# 组 合 数 学

(第 二 版)

卢 开 澄

清 华 大 学 出 版 社

# 内　容　简　介

本书为机械电子部推荐的高等学校教材，是 1983 年我社出版的《组合数学》上册的修订版. 全书共有六章: 排列与组合，母函数与递推关系，容斥原理与鸽巢原理，P ólya 定理，区组设计与编码，线性规划. 内容取舍得当，理论联系实际.

本书是计算机系本科生和研究生的教学用书，也可作为数学专业师生的教学参考书.

# 写在“再版”前的话

转眼间“组合数学(算法与分析)”一书(上、下册)出版已快十年了.一本好的科技书总是要通过使用,修改,再使用,再修改几个反复才能臻于完善.出版社和作者都有出修订版的愿望.正好在此期间,原书上册被选作全国计算机专业的教材,这样两者便结合起来进行.本书问世之日,也是再版修订完成之时.读者不难发现“再版”中有相当数量的新增内容,有的虽材料依旧,但已是重新改写过的.

“组合数学”研究的问题源远流长,有的甚至于可追溯到欧拉等著名数学家.然而它之所以成为最活跃的一数学分支,则是近年来受计算机科学蓬勃发展的刺激和影响.它从计算机的科学研究中获取了广阔的发展空间.本书是原书上册的再版,所以它仅仅是基础理论部分.基础是重要的,但毕竟不是全体.在它的出版后松一口气之余,剩下部分的改写便自然而然地提到日程上来了.我计划在新的一册“算法与复杂性分析:组合算法”一书中继续完成它.

作　者

1991. 1. 20



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

# 目　　录

# 第一章　排 列 与 组 合

## §1　加法法则与乘法法则

### 1. 引论

组合数学是一既古老而又年轻的数学分支. 说它古老, 因为它所研究的问题有的可追溯到很久很久以前. 然而, 它之所以形成一新的分支, 那还是最近若干年的事, 是受到电子计算机蓬勃发展影响的结果.

什么是"组合数学"?要给它下一个正确的定义是不容易的. 它还在发展中, 本书讨论的内容实际上是属于"组合分析"范畴.

组合分析研究的主要内容是计数和枚举. 即计算具有某种特性的对象有多少, 并进而把它完全列举出来.

"计数"在许多方面有其重大作用, 比如概率论, 要计算发生具有某种性质的事件的概率等于多少, 往往首先要计算出具有该性质的事件的数目; 又如物理学家要研究物质的物理性质, 就要计算电子被分配在不同能级的不同状态数有多少. 对于计算机科学工作者, 计数还有其特殊的意义: 计算机科学是研究算法的一门科学, 必须要对算法所需要的计算量和存储单元作出估计, 即所谓算法的时间复杂性和空间复杂性分析, 这属于"组合算法"的研究内容. 组合分析和组合算法的关系亦如数学分析和计算方法的关系, 组合分析是组合算法的基础, 即为算法与算法分析作准备.

### 2. 加法法则与乘法法则

加法法则与乘法法则是在计数研究中最常用也是最基本的两

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

个法则. 以下设事件 A 与事件 B 是不同的两类事件.

(a) 加法法则:

设事件 A 有 m 种产生方式, 事件 B 有 n 种产生方式, 则“事件 A 或事件 B”有 $m+n$ 种产生方式.

例如大于零而比 10 小的偶数有 4 个, 即(2, 4, 6, 8); 大于零而小于 10 的奇数有 5 个, 即(1, 3, 5, 7, 9); 则大于零小于 10 的整数有 $4+5=9$ 个, 即(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). 这里事件 A 指的是大于零小于 10 的偶数; 事件 B 指的是大于零小于 10 的奇数, 大于零小于 10 的整数, 不外乎或为偶数或为奇数两种可能, 即属于 A 或属于 B.

(b) 乘法法则:

若事件 A 有 m 种产生方式, 事件 B 有 n 种产生方式, 则“事件 A 与事件 B”有 $mn$ 种产生方式.

例 1. 设一个符号由两个字符组成, 第 1 个字符有 a, b, c, d, e 五种方式, 第 2 个字符有 1, 2, 3 三种方式. 则根据乘法法则, 该符号具有 $5\times 3=15$ 种方式. 即

$$a1, b1, c1, d1, e1,$$
$$a2, b2, c2, d2, e2,$$
$$a3, b3, c3, d3, e3.$$

例 2. 从 A 到 B 有 3 条不同的道路, 从 B 到 C 有 2 条不同的道路, 则从 A 经 B 到 C 的道路数

$$n=3\times 2=6.$$

图 1-1-1

例 3. 求比 10000 小的正整数中含有数字 1 的数的个数.

解: 所有由{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 9 个数字组成的每一位都

有 9 种出现方式, 根据乘法法则, 由 9 个数字组成的 4 位数个数等于 $9\times 9\times 9\times 9=81^2=6561$, 其中 0000 不属于正整数. 故比 10000 小不含数字 1 的 4 位正整数个数等于 $6561-1=6560$.

所以小于 10000 含有数字 1 的数的个数为 $9999-6560=3439$.

# § 2 排列与组合

定义: 从 $n$ 个不同的元素中, 取 $r$ 个按次序排列, 称为从 $n$ 中取 $r$ 个排列, 其排列数记以 $P(n,r)$.

定义: 从 $n$ 个不同元素中, 取出 $r$ 个而不考虑其次序时, 称为从 $n$ 个中取 $r$ 个组合, 其组合数记以 $C(n,r)$, 或记以 $\binom{n}{r}$.

例如从 100 个成员中选出 20 人编成一小组, 不必考虑先后次序, 所以是一个组合问题, 共有 $C(100,20)$ 种方案. 如若考虑 100 名选手中选出 20 名依顺序排成一个队. 则有考虑次序的必要, 故是排列问题, 共有 $P(100,20)$ 种方案.

例. 从 $A,B,C,D$ 中取 3 个组合, 则有以下几种组合形式: $\{A,B,C\},\{A,B,D\},\{A,C,D\},\{B,C,D\}$. 若从 $A,B,C,D$ 中取 3 个排列, 则上面所得到的 4 组, 再加以排列, 得

$$\begin{aligned}&ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA,\\&ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA,\\&ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA,\\&BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB.\end{aligned}$$

从 $n$ 个中取 $r$ 个排列的典型模型是把 $n$ 个有标志的球, 取 $r$ 个放到 $r$ 个有区别的盒子里, 每盒一个, 如下列的 $r$ 个盒子:

| 供选取球数: | $\boxed{(1)}$ | $\boxed{(2)}$ | … | $\boxed{(r)}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $n$ 个 | $n-1$ 个 | | $n-r+1$ 个 |

如上图所示,第一个盒子有 $n$ 个球可供选取,第 2 个盒子仅有 $n-1$ 个球可供选取,……,最后一个盒子则只有 $n-r+1$ 个球可供选择.根据乘法法则,应有

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1-2-1}$$

(1-2-1)是 $P(n,r)$ 的计算公式,当 $r=n$ 时有

$$P(n,n)=n!.$$

如果球有标志,盒子是完全一样的,而且不考虑其次序,则是从 $n$ 个取 $r$ 个的组合问题.即组合的典型问题是把 $n$ 个有标志的球,取 $r$ 个放到 $r$ 个无区别的盒子里,每盒一个.自然也可以看作是取 $r$ 个无标志的球,放到 $n$ 个有区别的盒子,每盒一球的方案数(不考虑次序).对每一个方案再考虑盒子的排列次序,可得 $P(n,r)$ 与 $C(n,r)$ 的关系:

$$P(n,r)=r!C(n,r),$$

$$\therefore\qquad C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}. \tag{1-2-2}$$

下面举出若干例子,通过它能熟练灵活而且正确地掌握排列组合、加法法则及乘法法则等概念.

例 1. 有 5 本日文书,7 本英文书,10 本中文书,①从中取两本不同文字的书,问有多少种方案?②若取两本相同文字的,又有多少种方案?③任取两本,不问是否相同文字,有多少种方案?

解:① 取两本不同文字,可以有日英,中日,中英三种不同的组合法.根据乘法法则有:

日、英各一本的方案数 $=5\times7=35$ 种,

中、日各一本的方案数 $=10\times5=50$ 种,

中、英各一本的方案数 $=10\times7=70$ 种.

依据加法法则可得:

取两本不同文字的方案数 $N_1 = 35 + 50 + 70 = 155$ 种.

② 取两本相同文字的, 可有两本日文, 两本英文, 两本中文三种, 根据加法法则得

$$N_2 = C(5, 2) + C(7, 2) + C(10, 2)$$
$$= 10 + 21 + 45 = 76 \text{ 种}.$$

③ 因为不问是什么文字, 相当于从 22 本书中取 2 本组合, 故有方案数为

$$N_3 = C(22, 2) = \frac{22 \times 21}{2} = 231 \text{ 种}.$$

或根据加法法则得 $N_3 = N_1 + N_2 = 155 + 76 = 231$ 种.

例 2. 从 1～300 之间任取 3 个不同的数, 使得这 3 个数的和正好被 3 除尽, 问共有几种方案?

解: 被 3 除的余数不外乎 ①余 0, 即被 3 除尽; ②余 1; ③余 2. 故 1～300 的 300 个数可分成 3 组:

$$A = \{1, 4, 7, \cdots, 298\};$$
$$B = \{2, 5, 8, \cdots, 299\};$$
$$C = \{3, 6, 9, \cdots, 300\}.$$

显然, 集合 A 的数被 3 除余 1, 集合 B 的数被 3 除余 2, 集合 C 的数被 3 除尽.

任取三个数其和正好被 3 除尽的有如下四种情况:

① 三个数同属于集合 A, 应有 $C(100, 3)$ 种方案:

② 三个数同属于集合 B, 应有 $C(100, 3)$ 种方案:

③ 三个数同属于集合 C, 应有 $C(100, 3)$ 种方案:

④ 三个数分别属于集合 A, B, C, 根据乘法法则应有 $100^3$ 种方案。

根据加法法则, 任取三个不同的数, 它的和正好被 3 除尽的方案数应为

$$N = 3C(100, 3) + 100^3 = 3 \times \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} + 1000000$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$= 3\times 161700 + 1000000 = 485100 + 1000000$$
$$= 1485100.$$

**例** 3.　**某车站有** 1 **到** 6 **六个入口处**, **每个入口处每次只能进一个人**, **问一小组** 9 **个人进站的方案数有多少**?

**解法** 1:　**若把从第** 1 **入口处到第** 6 **入口处依入口顺序排列**, **可得** 9 **个人的一种排列**, **可是哪几个人从哪个入口处入口的讯息消失了**. **为此相邻两个入口的人员之间加入一个标志**, **当然标志是没有区别的**, **关键在于标志所在的位置**. **故问题导致若** 14 **个元素中有** 5 **个元素无区别**, 9 **个不相同**, **求其不相同的排列数**. **例如从** 1—14 **的** 14 **个数中任取** 5 **个**, **设为**(3, 5, 9, 11, 13), **对应一种入口顺序示意图**:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} * & * & \bigcirc & * & \bigcirc & * & * & * & \bigcirc & * & \bigcirc & * & \bigcirc & * \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & 3 & & 5 & & & & 9 & & 11 & & 13 & \end{array}$$

**其中**○**为标志**, $* * \cdots *$ **为** 9 **个人的一种排列**, **可见排列的前两个人从第** 1 **入口处入口**, **第** 3 **个人从第** 2 **个入口处入口**, ….

**故进站的方案数** $N = 9!\,C(14, 5) = \dfrac{14!}{5!\,9!}9!$

$$= \frac{14!}{5!} = 726485760.$$

**解法** 2:　**和解法** 1 **相同**, **在相邻两入口处入口的人员之间加一个标志**, **问题导致** 14 **个对象的全排列中**, **由于其中** 5 **个标志是无区别的**, **故其重复度为** 5!. **于是得**:

**进站的方案数**　$N = 14!/5!$.

**解法** 3:　**第** 1 **个人有** 6 **种选择方案**, **即可从六个入口处中的一个入口**. **第** 2 **个人则有** 7 **种选择方案**, **因为他选择和第** 1 **个人相同的入口处时**, **还有在第** 1 **人的前面进站还是在第** 1 **个人的后面进站之分**. **同样的道理**, **第** 3 **个人则有** 8 **种选择**, ……. **依此类推**,

第 9 个人有 14 种选择方案. 根据乘法法则可得:

进站的方案数 $N = 6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11\times 12\times 13\times 14$.

例 4. 求能除尽 1400 的正整数数目(1 除外).

解: $1400 = 2^3 5^2 7$.

故除尽 1400 的数应为

$$2^l 5^m 7^n,$$

其中 $0\leq l\leq 3$, $0\leq m\leq 2$, $0\leq n\leq 1$, 但排除 $l=m=n=0$.
根据乘法法则可得, 除尽 1400 的数的数目应为

$$N = (3+1)\times(2+1)\times(1+1)-1$$
$$= 4\times 3\times 2-1 = 23.$$

例 5. 求 5 位数中至少出现一个 6, 而被 3 整除的数的个数.

因 $k$ 位十进制数 $p_1p_2\cdots p_k$ 被 3 整除的充要条件是 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 被 3 整除, 根据这个道理分别讨论如下:

解法 1: ① 从左向右计, 最后一个 6 出现在第 5 位, 即 $p_5=6$. 第 2, 3, 4 位数可以是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 十数字之一. 但第 1 位数不能任意, 为了保证 5 位数之和被 3 整除, $p_1$ 只有 3 种可能. 根据乘法法则, 5 位数中最后一位是 6, 而被 3 整除的数有 $3\times 10^3 = 3000$ 个.

② 最后一个 6 出现在第 4 位, 即 $p_4=6$. 第 5 位数 $p_5$ 只有 9 种可能; 第 2, 3 位各有 10 种可能, 为了保证被 3 整除, 第 1 位数 $p_1$ 有 3 种方案, 根据乘法法则可得, 属于这一类的 5 位数有 $3\times 10^2\times 9 = 2700$ 个.

③ 最后一个 6 出现在第 3 位, 即 $p_3=6$. 被 3 整除的数应有 $3\times 10\times 9^2 = 2430$ 个.

④ 最后一个 6 出现在第 2 位, 被 3 整除的数应有 $3\times 9^3 = 2187$ 个.

⑤ 第 1 位 $p_1=6$. 而被 3 整除的数应有 $3\times 9^3 = 2187$ 个.

根据加法法则, 5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有 $3000+2700+2430+2187+2187=12504$ 个.

解法 2: 5 位数共 90000 个, 其中被 3 整除的有 30000 个.

30000 个被 3 整除的数中不出现 6 的数, 第 1 位有 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 八种可能; 第 2, 3, 4 位则有九种可能; 最后一位有 3 种可能. 故 5 位数中被 3 整除而不出现 6 的数应有

$$3\times 8\times 9^3=17496 \text{ 个}.$$

因此 5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有

$$30000-17496=12504 \text{ 个}.$$

例 6. 求 1000! 的末尾有几个零.

$1000!=1000\times 999\times 998\times\cdots\times 3\times 2\times 1$, 此问题在于求把 1000! 分解成素数的乘积时, 2 和 5 的幂是多少? 末尾的零的个数等于 2 和 5 的幂中较小的一个. 故问题导致对从 1 到 1000 的整数中求是 $2^k$ 和 $5^l$ 型数倍数的数的个数.

不超过 1000 的正整数中是 5 的倍数的数共 200 个, 其中有 40 个是 $25=5^2$ 的倍数, 40 个中又有 8 个是 $5^3$ 的倍数, 8 个中还有 1 个是 $5^4$ 的倍数.

故若乘积 1000! 分解成素数的乘积, 其中 5 的幂应为 $200+40+8+1=249$.

不难判定其中 2 的幂必然超过 249, 故 1000! 的末尾有 249 个零.

## §3　一一对应

“一一对应”概念在数学研究中经常见到. 组合数学在研究计数问题时, 更是常用这种办法来简化我们的计算. 比如已知事件 A 和事件 B 一一对应, 要对事件 A 计数时, 可改为对事件 B 计数, 假如事件 B 的计数比 A 容易, 则比较困难的事件 A 的计数从而获

得解决. 下面先举几个例子, 在以后的讨论中还将不止一次地用到类似的办法.

例 1. 设某地的街道把城市分割成矩形方格, 每个方格叫它做块. 某甲从家里出发上班, 向东要走过 $m$ 块, 向北要走过 $n$ 块. 问某甲上班的路径有多少种?

问题可化成图 1-3-1 的方格图, 每格一单位, 求从 $(0, 0)$ 点到 $(m, n)$ 点的路径数.

这里所谓"路径"指的是不允许向后退, 即不允许逆着 $x$, $y$ 的正向走.

设从 $(0, 0)$ 点开始向水平方向前进一步为 $x$, 垂直方向上升一步为 $y$. 于是从 $(0, 0)$ 到 $(m, n)$ 点, 水平方向要走 $m$ 步, 垂直方向要走 $n$ 步, 总和为 $m + n$ 步. 一条到达 $(m, n)$ 点的路径对应一由 $m$ 个 $x$, $n$ 个 $y$ 组成的一个排列:

图 1-3-1

$$\underbrace{xxy\cdots xy}_{m\text{ 个 }x,\ n\text{ 个 }y}.$$

反过来 $m$ 个 $x$, $n$ 个 $y$ 的任一排列对应一条从 $(0, 0)$ 到 $(m, n)$ 的路径. 所以从 $(0, 0)$ 点到 $(m, n)$ 点的路径和 $m$ 个 $x$, $n$ 个 $y$ 的排列一一对应, 故所求的路径数为

$$N = C(m + n, m).$$

例 2. $C_nH_{2n+2}$ 是碳氢化合物, 随着 $n$ 的不同有下列不同的枝链:

这说明对应于 $C_nH_{2n+2}$ 的枝链是有 $3n+2$ 个顶点的一棵树, 其中 $n$ 个顶点与之关联的边数为 4; 其它 $2n+2$ 个顶点是叶子. 对于

图 1-3-2

这样结构的每一棵树, 就对应有一种特定的化合物. 从而可以通过研究具有上述性质的树找到不同的碳氢化合物 $C_nH_{2n+2}$.

例 3. 在 100 名选手之间进行淘汰赛(即一场的比赛结果, 失败者退出比赛), 最后产生一名冠军, 问要举行几场比赛?

解: 第 1 轮要进行 50 场比赛, 留下 50 名选手;

第 2 轮要进行 25 场比赛, 留下 25 名选手;

第 3 轮要进行 12 场比赛, 1 名选手轮空, 留下 13 名选手;

第 4 轮要进行 6 场比赛, 1 名选手轮空, 留下 7 名选手;

第 5 轮要进行 3 场比赛, 1 名选手轮空, 留下 4 位选手;

第 6 轮要进行 2 场比赛, 留下 2 名选手:

最后一场决赛, 产生一名冠军.

共举行的比赛场数$=50+25+12+6+3+2+1=99$场.其实由100名选手最后产生一名冠军,要淘汰掉99人,一场比赛淘汰一名选手,两者一一对应,故立即可得比赛场数应为99场.

下面介绍一个图论中有名的问题,即计算$n$个有标号的顶点的树的数目.即对$n$个顶点$v_1,v_2,\cdots,v_n$用$n-1$条边把它们连接起来,问有多少种方案?

定理(Cayley):$n$个有标号的顶点的树的数目等于$n^{n-2}$.

证明:定理的证明就是采用了一一对应的方法。

假设这$n$个顶点的标号为$1,2,\cdots,n$,$T$是其中一棵树.$T$的树叶中标号最小的设为$a_1$,其相邻点为$b_1$,移去$a_1$点和边$(a_1,b_1)$;在剩下的$n-1$个顶点的树中再寻找标号最小的树叶,设为$a_2$,其相邻的顶点设为$b_2$,移去顶点$a_2$及边$(a_2,b_2)$;….继续以上的步骤直到剩下一条边为止.由于树枝边数为$n-1$,故共进行了$n-2$次,得序列

$$b_1b_2\cdots b_{n-2}.$$

通过上述的规则,树$T$对应了一$n-2$个数的序列:$b_1b_2\cdots b_{n-2}$.这样所得序列不都是由不同的$n-2$个数组成.

反之,给了一$n-2$个数的序列

$$b_1b_2\cdots b_{n-2},\tag{1}$$

可以找到一棵树$T$与之对应,办法如下:从序列

$$1,2,3,\cdots,n\tag{2}$$

中找出第1个不在序列(1)中出现的数,显然这个数就是$a_1$,建立边$(a_1,b_1)$.从序列(1)中消去$b_1$,从序列(2)中消去$a_1$,在余下的序列(1)和(2)中继续以上的过程,直到序列(1)空了为止.这时序列(2)留下两个数设为$a_i,b_i$,连接顶点$a_i,b_i$便得一棵树.

这样,$n$个标号顶点的树$T$和$n-2$个数$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$组成的序列(1)建立了一一对应关系.根据乘法法则,序列(1)的数目为$n^{n-2}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com