组合数学习题解答

孙世新　卢光辉　戴　波　编　著

张先迪　审

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

/ —

2006.5

ISBN 7 81114 092 6

. ... — —

. O · 157-44

CIP 2006 031972

内 容 提 要

2003

组合数学习题解答

孙世新 卢光辉 戴 波 编 著

张先迪 审

出 版		610054
责任编辑		
发 行		
印 刷		
开 本	787 × 1092 1/16 印张 13.875 字数 338	
版 次	2006 5	
印 次	2006 5	
书 号	ISBN 7 81114 092 6/O · 5	
印 数	1 4000	
定 价	18.00	

◆ 028 83201495 610054

◆

前　　言

，

，

1

2

“
”

编　　者
2005 年 10 月于电子科技大学

目　　录

第一章　排列、组合与二项式定理

一、内容提要

加法规则　S　$S_i \subseteq S$　$i=1\ \ 2\ \ 3\ \ \cdots\ \ m$　$S=\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$　$i \neq j$

$S_i \cap S_j = \phi$

$$|S| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |S_i| \qquad 1.1$$

$m=2$

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

乘法规则　$S_i\left(i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ m\right)$

$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m = \left\{\left(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_m\right) \middle| a_i \in S_i\ \ \ i=1\ \ 2\ \cdots\ \ m\right\}$

$$|S| = |S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m| = \prod_{i=1}^{m} |S_i| \qquad 1.2$$

$m=2$　$|S| = |S_1 \times S_2| = |S_1| \times |S_2|$

定义 1.1　$A=\{a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n\}$　n　r　n

r　$r \le n$　A　$r-$　P

n　r　A　$r-$　A　r

$$P(n,r) = \begin{cases} 1 & n \ge r = 0 \\ 0 & n < r \end{cases}$$

定理 1.1　n　r　$r \le n$

$$P(n\ \ r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 1.3$$

推论 1　$n \ge r \ge 2$

$$P(n\ \ r) = nP(n-1\ \ r-1) \qquad 1.4$$

推论 2　$n \ge r \ge 2$

$$P(n\ \ r) = r \cdot P(n-1\ \ r-1) + P(n-1\ \ r) \qquad 1.5$$

定义 1.2　$A=\{a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n\}$　n　r

定理 1.2 $A=$ a_1 a_2 $\cdots$ a_n r

$$P(n\ \ r)/r = n!/(r(n-r)!) \qquad 1.6$$

定义 1.3 $B=\{\ k_1\cdot b_1\quad k_2\cdot b_2\quad \cdots\quad k_n\cdot b_n\}$ r

r–

定理 1.3 $B=\{\infty\cdot b_1\ \ \infty\cdot b_2\ \ \cdots\ \ \infty\cdot b_n\}$ r– n^r

定理 1.4 $B=\{n_1\cdot b_1\ \ n_2\cdot b_2\ \ \cdots\ \ n_k\cdot b_k\}$

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

定义 1.4 $A=\{a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n\}$ n r n

r $r\le n$ A r– A

r– A r– 用$C(n,r)$或$\binom{n}{r}$ A r–

$$C(n,\ r)=\binom{n}{r}=\begin{cases}1 & n\ge r=0\\ 0 & n<r\end{cases}$$

定理 1.5 $r\le n$

$$C(n\ \ r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n\ \ r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 1.7$$

推论 1 $C(n\ \ r)=C(n\ \ n-r)$ 1.8

推论 2 Pascal

$$C(n\ \ r)=C(n-1\ \ r)+C(n-1\ \ r-1) \qquad 1.9$$

推论 3 $C(n-1\ \ r-1)+C(n-2\ \ r-1)+\cdots+C(r-1\ \ r-1)=C(n\ \ r)$ 1.10

定理 1.6 $B=\{\infty\cdot b_1\ \ \infty\cdot b_2\ \ \cdots\ \ \infty\cdot b_n\}$ r–

$$F(n\ \ r)=\binom{n+r-1}{r} \qquad 1.11$$

定理 1.7 n x y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad 1.12$$

推论 1 n x y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k$$

推论 2　n　x

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k \qquad 1.13$$

推论 3　n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \qquad 1.14$$

推论 4　n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \qquad 1.15$$

定理 1.8　α　$|x/y|<1$　x　y

$$(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k} \qquad 1.16$$

$$\binom{a}{k}=\begin{cases}\dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} & k>0\\ 1 & k=0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

推论 1　$|z|<1$　z

$$(1+z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k \qquad 1.17$$

推论 2　$|z|<1$　z

$$(1+z)^{-n}=\frac{1}{(1+z)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k \qquad 1.18$$

推论 3　$|z|<1$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \qquad 1.19$$

推论 4　$|z|<1$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \qquad 1.20$$

推论 5　$|z|<1$

$$\sqrt{1+z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k \qquad 1.21$$

推论 6　$|-rz|<1$　$|z|<1/|r|$

$$(1-rz)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^k z^k \qquad 1.22$$

恒等式 1 n k

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad 1.23$$

恒等式 2 n

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1} \qquad 1.24$$

恒等式 3 n

$$\sum_{k=0}^{n}(\ -1)^k k\binom{n}{k}=0 \qquad 1.25$$

恒等式 4 n

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2} \qquad 1.26$$

恒等式 5 n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}k^2=0 \qquad 1.27$$

恒等式 6 n

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad 1.28$$

恒等式 7 n m p $p\le\min\{m\quad n\}$

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p} \qquad 1.29$$

恒等式 8 m n

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m+n}{m} \qquad 1.30$$

恒等式 9 n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n} \qquad 1.31$$

恒等式 10 p q n

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$$

恒等式 11　　p　q　n

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q} \qquad 1.32$$

恒等式 12　　n　k

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1} \qquad 1.33$$

恒等式 13　　α　k

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+j}{j}=\binom{\alpha+k+1}{k} \qquad 1.34$$

1

2　Pascal

3

4

5

Taylor

H.W.Gonld

二、习题解答

1.1　1000　9999

解：　1000　9999　4

1　3　5　7　9

1000

1　2　3　L　9

1　3　5　7　9　5

1　2　L　9　8

0　1　2　L　9

8

0　1　2　L　9

7

$$5\times 8\times 8\times 7=2240$$

1.2 1000 9999

解： 4 1 3 5 7 9 5 5

0 0

5 4

$$P\quad 5\quad 4\quad = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

1.3 52

解 52 52

52

52

1.4 10

解： 10 10

9 9

2

2×9 $10! - 2\times 9$

1.5 10

10 $\frac{10!}{10}$

9

$\frac{9!}{9}$

$2\times \frac{9!}{9}$

$$\frac{10!}{10} - 2\times \frac{9!}{9} = 9! - 2\times 8!$$

1.6 6 6

解： 6 $\frac{6!}{6}$ 6

2 5 3 4 …… 6 1

$$\frac{6!}{6}\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 6!\times 5!$$

1.7 1 2 3 4 5 5

20 000

解：

方法一：

20 000 20 000

2 3 4 5 4

4 3 2

1 $4\times4\times3\times2\times1=96$

“ 5 ” 5 1

3 3 2

1 $3\times3\times2\times1=18$

5

$$96-18=78$$

方法二：

5 20 000 1 2 3 4

2 3 4 5

1 1 2 3 4 5

4 3 2 1

$$4\times3\times2\times1\times1=24$$

2 3 4 3 2

3 4 5 3 3

2 1

$$3\times3\times3\times2\times1=54$$

5

$$24+54=78$$

1.8

a $\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$

证明： $=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n}{n-r}\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n}{n-r}\cdot\binom{n-1}{r}=$

b $\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-1}$

证明： $=\frac{n}{n-1}\binom{2n}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n!}{n!n!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\binom{2n}{n-1}=$

c $n\binom{n-1}{r}=(r+1)\binom{n}{r+1}$

证明：

$$=n\binom{n-1}{r}=n\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}=(r+1)\cdot\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$

$$=(r+1)\cdot\binom{n}{r+1}=$$

1.9 1 10 000 000 000 100 1

1

解： 1 0 9 999 999 999 100

1 $\{\infty\cdot 0\ \ \infty\cdot 2\ \ \infty\cdot 3\ \mathrm{L}\ \ \infty\cdot 9\}$ 10 – 9^{10}

1 1 10 000 000 000 $9^{10}-1$ 1

$10^{10}-1$ – $9^{10}-1$ $=10^{10}-9^{10}$ 1

注意： 0

1.10 1000 9999 3

3 3 7

解： 3

a 3 3 3

B=$\{\infty\cdot 0\ \ \infty\cdot 1\ \ \infty\cdot 2\ \ \infty\cdot 4\ \ \infty\cdot 5\ \mathrm{L}\ \ \infty\cdot 9\}$ 3 $(10-1)^3$

b 3 0 1 2 4 5 6 7 8 9

$\binom{8}{1}$ 3 $3\times(10-1)^2$

$$\binom{8}{1}\times 3\times(10-1)^2$$

a b

$$9^3+8\times 9^2\times\binom{3}{1}=2673$$

3 1 2 4 5 6 7 8 9

8

0 1 2 4 5 6 7 8 9

$$8\times 9^3=5832$$

7 0 7

$$8+\binom{3}{2}\times(10-1)=35$$

1.11 “ MISSISSIPPI ” S

解： $B=\{1\cdot M\ \ 4\cdot S\ \ 4\cdot I\ \ 2\cdot P\}$

$$\frac{11!}{1!2!4!4!}=34650$$

S 4 S B 7

$\frac{7!}{2!4!}$ 8 _M_I_I_I_P_P_I_

4 S 8 $\binom{8}{4}$

$$\frac{7!}{2!4!}\binom{8}{4}=7350$$

1.12 30 30

解： 30 30

C 30 3 C 30 4

1.13 $X_1+X_2+\cdots+X_n=r$

解：

方法一：

1 8

$X_1+X_2+\cdots+X_n=r$ 1

$\binom{n+r-1}{r}$

1 $Y_i=X_i+1$ $i=1$ 2 $\cdots$ n 1

$y_1+y_2+\cdots+y_n=n+r$ 2

2 1 2

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}$$

$k=n+r$

$$\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{k-1}{n-1}$$

$y_1+y_2+\cdots+y_n=k$ $\binom{k-1}{n-1}$

1 $\binom{r-1}{n-1}$

方法二： r n

r $r-1$ $n-1$

$\binom{r-1}{n-1}$ $\binom{r-1}{n-1}$

1.14 1 10 000 5 5

解： 1 9999 4 0 235 0235

$x_1+x_2+x_3+x_4=5$

$$F(4, 5) = \binom{4+5-1}{5} = 56$$

$x_1+x_2+x_3+x_4=4$ $F(4, 4)=35$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$ $F(4, 3)=20$

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$ $F(4, 2)=10$

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$ $F(4, 1)=4$

$$F(4, 4)+F(4, 3)+F(4, 2)+F(4, 1)=69$$

10 000 4 5 70 5

1.15 a a a a a b c d e a

解： a 4 b c d e 5 a 5 a

a $a\square a\square a\square a\square a$ 4

b c d e 4 4 4

1.16 1 2 … 1000 4

解： $A=\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ 1000 4

$$A_i=\{x \mid x=i \pmod 4\}\ i=1, 2, 3, 4$$

4 250

A a_1 a_2 a_3 $a_1+a_2+a_3=0$

mod4

a_1 a_2 a_3 A_4

$N_1=C$ 250 3

a_1 a_2 a_3 A_1 A_2 A_1 2 A_2 1

$N_2= C$ 250 2 $\times C$ 250 1

a_1 a_2 a_3 A_3 A_4 A_1

$N_3=[C$ 250 1 $]^3$

a_1 a_2 a_3 A_2 A_4 A_2 2 A_4

$N_4=C$ 250 2 $\times C$ 250 1

a_1 a_2 a_3 A_2 A_3 A_2 1 A_3 2

$N_5=C$ 250 1 $\times C$ 250 2

$N= N_1+N_2+N_3+N_4+N_5=C$ 250 3 $+3\times C$ 250 2 $\times C$ 250 1 $+[C$ 250 1 $]^3$

1.17 $2x-7$ ^{7}

解： $X=2x$ $Y=-7$ $n=7$ 1.12

1.18 $3X-2Y$ ^{18} X^5Y^{13} X^8Y^9

解： 1.12 $X=3x$ $Y=-2y$ $n=18$ $k=5$ X^5Y^{13}

$-\binom{18}{5}3^5\times 2^{13}$

X^8Y^9 0 $\because 8+9\neq 18\ \therefore$ $(3X-2Y)^{18}$ X^8Y^9 X^8Y^9

0

1.19 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

解：

方法一：

a b n a b

$$\overbrace{2\times 2\times \cdots \times 2}^{n}=2^n$$

a b $n-$ k

$k=0$ 1 2 $\cdots$ n a $n-k$ b $B_k=\{k\cdot a\ (n-k)\cdot b\}$

$n-$ 1.4

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\quad k=0\ 1\ 2\ \cdots\ n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

方法二：

$U=\{a_1$ L $a_n\}$ n “ ” “ ”

a_1 2 a_2 2 …… a_n 2

2×2×2×L ×2=2^n

n 0 1 L n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\sum_{R=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

1.20 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ $\dfrac{(3n)!}{2^n\times 3^n}$

$2n$

$(2n)!$

$2n$

1 2 $2n$ 2 1 2

$$2\binom{2n}{2}$$

3 4 1 2 $2n-2$

2 3 4

$$2\binom{2(n-1)}{2}$$

L L

$2n$–1 $2n$ 1 2 3 4 L $2n$–2 $2n$–2

$2n$– $2n$–2 2 $2n$–1 $2n$

$$2\binom{2n-(2n-2)}{2}=2\binom{2}{2}$$