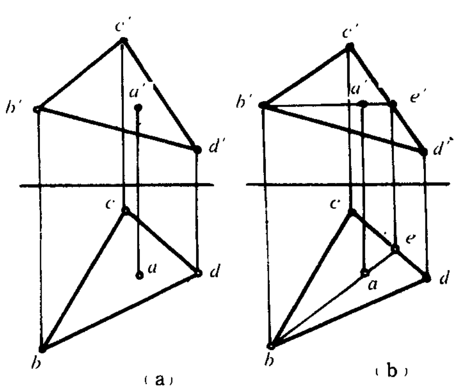


图 1-15　判断点 A 是否在平面△BCD 内

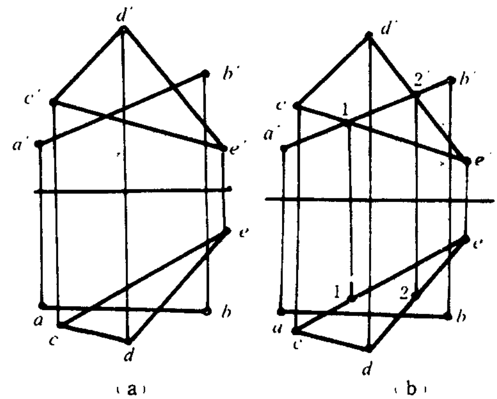


图 1-16　判断直线 AB 是否在平面△CDE 内

［例］　已知：平面△CDE 和直线的两面投影，如图 1-16(a)所示。

求作：判断直线 AB 是否在平面△CDE 内。

作法：如图 1-16(b)，

① 过 $a'b'$ 与 $c'e'$ 的交点 $1'$，作 $1'1 \perp X$ 轴，$1'1$ 直线交 ce 于 1 点。

② 过 $a'b'$ 与 $d'e'$ 的交点 $2'$，作 $2'2 \perp X$ 轴，交 de 于 2 点。

③ ab 不过 1、2 两点，所以 1、2 两点不是直线 AB 内的点，说明直线 AB 不过平面内 1、2 两点，直线 AB 不在平面△CDE 内。

［例］　已知：平面△BCD 和平面内一点 A 的一个投影 a'，如图 1-17(a)所示。

求作：点 A 的另一投影 a。

作法：如图 1-17(b)

① 连 $b'a'$，交 $c'd'$ 于 e' 点。

② 过 e' 点作 $e'e \perp X$ 轴，交 cd 于 e 点。

③ 连 be 并延长，使延长线与过 a' 点作 $a'a \perp X$ 轴的直线交于 a 点。a 点即为所求的另一投影。

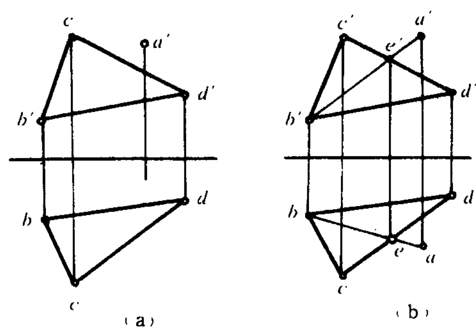


图 1-17　求点 A 的另一投影

如果在一已知的平面内画直线，可以画出无数条，其中凡是与任一投影面平行的直线是非常重要的。

如何在一已知平面内画出与投影面平行的直线，下面的例子可以说明这个问题。

［例］　已知：平面▱$ABCD$ 如果 1-18(a)。

求作：过平面上的 B 点作一水平线。

作法：如图 1-18(b)

① 过 b' 作 $b'e' // X$ 轴，交 $a'd'$ 于 e' 点。

② 过 e' 作 $e'e \perp X$ 轴，交 ad 于 e 点。

③ 连 be 及 $b'e'$。be 及 $b'e'$ 即为 BE 的两面投影，BE 直线即为平面▱$ABCD$ 内的过 B 点的水平线。

(3) 平面对辅助投影面的投影

由表 1-2 可知，当平面垂直于某投影平面时，平面对该投影面的投影，积聚为一条直线，与平面垂直的投影面，必定和平面上的另一投影面的平行的直线垂直。因此，如想把一般位置的平面，向辅助投影面投影积聚为一条直线时，即平面与辅助投影面垂直时，选取的辅助投影面的轴 X_1，必须和平面内的一平行线垂直。

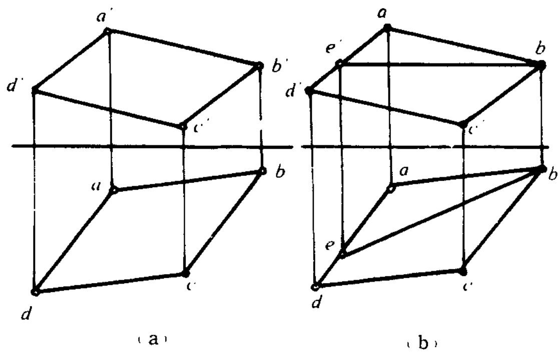


图 1-18　在平面内画水平线

由表 1-2 还可看出，当平面平行于某投影面时，平面对该投影面的投影为平面的实形，平面对另一投影面的投影则积聚成与投影轴平行的直线。因此，若想求一垂直位置平面的实形时，选取的辅助投影的轴 X_1，应平行于该平面投影积聚为一直线的投影，此时平面对该辅助投影面的投影即为实形。

［例］　已知：一般位置平面$\triangle ABC$ 的两面投影，如图 1-19(a)。

求作：$\triangle ABC$ 的实形。

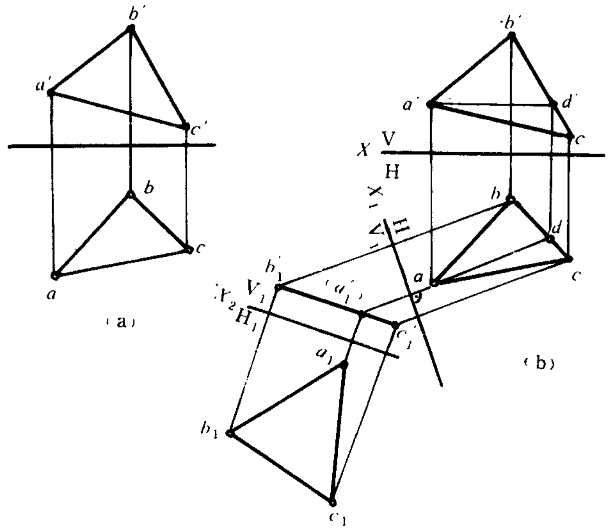


图 1-19　求$\triangle ABC$ 的实形

分析：该问题可分为两步解。第一步作第一次辅助投影，令辅助投影面与$\triangle ABC$ 垂直，该三角形对辅助投影面的投影，将积聚为一条直线，为此要先在$\triangle ABC$ 平面内，画一水平线（画一正平线亦可），令 X_1 轴垂直于该水平线的水平投影。很明显此时选取的第一次辅助投影面为 V_1。第二步再作第二次辅助投影面，把$\triangle ABC$ 平面与第一次辅助投影面成垂直的关系，转换成与第二次辅助投影面平行的关系，这时$\triangle ABC$ 对第二次辅助投影面的投影即为实形。

作法：① 在$\triangle ABC$ 内作水平线 AD。

② 作 X_1 轴，使 $X_1 \perp da$。

③ 作$\triangle ABC$ 对第一次辅助投影面的投影，$\triangle a_1'b_1'c_1'$ 积聚为一条直线。

④ 作 X_2 轴，使 $X_2 // a_1'b_1'c_1'$。

⑤ 作$\triangle ABC$ 对第二次辅助投影面的投影，$\triangle a_1b_1c_1$ 即为所求。$\triangle a_1b_1c_1$ 的形状和面积与空