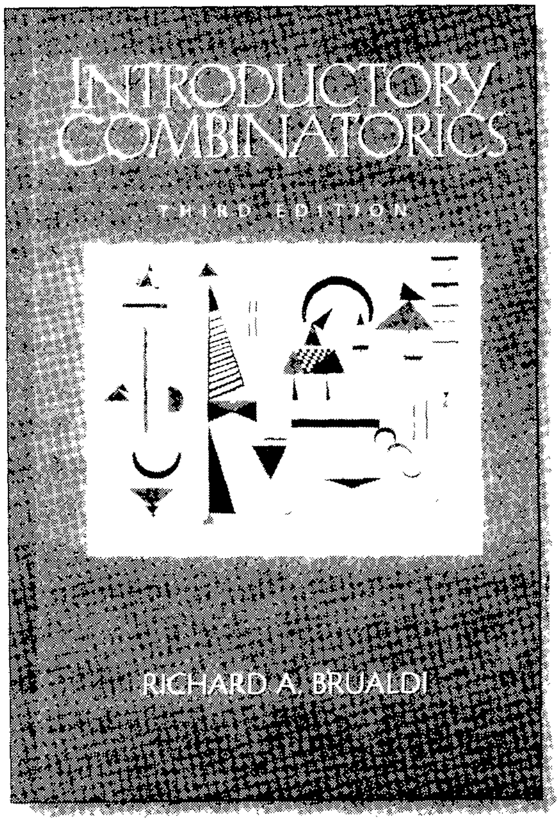
计算机科学丛书

组合数学

(美) Richard A. Brualdi 著
威斯康星—麦迪逊大学
冯舜玺 罗平 裴伟东 译 卢开澄 冯舜玺 校



Introductory Combinatorics

Third Edition

机械工业出版社
China Machine Press

本书是一本介绍组合数学的教材，全书从组合学问题讲起，论述了鸽巢原理、排列与组合、二项式系数、容斥原理及应用，递推关系和生成函数、特殊计数序列、二分图中的匹配、组合设计、图论、有向图及网络、Pólya记数法等。本书附有大量习题及解答。

本书适合作为相关专业本科生与研究生的教材。

本书版权登记号：图字：01－2000－3117

图书在版编目（CIP）数据

组合数学/（美）布鲁迪（Brualdi，R.A.）著；冯舜玺，罗平，裴伟东译．－北京：机械工业出版社，2001.11

（国外经典教材）

书名原文：Introductory Combinatorics，3E

ISBN 7－111－07569－2

Ⅰ.组…　Ⅱ.①布…②冯…　③罗…④裴…　Ⅲ.组合数学　Ⅳ.TP.0157

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第019389号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：温丹丹

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002年1月第1版·2004年2月第4次印刷

787mm×1092mm　1/16·25.75印张

印数：10001-12000册

定价：38.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

出版者的话

文艺复兴以降，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，计算机学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭橥了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的计算机产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对计算机教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短、从业人员较少的现状下，美国等发达国家在其计算机科学发展的几十年间积淀的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀计算机教材将对我国计算机教育事业的发展起积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章图文信息有限公司较早意识到“出版要为教育服务”。自 1998 年始，华章公司就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过几年的不懈努力，我们与 Prentice Hall，Addison-Wesley，McGraw-Hill，Morgan Kaufmann 等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从它们现有的数百种教材中甄选出 Tanenbaum，Stroustrup，Kernighan，Jim Gray 等大师名家的一批经典作品，以“计算机科学丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。大理石纹理的封面，也正体现了这套丛书的品位和格调。

“计算机科学丛书”的出版工作得到了国内外学者的鼎力襄助，国内的专家不仅提供了中肯的选题指导，还不辞劳苦地担任了翻译和审校的工作；而原书的作者也相当关注其作品在中国的传播，有的还专诚为其书的中译本作序。迄今，“计算机科学丛书”已经出版了近百个品种，这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍，为进一步推广与发展打下了坚实的基础。

随着学科建设的初步完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外计算机教材的需求和应用都步入一个新的阶段。为此，华章公司将加大引进教材的力度，在“华章教育”的总规划之下出版三个系列的计算机教材：针对本科生的核心课程，剔抉外版菁华而成“国外经典教材”系列；对影印版的教材，则单独开辟出“经典原版书库”；定位在高级教程和专业参考的“计算机科学丛书”还将保持原来的风格，继续出版新的品种。为了保证这三套丛书的权威性，同时也为了更好地为学校和老师们服务，华章公司聘请了中国科学院、北京大学、清华大学、国防科技大学、复旦大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、中国科技大学、哈尔滨工业大学，西安交通大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京邮电大学、中山大学、解放军理工大学、郑州大学、湖北工学院、中国国家信息安全测评认证中心等国内重点大学和科研机构在计算机的各个领域的著名学者组成“专家指导委员会”，为我们提供选题意见和出版监督。

“国外经典教材”是响应教育部提出的使用外版教材的号召，为国内高校的计算机本科教学度身订造的。在广泛地征求并听取丛书的“专家指导委员会”的意见后，我们最终选定了这20多种篇幅内容适度、讲解鞭辟入里的教材，其中的大部分已经被M. I. T.，Stanford，U. C. Berkley，C. M. U. 等世界名牌大学采用。丛书不仅涵盖了程序设计、数据结构、操作系统、计算机体系结构、数据库、编译原理、软件工程、图形学、通信与网络、离散数学等国内大学计算机专业普遍开设的核心课程，而且各具特色——有的出自语言设计者之手、有的历三十年而不衰、有的已被全世界的几百所高校采用。在这些圆熟通博的名师大作的指引之下，读者必将在计算机科学的宫殿中由登堂而入室。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证，但我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。教材的出版只是我们的后续服务的起点。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

电子邮件：hzedu@hzbook.com
联系电话：(010) 68995265
联系地址：北京市西城区百万庄南街1号
邮政编码：100037

专家指导委员会

（按姓名笔画顺序）

译 者 序

随着计算机性能的持续提高及其应用的深入普及，作为古老学科的组合数学自 20 世60 年代以来得到了急速的发展。组合数学的思想和技巧不仅影响着数学的许多分支，而广泛应用于社会科学、信息论、生物科学以及其他传统自然科学领域。组合数学的实用性表现在，每当我们求解实际问题编制计算机程序的时候，它往往不仅提供具体的算法，而还指导对算法运行效率和存储需求的分析。如今，我国许多高校的不少专业开设了组合数课程，但是，适合的教材并不多。本书正好是一本不可多得的优秀教材，它在国外曾经多再版，也被我国数学工作者频繁引用。能够有机会把它介绍给我国的广大读者，我们感到分荣幸。遗憾的是由于时间和水平的限制，不足之处在所难免。我们期待着广大读者对本的批评和指正。

全书共有 14 章内容，书末附有对各章习题的部分提示和解答以及一个关于概念和术的索引。其中，第 13、14 章的答案与提示由罗平翻译；第 11、12 章由裴伟东翻译；冯舜翻译本书其余部分并进行了审校。

我们非常感谢卢开澄教授对翻译本书的热情鼓励和积极支持。赵平女士对本书许多地提出了有益的意见和建议，我们衷心感谢她认真负责的态度和严肃、细心的工作。此外，们还要感谢班春虹同志的热心帮助，她在百忙中校对了前 4 章的初稿。

译 者

2001.3.30

前　　言

本书的第 3 版重写了许多章节并增添了一些新的材料及习题。主要的改动有：

在第 4 章添加了偏序和等价关系一节。

第 5 章增补了再论偏序集一节，证明了 Dilworth 定理及其对偶形式。

第 8 章加写了正整数分拆的新内容。

在第 11 章——本书讨论图论的第一章，树被定义为移去其中任意一边后都不再连通的连通图，同时撤消了关于有向图的一节。

第 12 章是新加的一章，讨论有向图和网络。这一章给出了 Ford 和 Fulkerson 最大流最小割定理的证明，于是，第 9 章的 Menger 定理和 König 定理则作为推论而由此导出。

原在第 2 版第 12 章对于图论的一些基本数字的讨论改放在第 13 章。

原 Pólya 计数法的第 13 章改为第 14 章。

第 3 版含有足够两个学期课程使用的材料。第一学期可侧重于计数法，第二学期则侧重图论。每章内容及各章之间的关系简述如下：

第 1 章是引论性的一章。第 2 章是鸽巢原理，该原理至少也要在简缩的形式下讨论。但是，这对于后面鸽巢原理的某些困难的应用以及 Ramsey 定理的理解却无济于事。第 3 章到第 8 章主要涉及计数结果序列的某些性质和计数技巧。第 4 章是关于排列和组合的生成方法，并且正如上面所述，它还包括对偏序和等价关系的介绍。然而，除第 5 章讨论偏序集的那一节外，第 4 章后面各章基本上都与第 4 章无关，因此第 4 章可以略去或者压缩。第 5 章讨论二项式系数的性质，第 6 章讲述容斥原理。第 7 章比较长，讨论递推关系的求解及计数中生成函数的使用。第 8 章主要涉及 Catalan 数、第一类和第二类 Stirling 数以及分拆数。其后各章与第 8 章无关。第 9 章讨论二分图（偶图）的匹配问题。虽然本书是在图论之前介绍二分图的，但是后面图论各章基本上与这一章没什么关系。除去匹配理论对拉丁方的应用外，讨论组合设计的第 10 章独立于其余各章。不过，在 10.4 节末用到了第 9 章发展起来的匹配理论。第 11 章和第 13 章涉及到对图论的广泛讨论，其重点放在图论算法方面。第 12 章讲述有向图和网络。第 14 章处理在置换群作用下的计数问题，这里确实用到了先前许多的计数概念。除去最后一个例子外，本章独立于图论和组合设计各章。在第 14 章之后，给出了本书中近 600 多道练习题的部分解答和提示。

有一些习题旁边注有星号“*”，表明它们更具挑战性。在证明和例子的末尾均标有结束记号□。

确定阅读本书的前提条件颇为困难，或许本书更适合那些最好是成功地学习过微积分以及线性代数初级课程的读者。这里对微积分的使用限制到最小程度，线性代数用得也很少，因此对于不熟悉它的人们阅读本书不应该有任何问题。

我非常感谢鼓励我修订第 3 版以及向我提供有益建议的许许多多的人。为了避免遗漏其中某位朋友，我将只提及 Leroy F. Meyers 和 Tom Zaslavsky，他们每人都向我提供了广泛而详尽的建议。我希望本书继续反映我对组合数学的热爱以及我教授这门学科的热情。

最后，感谢我亲爱的妻子 Mona，是她给我的生活带来幸福、气魄和激情。

Richard A. Brualdi

目　录

第1章　什么是组合数学

组合学问题在生活中随处可见。例如，计算下列赛制下总的比赛次数：n 个球队参赛，每队只和其他队比赛一次。创建幻方。在纸上画一个网络，用铅笔沿着网络的线路走，在笔不离开纸面且不重复线路的条件下，笔画出网络图。在玩扑克牌游戏中，计算满堂红（full house）牌的手数，以确定出现一手满堂红牌的几率。所有这些都是组合学问题。正如人们想到的，组合数学的历史渊源扎根于数学娱乐和游戏之中。过去研究过的许多问题，不论出于消遣还是出于对其美学的考虑，如今在纯科学和应用科学中都具有高度的重要性。今天，组合数学是数学的一门重要分支，而且它的影响还在继续扩大。组合数学自60年代以来急速发展的部分原因就在于计算机在我们的社会中所发挥的重要影响，而且这种影响还在继续发挥。由于运算速度的持续增加，计算机已经能够解决大型问题，这在以前是不可能做到的。然而计算机不能独立运行，它需要编程来控制。这些程序的基础往往是求解问题的组合学算法。对于这些算法，运行时间效率和存储需求分析需要更多的组合学思想。

组合数学近期发展的另一个原因是它对于那些过去很少与数学正式接触的学科的适用性。由此我们发现，组合数学的思想和技巧不仅正在用于数学应用的传统自然科学领域，而且也用于社会科学、生物科学、信息论等领域。此外，组合数学和组合学思想在许多数学分支中已经变得越来越重要。

组合数学涉及到将一个集合的物体排列成满足一些指定规则的格式。如下两类一般性问题反复出现：

- *排列的存在性*　如果有人想要排列一个集合的成员使得某些条件得以满足，那么这样一种排列是否可行根本就不是显而易见的。这是最根本的问题。如果这种排列不总是可能的，那么我们要问，这种排列在什么样的（必要和充分）条件下能够实现？
- *排列的计数和分类*　如果一个指定的排列是可能的，那么就会存在多种方法去实现它。此时，人们就可以计数并将它们分类。

虽然对任何组合问题都可以考虑其存在性和计数问题，但在实践中常常发生的却是：如果存在性问题需要广泛地研究，那么计数问题则是非常困难的。然而，如果指定的排列问题的存在性容易解决，那么计算实现该排列的方法的数目则是可能的。在例外的情形下（即当它们的数目较小时），这些排列可以被列出来。理解列出所有的排列与确定它们的数目之间的区别很重要。一旦这些排列被列出，它们就可通过与整数集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 之间建立一一对应而被数出，其中 n 是某个整数。我们计数的方法就是：1，2，3，…。但是，我们主要关心的是事先不列出指定类型的排列而确定它们的数目的方法。当然，这些排列的总数也许很大以至于不可能把它们都列出来。概括地说，许多组合学问题常呈现下列形式：

“能否排列……？”

“存在一个……吗？”

“能用多少方法……？”

“计算……的数目。”

与上述问题同时出现的另外两种组合学问题是：

- *研究一个已知的排列* 当人们建立起满足某些指定条件的一个排列（可能不容易）以后，可能要考察这个排列的性质和结构。这样的结构可能会涉及到分类问题，也许还涉及到一些潜在的应用，它还可能牵扯到下面的问题。
- *构造一个最优的排列* 如果有可能存在多于一个的排列，人们也许想要确定满足某些优化准则的一个排列，即找出某种规定意义下的“最好的”或“最优的”的排列。

因此，组合数学可以一般地描述为：*组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科*。虽然某些离散结构是无限的，但本书一般把离散视为有限的。

验证发现的组合数学主要工具之一为*数学归纳法*。归纳是一个强有力的过程，在组合数学中尤其是如此。用数学归纳法证明一个强结果常常比证明一个弱结果更容易。虽然在归纳阶段验证多一些是必要的，但归纳假设却是更强的一步。数学归纳法的部分技巧就是找到假设的正确的平衡来进行归纳。我们假设读者熟悉归纳法；尤其读完本书以后更会如此。

然而，一般说来，许多组合数学问题的解决需要某些特别的论证。人们不能总是退到已知的结果或公理那里。人们必须研究情况，挖掘洞察力，并运用他们灵活的谋略来解决问题。这里并不是说不存在可以使用的一般原则和方法。比如，容斥原理、所谓的鸽巢原理、递归关系和生成函数的方法、Burnside 定理以及 Pólya 计数法等就是一般的原则和方法，我们将在后面各章讨论这些原则和方法。但是，洞察到这些原则和方法能够使用以及如何使用常常需要智慧。这样的经验在解决组合问题时是非常重要的。也就是说，*用组合数学解决问题一般说来和用数学解决问题一样，你解决的问题越多，那么能够解决下一个问题的可能性就越大*。

为了使前面的讨论更加具体，现在让我们转到组合问题的几个实例。这些例子从相对简单（但需要解题的灵感）的问题直到其解曾是组合数学中主要成就的那样一些问题。有些问题在后面的章节中还要更详细地讨论。

1.1 例：棋盘的完美覆盖

考虑一张普通的国际象棋棋盘，它被分成 8×8（8 行 8 列）的 64 个正方形。设有形状一样的多米诺牌，每张牌恰好覆盖棋盘上相邻的两个方格。那么，是否能够把 32 张多米诺牌摆放到棋盘上，使得任何两张多米诺牌均不重叠，每张多米诺牌覆盖两个方格，并且棋盘上所有的方格都被覆盖住？我们把这样一种排列称为棋盘被多米诺牌的*完美覆盖*。这是一个简单的排列问题，人们能够很快构造许多不同的完美覆盖。但是，计算不同的完美覆盖的总数就不是一件容易的事情了，不过，这还是有可能做到的。这个数由 Fischer[㊀] 在 1961 年发现，它是 $12\,988\,816=2^4\times(901)^2$。这种普通的国际象棋棋盘可以用排成 m 行 n 列的 mn 个方格的一般棋盘代替。此时，这种棋盘的完美覆盖就未必存在了。比如，3 行 3 列的棋盘就确实不存在完美覆盖。那么，对于什么样的 m 和 n 存在完美覆盖呢？不难看出，当且仅当 m 和 n 中至少有一个是偶数时，$m\times n$ 棋盘存在完美覆盖。或者说，当且仅当棋盘的方格数为偶数时，$m\times n$ 棋盘存在完美覆盖。Fischer 已经得出涉及到三角函数的用来计算 $m\times n$ 棋盘不同完美覆盖数的更一般公式。这个问题等价于分子物理学中的一个著名问题，即

㊀ M.E.Fischer：Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice，*Physical Review*，124（1961），1664-1672。

所谓的二聚物问题。该问题起源于对表面双原子分子（二聚物）的吸收的考查。棋盘上的那些方格对应这些分子，而多米诺牌则对应二聚物。

再来考查 8×8 的国际象棋棋盘并用一把剪刀剪掉棋盘一副对角上的两个方格，总共剩下 62 个方格。那么，是否能够排列 31 张多米诺牌来得出对这副被剪过的棋盘的完美覆盖？虽然这副被剪过的棋盘与 8×8 棋盘非常接近，且后者有一千二百多万个完美覆盖，但是，这副被剪过的棋盘却没有完美覆盖。其证明是简单而巧妙的组合推理的一个实例。在一副普通的 8×8 棋盘上交替地将方格涂成黑色和白色，则其中 32 个方格是白色的，而另外 32 个方格是黑色的。如果我们剪掉棋盘一副对角上的两个方格，那么我们就剪除了同样颜色的两个方格，比如两个白色方格。这就变成了 32 个黑方格和 30 个白方格。但是，每张多米诺牌需要盖住一个黑方格和一个白方格，于是，31 张不重叠的多米诺牌则盖住 31 个白方格和 31 个黑方格。因此，这副被剪过的棋盘没有完美覆盖，上述推理可总结为

$$31\boxed{\text{黑}\,|\,\text{白}}\neq 32\boxed{\text{黑}}+30\boxed{\text{白}}$$

更一般地，可以将 $m\times n$ 棋盘上的方格交替涂成黑色和白色，切除一些方格，得到一块被切过的棋盘。这块被切过的棋盘什么时候能有一个完美覆盖？为使完美覆盖存在，这块被切过的棋盘必须具有相等的黑方格数和白方格数。但是，这个条件却不是充分的，图 1-1 中的例子指出了这一点。

白	×	白	黑	白
×	白	黑	×	黑
白	黑	×	黑	白
黑	白	黑	白	黑

图 1-1

因此，我们要问：一块被切过的棋盘具有完美覆盖的必要和充分条件是什么？我们将在第 9 章讨论这个问题并将应用二分图中的匹配理论得到完全的解决方案。这个问题存在一个实际的公式表示，但它是以指派申请人去做他们有资格胜任的工作的术语给出的。

对于 $m\times n$ 棋盘被多米诺牌完美覆盖的问题，还存在另外一种一般化的方法。设 b 是一个正整数。我们用由 b 个 1×1 的方格并排连接成的 $1\times b$ 的方格条来代替多米诺牌。我们称这些方格条为 b-牌（bomino）。因此，一张 b 牌可以盖住一行上或是一列上的 b 个连续的方格。图 1-2 画出了一张 5-牌。一张 2-牌就是上面提到的普通的多米诺牌。1-牌叫做单牌（monomino）。

$m\times n$ 棋盘被 b-牌的一个*完美覆盖*是 b-牌在棋盘上的这样一个排列，使得盘上没有两张牌重叠，每一条 b-牌盖住盘上的 b 个方格，并且盘上的所有方格都被盖住。那么，何时 $m\times$ 棋盘将具有一个 b-牌的完美覆盖？既然盘上的每个方格恰被一条 b-牌覆盖，于是，要想使覆盖成为完美覆盖，b 就必须是 mn 的一个因子。的确，完美覆盖存在的一个充分条件就是：b 是 m 的一个因子或 b 是 n 的一个因子。因为，如果 b 是 m 的一个因子，我们就可对 n 列的每一列用 m/b 个 b-牌铺盖并进而完成对 $m\times$ 棋盘的完美覆盖，而如果 b 是 n 的一个因子，我们也可对 m 行的每一行用 n/b 个 b-牌铺盖，从而完成对该棋盘的完美覆盖。这样的充分条件是否也是完美覆盖存在的必要条件呢？现在设 b 是素数且存在 $m\times n$ 棋盘被 b-牌的完美覆盖。于是，b 是 mn 的因子，且由素数基本性质可知 b 或者是 m 的因子，或者是 n 的因子。我们断言，至少在 b 是素数的情况下，

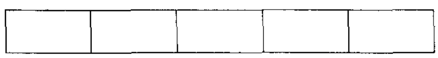


图 1-2　一张 5-牌

一块 $m\times n$ 棋盘被 b-牌完美覆盖当且仅当 b 是 m 的因子，或者 b 是 n 的因子。

当 b 不是素数时，我们要用不同的方式讨论。设我们有对 $m\times n$ 棋盘的 b-牌完美覆盖。此时我们证明，m 和 n 分别被 b 除所得余数至少有一个是零。设用 b，除 m 和 n 分别得到商 p 和 q 以及余数 r 和 s。

$$m = pb + r,\quad \text{其中}\quad 0\leqslant r\leqslant b-1$$
$$n = qb + s,\quad \text{其中}\quad 0\leqslant s\leqslant b-1$$

如果 $r=0$，则 b 是 m 的因子。如果 $s=0$，则 b 是 n 因子。我们不妨设 $r\leqslant s$，因为如果必要，我们可将棋盘的行列互换。下面我们要证 $r=0$

现在我们把在讨论用多米诺牌（$b=2$）覆盖国际象棋盘时将棋盘方格交替涂成黑白色的情况推广成涂成 b 种颜色。把 b 种颜色标成 1，2，…，b。我们用图 1-3 所示的方式将 $b\times b$ 棋盘涂色，并用这种方法对 $m=10$，$n=11$，$b=4$ 的情况以图 1-4 所示的方式延伸到 $m\times n$ 棋盘的涂色。

1	2	3	…	b-1	b
b	1	2	…	b-2	b-1
$b-1$	b	1	…	b-3	b-2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
2	3	4	…	b	1

图 1-3　$b\times b$ 棋盘用 b 种颜色涂色

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

图 1-4　将 10×11 棋盘涂成 4 种颜色

完美覆盖中的每张 b-牌盖住 b 个方块且每个方块各占一种颜色。因些，盘上每种颜色的方块数目必然是相同的。我们把棋盘分为三部分：上面 pb 行 n 列部分，左下方 r 行 qb 列部分，以及右下方 r 行 s 列部分。上面部分的每一列中各种颜色均出现 p 次，故各种颜色在盘上总共出现 np 次。盘的左下部分每行各种颜色均出现 q 次，故各种颜色在盘上总共出现 rq 次。既然每种颜色在整个棋盘上出现的次数都是相同的，那么，棋盘的右下方 r 行 s 列部分每种颜色出现的次数也必然是相同的。

右下方 $r\times s$ 部分中的颜色 1（从而每种颜色）究竟出现多少次呢？由于已经假设 $r\leqslant s$，我们的涂色特点使得颜色 1 在右下方 $r\times s$ 部分的每一行出现一次从而在这 $r\times s$ 部分出现 r 次。现在让我们计算这 $r\times s$ 部分中方块的数目。一方面，它有 rs 个方块；另一方面，

b 种颜色中的每一种颜色有 r 个方块从而共有 rb 个方块。于是，$rs=rb$。如果 $r\neq 0$，则两边消去 r 得到 $s=b$，这与 $s\leqslant b-1$ 矛盾。因此，正如所料，$r=0$。我们总结如下：

一张 m 行 n 列棋盘有一个 b-牌的完美覆盖，当且仅当 b 是 m 的一个因子或者 b 是 n 的一个因子。

上述结论的一个惊人的改述如下。如果完美覆盖中所有的 b-牌都是水平摆放或者所有的 b-牌都是垂直摆放，则称其为*平凡的*。于是，*一张 m 行 n 列棋盘有一个 b-牌完美覆盖，当且仅当它是一个平凡的完美覆盖*。应当指出，这并不意味着只有完美覆盖才是平凡覆盖。但它确实意味着，如果一个完美覆盖是可能的，那么一个平凡的完美覆盖也是可能的。

1.2　例：切割立方体

考虑一个边长 3 英尺的立方体木块。我们希望把它切割成 27 个边长 1 英尺的小立方体。完成这项工作所需切割的最小次数是多少？一种方法是依序切割 6 次，每个方向上切割 2 次，并在切割时保持该立方体形状不变，如图 1-5 所示。可是，如果在每次切割后重新排放所切得的各块，则是否能用更少的切割次数完成这项工作呢？在图 1-5 中也给出了这样一个例子，其中的第二刀比在第一刀后不重新排放所切得的切块要多。因此要切的木头块数以及木头块的排放方式数随着切割的进行而增加，这似乎是一个分析起来困难的问题。

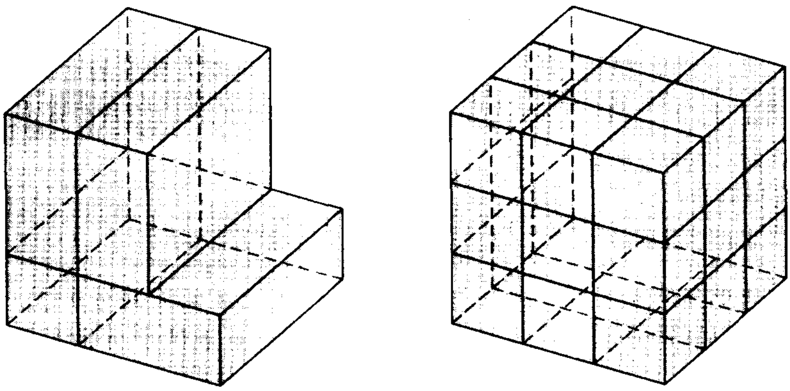


图 1-5

让我们换一种方式来看一看这个问题。这 27 个小立方体除去中间的一块以外其余各块都至少有一面是原来的大立方体表面的一部分。中间的这个立方体的每个侧面都是通过切割形成的。既然它有 6 个侧面，那就必须切割 6 次才能形成。因此，至少需要 6 次切割，而每次重新排放再切不会再少于 6 次。有精力的学生可以尝试一些不同的切割方式，看一看哪些方式只用 6 次能够切成 27 个小立方体。

另外一个结合 1.1 节的例子和上述切割立方体特点的例子如下。考查一块 4×4 棋盘，它有一个 8 张多米诺牌的完美覆盖。证明总能够把棋盘横向或者纵向切成两块且不使这些多米诺牌被切断。切割的水平或竖直的直线叫做完美覆盖的*断层线*（fault-line）。设存在对于 4 行 4 列棋盘的一个完美覆盖，使得能将棋盘切割成非空两部分的位于盘上的三条横线和三条竖线都不是断层线。令 x_1，x_2，x_3 分别是被这三条横线所切到的多米诺牌数（见图 1-6）因为不存在断层线，故 x_1，x_2，x_3 中的每一个都是正数。一张横向放置的多米

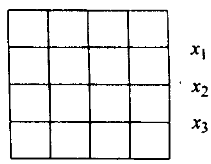


图 1-6

诺牌盖住一行上的两个方格，而一张纵向放置的多米诺牌则盖住两行上各一个方格。从这些事实我们成功地得出结论：x_1 是偶数，x_2 是偶数，x_3 也是偶数。因此

$$x_1+x_2+x_3\geqslant 2+2+2=6$$

并且在这个完美覆盖中至少存在 6 张纵向放置的多米诺牌。这就不难以一种简单的方式得出结论：盘上至少存在 6 张纵向多米诺牌。但 12>8，所以这是不可能的。因此，不可能存在用这样的多米诺牌对一个 4×4 棋盘的完美覆盖而不产生断层线。

1.3 例：幻方

*幻方*是最古老和最流行的数学游戏之一。一个 n 阶幻方是由整数 1，2，3，…，n^2 按下述方式组成的 $n\times n$ 方阵：该方阵每行上的整数的和、每列上的整数的和以及两条对角线中每条对角线上的整数的和都等于同一个数 s。这个整数 s 就叫做该幻方的*幻和*。下面是 3 阶和 4 阶幻方的两个例子：

$$\begin{bmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix}16&3&2&13\\5&10&11&8\\9&6&7&12\\4&15&14&1\end{bmatrix} \tag{1-1}$$

这两个幻方的幻和分别是 15 和 34。在中世纪时期曾存在与幻方相关的玄想；人们将幻方佩带身上用来辟邪。本杰明·富兰克林就是一个幻方迷，他的论文中包含有很多有趣的例子。

一个 n 阶幻方中的所有整数的和为

$$1+2+3+\cdots+\ {}^{2}=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

这里用到了算术级数的求和公式（见 7.1 节）。由于一个 n 阶幻方共有 n 行，每一行都有一个幻和 s，因此我们得到关系 $ns=n^2(n^2+1)/2$。于是，任意两个 n 阶幻方都有相同的幻和，即

$$s=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

其组合问题就是，确定那些能够组成 n 阶幻方的 n 的值，同时找出一般的构造方法。不难验证，不可能存在 2 阶幻方（其幻和应该是 5）。但是，对于所有其他的 n，n 阶幻方能够构造出来。存在着许多构造幻方的特殊方法。这里，我们介绍 de la Loubère 在 17 世纪发现的一种构造 n 阶幻方的方法，其中 n 是奇数。首先将 1 放在最上一行的中间。其后的整数沿着自左下至右上的这条对角线按照自然顺序放置，但同时须作如下修正：

ⅰ）在到达顶行时，下一个整数要放在底行，所放位置就是把底行当作顶行上边一行时该数应该放置的位置。

ⅱ）当到达最右边的一列时，下一个整数要放在最左边的一列上，所放位置就是把最左边的一列当作最右边那列的右边的列时该数应该放置的位置。

ⅲ）当要放的位置上已经填好了整数，或上一个整数已经放在了幻方的右上角时，则当前要摆放的整数将放在紧挨上述位置的下方。

（1-1）式中的 3 阶幻方以及下面的 5 阶幻方都是用 de la Loubère 的方法构造的：

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

构造偶数阶幻方的不同于式（1-2）和其他构造奇数阶幻方的方法，它们可在 Rouse Ball[1]的书中找到。

幻方在 3 维情形下的推广也已经被研究。n 阶幻方体（magic cub）是以下述方式由整数 1，2，3，…，n^3 构造成的一个 $n\times n\times n$ 的立方体阵列，其在下述每一条直线上的 n 个元素的和 s 都是相同的：

ⅰ）平行于立方体一条边的直线。

ⅱ）每个截面上的两条对角线。

ⅲ）四条空间对角线。

数 s 叫做幻方体的幻和且其值为（n^4+n）/2。不难证明，不存在 2 阶幻方体，我们把它留作练习。可以证明，也不存在 3 阶幻方体。

设存在 3 阶幻方体。该幻方体的幻和就应该是 42。考虑其任一个 3×3 横截面

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & & f \end{bmatrix}$$

其上元素已如所示。由于该正方体是幻方，故

$$\begin{aligned} a+y+f&=42\\ b+y+e&=42\\ c+y+d&=42\\ +b+c&=42\\ d+e+f&=42 \end{aligned}$$

将前三个方程相加并减去后两个方程，我们得到 $3y=42$，从而 $y=14$。但是，y 是位于横截面的中心的，于是，就有 7 个横截面，它们的中心位置不同但又都必须是 y 值 14。可是 y 值 14 只能占据一个位置，因此我们断言：不存在 3 阶幻方体。证明不存在 4 阶幻方体要困难得多。一个 8 阶的幻方体在 Gardner 的一篇文章中给出[2]。

本书将不对幻方作进一步研究。

1.4　例：四色问题

考虑一张平面地图或在一个球面上的地图，地图上的国家都是连通的区域[3]。为了能够很快地区分出国家来，需要对这些国家着色，以使得具有共同边界的国家被涂成不同的颜色

[1] W.W.Rouse Ball：*Mathematical Recreations and Essays*；revised by H.S.M.Coxeter. Macmillian，New York（1962）193-221。

[2] M.Gardner. Mathematical Games，*Scientific American*，January（1976）. 118-123。

[3] 因此，密执安州就不能当作这种地图上的国家，除非人们认为密执安的上下两个半岛被 Mackinac 海峡大桥所连通。肯塔基州也不能，因为 Fulton 县的最西边完全被密苏里州和田纳西州所包围。

(角点处不算作共同边界)。能够保证如此着色每一张地图所需的最少的颜色数是多少？直到不久前，这还曾是数学中著名的尚未解决的问题之一。由于该问题叙述起来简单，理解起来又容易，因此它吸引着众多的非专业人员。除去著名的三等分已知角问题外，四色问题可能比任何其他问题都会激发更多的业余数学爱好者的兴趣。它大约在 1850 年由 Francis Guthrie 首先提出，那时他还仅是名研究生。四色问题也刺激了大量的数学研究。一些地图需要 4 种颜色。图 1-7 中的地图就是一个例子。既然这个地图的四个国家中每两国都有一条共同的边界，那么很清楚，对该地图着色必须用 4 种颜色。1890 年 Heawood㊀证明了用 5 种颜色对任何地图着色都是足够的。证明下面的问题也不是非常困难的，即：不可能有这样的平面地图，图上有 5 个国家，其中的每两个国家都有一条共同的边界。这样的地图假如存在，那就需要 5 种颜色。但是，没有 5 个国家其中每两国都有一条共同边界并不意味着四种颜色就足够了。也许某张平面地图因为其他一些更加微妙的原因而需要 5 种颜色。

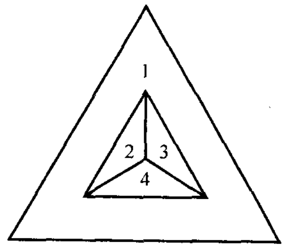


图 1-7

在 1976 年，Appel 与 Haken㊁宣称他们已经证明了任意平面地图都能够用 4 种颜色着色。他们的证明需要计算机计算 1 200 小时，100 亿个分离的逻辑判定！他们的证明的完整描述在他们的书㊂中。最近，Appel-Haken 证明被 N.Robertson、D.P.Sanders、P.D.seymour 和 R.Thomas 简化，不过简化了的证明仍然需要大量的计算机检验。

1.5 例:36 军官问题

设有分别来自 6 个军团共有 6 种不同军衔的 36 名军官，他们能否排成 6×6（6 行 6 列）的编队使得每行每列都有各种军衔的军官 1 名，并且每行和每列上的不同军衔的 6 名军官还分别来自不同的军团？这个问题于 18 世纪由瑞士数学家欧拉（L.Euler）作为一个数学游戏提出，它对统计学产生重要的影响，特别是在实验设计方面（见第 10 章）。一个军官可由一个序偶（i，j）来表示，其中 i 表示该军官的军衔（$i=1$，2，⋯，6），而 j 表示他所在的军团（$j=1$，2，⋯，6）。于是，这个问题是问：

36个序偶（i，j）（$i=1$，2，⋯，6；$j=1$，2，⋯，6）能否排成 6×6 阵列，使得在每行和每列，这 6 个整数 1，2，⋯，6 都能以某种顺序出现在序偶第一个元素的位置上，并以某种顺序出现在序偶第二个元素的位置上？

这样的阵列可以分裂成两个 6×6 的阵列，一个对应序偶的第一个位置（军衔阵列），而另一个则对应序偶的第二个位置（军团阵列）。因此，该问题又可以叙述成：

是否存在这样的两个 6×6 矩阵，其元素取自 1，2，⋯，6 使得

i）整数 1，2，⋯，6 以某种顺序出现在矩阵的每一行和每一列，并且

ii）当这两个矩阵并置（juxtapose）时，所有的 36 个序偶（i，j）（$i=1$，2，⋯

㊀ P.J.Heawood：Map-color theorems，*Quarterly J.Mathematics*，Oxford ser.，24（1890），332－338。

㊁ K.Appel and W.Haken，*Every planar map is four colorable*，Bulletin of the American Mathematical Society，82（1976），711－712。

㊂ K.APPel and W.Haken，*Every planar map is four colorable*，American Math. Society，Providence（1989）。