
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

对中学数学课程改革的思考

江苏省六合县第一中学 刘 明

目前，我国正在进行数学课程标准的研制工作(详见文[1])．数学课程改革的方向如何，是每个数学教育工作者所关心的问题．笔者作为工作在教学第一线的一名中学数学教师，对中学数学课程的现状与未来有以下一些思考．

1．对平面几何的部分内容进行删减

数学教育要想适应时代进步的要求，首先在教学内容上需要不断更新：引入一些新的教学内容，摒弃一些陈旧的内容．在这一方面，新的高中数学教材，已作了较大改进，迈出可喜的一步：新增了向量、概率、微积分等内容，这些内容不仅是进一步学习的基础，而且也有着广泛的应用；删减了一些次要的、用处不大的内容，如指数方程、对数方程、部分三角函数的恒等变换、三角方程、极坐标、幂函数、反三角函数、参数方程、立体几何中面积与体积的计算；同时，也降低了某些内容的要求．而对于九年制义务教育的初中教学内容，改革的力度还不大，主要表现在平面几何方面，“欧氏几何”这一部分内容的去留争议颇大，但现在总的讲，还是趋向于保留其中精华部分，删减部分较难的和计算量较大的内容．这是因为“第一，几何研讨的对象，点、线及其基本关系非常简明，初中生对之已有实感，图形性质又直观具体，学生能主动进行观察、思考，易于对学生进行思维训练．第二，平面几何有一个适当规模(不完备的，扩大了的)较为明确的公理体系作为推理的出发点，较易使学生体会逻辑推理方式与逻辑严密性，在初中阶段大大有助于提高学生的思维水平．”[2]其次，从数学研究对象来看，“数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学”，尽管这里的空间不一定指三维空间，也可以是 n 维空间及某些抽象空间，但是，从培养公民的最基本的素质而言，让学生学习一些几何(包括立体几何)知识，掌握几何中点、线、面的位置关系与数量关系，对他们今后面对客观世界(三维空间)，应该是大有裨益的．另外，笔者曾对初中三个年级学生进行调查，调查的主题是“你对几何课感兴趣吗？”结果如下：

年级	人数	很感兴趣		感兴趣		不感兴趣	
		人数	%	人数	%	人数	%
初一	50	40	80	8	16	2	4
初二	48	35	73	8	16.6	5	10.4
初三	51	37	72.5	6	11.8	8	15.2

从上表可以看出，低年级学生感兴趣率较高，但随着年级的升高感兴趣率反而降低．造成这一现象的原因是：(1)学生的新鲜感的逐步消失；(2)几何内容的难度逐渐加深而部分学生难以理解．但总的来说，学生对几何还是比较感兴趣的，其理由是：图形比较直观、“证题很有意思”等．

在保留平面几何的同时，又要加以适当删减，可以仿照《立体几何》的做法，删掉“相似形”中的部分内容及后面的内容，以降低几何的难度，减

少计算方面的内容．

2．重视数学应用能力培养，在教材中多选编一些应用题

1999 年 6 月 13 日，中共中央国务院作出了《中共中央国务院关于进一步深化教育改革全面推进素质教育的决定》，决定指出：素质教育的目的就是要“ 培养学生的创新能力与实践能力 ”．而应用能力的培养是实现创新能力与实践能力的重要途径．“ 数学应用是一种数学意识，一种基本观点和态度 ”，[3]这一观点目前已逐渐被广大数学教育工作者所接受，并在教学中得到重视．就目前的中学数学教材而言，应用题已不能适应教育改革与发展的要求，主要表现在：

(1)应用题所占的比例偏低．据有关资料的统计显示，人教版的九年义务教育初中数学教材中应用题只占总题量的 9.4%，高中教材中应用题所占比例在 10%左右，这样的比例显然已经不能适应目前改革的形势；

(2)现行教材的应用题过于陈旧，缺乏时代气息．

针对上述存在的问题，在今后的教材编写中，提出以下几点建议：

(1)适当提高应用题所占的比例，增加应用题的题量．笔者认为，应用题的比例在 20%到 30%之间为宜，也不能一下子将应用题的比例提得过高，避免在教学中出现新的不适应现象．

(2)在选编应用题时，还要“ 注意解决现实生活中的实际问题和数学中的非常规问题，注意到问题的开放性．”[4]因此，在选编应用题时，首先应该考虑到应用题的时代性、实用性及趣味性，如存款与货款问题、分期付款问题、线性规划问题、风险决策问题以及其他一些与现实生活密切相关的问题，都可以编入教材．这样，不但培养了学生的感性认识；同时，由于应用题与自己的生活息息相关，从而增强了解决数学应用题的趣味性，容易使学生充分享受到学习的乐趣，以增强学生的学习兴趣．另外，还要注意到应用题的开放性，有些问题，“ 不一定有终极的答案，各种不同水平的学生都可以由浅入深地作出回答 ”．[3]

3．重视对数学史的介绍，展示知识产生的过程

向学生进行数学史的介绍，不仅可以让学生理解知识产生的过程，“ 再现 ”数学家们当初“ 发现 ”数学的经过，理解数学的思想与方法，而且还可以揭示科学发现的一般规律，培养学生的创新能力．在现行的数学教材中，高中教材在这一方面完全是一片空白，初中教材中，共安排了 9 个“ 读一读 ”介绍了数学史的有关内容，这一个数字对于整个初中内容来说，也显然是太少了！因此，在这一方面希望作较大幅度的增加．另外，在现行初中教材中，有关数学史的内容，主要是为了进行爱国主义教育，共有6处(占总数$\frac{2}{3}$的)介绍了中国数学史的成就，都强调了“ 中国比外国早多少年 ”，在这一方面，应该“ 一视同仁地介绍各国的成就，其中包括本国成就．不应当搞狭隘的民族主义，更不能学阿 Q：‘ 我的祖上比你阔．’ ”[5]因此，建议在今后的教材编写中，多介绍一些世界各国的数学史知识，多介绍一些数学发现的过程，在培养学生创新能力的同时，提高学生的数学文化修养．

4．重视直觉思维，教学生猜想

多年来，我们一贯重视逻辑思维能力的训练和培养，而忽视了其他思维的训练(如直觉思维)，从而导致了学生数学能力片面发展及思维僵化与保

守，不利于数学活动中的创造发明．但这种状况在新的数学教学大纲中已得到转变：新大纲中，“逻辑思维能力”变成了“思维能力”．事实上，数学不全部是逻辑思维，“很多数学家很强调‘直觉能力’与‘直觉’．他们对一些问题提出著名的猜想，这反映了他们有很强的洞察力，能跨过错综复杂的性质和相互关系，一下子看到定理的正确性，然后再想法从逻辑上加以证明．证明虽然可能很难找到，但寻找证明的活动，推动了数学的发展．”[6]因此，在今后的教材中，应当重视直觉思维能力的培养，多安排一些猜想的问题，教会学生去“猜想”，以便于培养学生的创造能力．

5．在几何教材编写中应重视几何图形位置的变换

在现行的几何教材中，对图形位置的变换没有得到应有的重视，以人教版九年义务教育三年制初级中学教材《几何》第二册中“5．12 平行线分线段成比例定理”为例，本节(含课本练习)共有 12 幅图形，其中有 11 幅图形是比较‘规范’地将平行线画成水平位置,仅有 1 幅图形中平行线是竖直的.事实上，加强图形位置变换的训练，有利于学生更好地理解数学概念，掌握概念的本质属性．因此，建议在今后的几何教材编写中，增加图形变换的内容．

6．注意加强综合能力的培养

在教材编写中，还应该强化综合能力的培养与训练，充分考虑到学科内部的综合(如代数与几何的综合等)及学科之间的综合(数学与物理等学科的综合)，以适应教育改革的需要．

7．建议教材对一些含糊不清的问题作恰当的“规定”

在教学中常常会遇到一些没有明确答案的问题困扰着老师、“折磨”着学生，对于这样的问题，只要无碍大局，不妨给出一个“规定”．如二面角的平面角的范围是什么？我们是否可以约定在(0，π)？诸如此类的问题，在编写教材时，给予规定，以减轻师生的负担，“把数学变得容易一些”！

参考文献

1　数学课程标准研制小组．关于我国数学课程标准研制的初步设想．数学通报，1999，4

2　陈重穆等．21 世纪的平面几何．数学教育学报，1997，11

3　数学教育研究小组．数学素质教育设计要点．数学教学，1993，2

4　王延文等．“问题解决”及其研究综述．数学教育学报，1995，8

5　单墫．大纲、教材及其他．载：面向 21 世纪的中国数学教育，南京：江苏教育出版社，1994

6　梁之舜．“头脑编程”与数学教育．载：面向 21 世纪的中国数学教育，南京：江苏教育出版社．1994

化整为零，重点突破

——谈反函数的教学

四川省自贡市晨光化工研究院第二子弟学校 章明富

反函数是中学数学教学的难点，现行教材(人教版，下同)已将反函数的教学要求降到了最基本的程度．但从中学数学的整体结构看，反函数的基本思想方法在中学函数知识体系中却占有比较重要的地位．此外，由于反函数的思维具有明显的动态性和互逆性特征，因此，反函数又是训练学生思维灵活性和创造性的良好素材．

函数思维的主体是动态变量思维，学生的常量思维要发展成变量思维，必须发生质的转变．在学习函数之前，学生的代数思维是以数字思维和静态的形式化思维为主．学生通过初中函数的学习，已初步形成函数的数值对应动态思维，但思维方向是单一的．为分散反函数的教学难点，减小学生学习反函数的困难，可将反函数知识分解为一些基本的知识点，在教学中提前渗透一些具体的、直观的知识，重点突破抽象的、本质的内容．

1．通过由象求原象的思维训练，渗透对应互逆性

数值对应是函数研究的主要对象,中学生已具备数值对应的一般常识.数值对应分单值对应和多值对应，中学生比较熟悉单值对应在高中《代数》上册教材的映射教学中，将逆对应提前渗透，可为学生的单向变量思维向双向变量思维转变提供一个适应期，有利于学生对反函数的对应互逆性思想的理解．

例 1 已知映射 f：(x，y)→(x+y，x−y)．求：(1)元素(2，1)的原象；(2)元素(a，b)的原象．

此题设计成两问，其目的是为了减缓学生逆向抽象思维的难度．由于原象不能直接求出，思路也并非一目了然，迫使学生对象和原象进行往复联想，自觉形成逆对应的潜意识，这对后来理解反函数 x＝ψ(y)的对应意义是很有帮助的．

2．揭示幂函数$y=x^{\frac{n}{m}}$和$y=x^{\frac{m}{n}}$的图象联系特征，渗透图象关于直线 y＝x 对称的本质特征

图象关于直线 y＝x 对称，是原函数和反函数图象的联系特征．在反函数之前，教材中隐含着这种对称思想，这就为提前渗透这种对称提供了条件．高中《代数》上册教材P．48的幂函数$y=x^3$、$y=x^2$、$y=x$、$y=X^{\frac{1}{2}}$、$y=x^{\frac{1}{3}}$在同一坐标系中的图象，是渗透这种对称知识的好材料．教学时，可通过展示函数$y=x^3$和$y=x^{\frac{1}{3}}$(或$y=x^2$和$y=x^{\frac{1}{2}}$)的图象上某些关于直线$y=x$对称的具体点的坐标，如(2，8)与(8，2)、$(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$与$(\frac{1}{8},\frac{1}{2})$、$(\frac{3}{2},\frac{27}{8})$与$(\frac{27}{8},\frac{3}{2})$、……，让学生了解关于直线 y＝x 对称的对称点的两个坐标之间的联系特征，建立点关于直线 y＝x 对称的初步印象．

需要全本请访问 www.ertongbook.com

提前渗透图象关于直线 y＝x 对称,有助于学生对互为反函数的图象关于直线 y＝x 对称定理证明的理解．这是因为教材在定理的证明中，隐含着一种数学思想——完备性思想．完备性思想是高中生必须掌握的一种重要的数学思想，它是以后学习充要条件的认识基础．学生在学习“互为反函数的图象间的关系”一节时，若对图象关于直线 y＝x 对称不了解，思维就可能集中到直观的方面，忽视抽象知识的理解，影响对完备性思想的理解．

3．例析函数值域的求法，奠定求反函数定义域的基础

反函数的定义域一般都不是根据反函数的解析式来求，而是通过求原函数的值域得到．因此，会求函数的值域是掌握反函数知识的必备基础．教学中，可安排一次求函数值域的几种常用方式，为求反函数的定义域打下基础．

(1)用图象求值域．一次函数、反比例函数、二次函数、幂函数的图象学生在学习反函数时就比较熟悉了，通过这几类函数的图象相对于 y 轴的位置的观察，得出函数 y 的取值范围，是一种直观的求函数值域的方法．

(2)利用函数的单调性求值域．单调函数的值域，可利用基本的单调函数，采用复合的方法，运用不等式的性质求得．

例2　求函数$f(x)=\frac{2}{1-x^2}(x<-1)$的值域．

解析：由于幂函数$y=x^2$在$(-\infty,-1)$上是减函数，于是，当$x<-1$时，$x^2>(-1)2=1$，即$1-x^2<0$．

又由于反比例函数$h(t)=\frac{2}{t}$在$(-\infty,0)$上是减函数，当$1-x^2<0$时，

$-\infty<\frac{2}{1-x^2}<0$．

所以，$f(x)=\frac{2}{1-x^2}(x<-1)$的值域是$(-\infty,0)$．

(3)根据解析式求值域．当函数的定义域只受解析式制约时，值域也只受函数解析式的限制．先由解析式 y＝f(x)解出 x＝ψ(y)，再根据ψ(y)的结构，求得式子ψ(y)中 y 的取值范围，从而得出函数 y＝f(x)的值域，是求这类函数值域的常用方法．

例3 求函数$f(x)=\frac{6x+5}{x-1}$的值．

解析：由$y=\frac{6x+5}{x-1}$，得$x=\frac{y+5}{y-6}$．

因为，当$y-6\neq0$时，式子$\frac{y+5}{y-6}$有意义，所以，函数$f(x)=\frac{6x+5}{x-1}$的值域为 {y｜y≠6，y∈R} ．

(4)运用判别式求值域．对于分子或分母是二次多项式的函数，一般都是运用判别式，通过解一个一元二次不等式，求得这类函数的值域．

例4 求函数$y=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$的值域．

解析：∵$x^2+x+1\neq0$，将解析式变形，得

$(y-1)x^2+(y-1)x+y=0$．　　①

当$y\neq 1$时，由于函数$y=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$的定义域不是空集，因此，关于 x 的方程①有解．

∴△＝$(y-1)^2-4y(y-1)\geq 0$成立．

解这个不等式，得$-\frac{1}{3}\leq y\leq 1$．

当$y=1$时，方程$1=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$无解．

∴函数$y=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$的定义域为$[-\frac{1}{3},1]$．

4．突出反函数对应的单值性，掌握求解析函数的反函数的一般方法

通过提前渗透互逆对应，以及求函数值域的训练，学生对反函数的意义的理解难度就减小了很多．在反函数一节教学中，重点是使学生学会求函数的反函数的一般方法．为此，可在理解的基础上，引导学生将求反函数的一般步骤进行归纳：(1)从式子 y＝f(x)中解出 x＝ψ(y)；(2)结合原函数的定义域，分析由式子 x＝ψ(y)确定的对应是否是单值对应，得出反函数式子 x＝$f^{-1}(y)$；(3)求原函数 y＝f(x)的值域，对调字母 x、y，得到反函数$y=f^{-1}((x),$并写出定义域．教学实践表明：引导学生归纳求反函数的一般步骤，对中、差生掌握求函数的反函数的一般方法是很有帮助的．

在这一过程中，难点是求反函数的定义域．因此，在反函数教学之前，通过专题训练，使学生基本学会求函数的值域也就显得十分必要．

由于学生在求解 x＝ψ(y)的过程中，易忽视原函数的定义域，因此，在求非单调函数的反函数时，可能得出的式子 x＝ψ(y)不是唯一的，反函数也不是单值对应．比如，学生求出的函数$y=\sqrt{25-4x^2}(x\in[-\frac{5}{2},0])$的反函数的解析式为$y=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$或$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$，就是由于没有考虑原函数的定义域，以及对反函数对应的单值性理解不透彻造成的．关于这一点，教学中应给予足够的重视．为此，可增设求非单调函数的反函数的例题，突出反函数对应的单值性，加深学生对反函数意义的理解．

5．强调对应的互逆性，提高思维的灵活性

对反函数意义的理解，关键是对原函数与反函数的对应互逆性的理解．设函数 y＝f(x)的定义域为 A，值域为 C．原函数与反函数的对应互逆性主要包含三层意义：一是原函数的对应法则为 f：A→C，反函数的对应法则为f^{-1}：C→A；二是如果 x＝a 有 f(a)＝b，那么当 x＝b 时有$f^{-1}(b)=a$；三是$f^{-1}(x)$是 f(x)的反函数，f(x)也是$f^{-1}(x)$的反函数．

在反函数知识的应用教学中，有意识地设计一些能体现对应互逆性的例题，对学生进行互逆思维的训练，提高思维的灵活性，是反函数教学的一项基本任务．

例 5 已知函数 f(x)是 R 上的减函数，并且 F(x)＝f(x)－f(－x)，f(1)＝1，f(－1)＝－1．求

由于函数 f(x)的解析式未知，不能通过解析式求值，学生不得不从原函

数与反函数对应的互逆性方面思考．设$F^{-1}(-2)=a$，由对应互逆性，得 F(a)＝-2．因为 f(-1)－f(1)＝-2，于是-F(1)＝-2，思路由此转至 F(x) 是否是奇函数，经验证 F(x) 的确是奇函数，于是 F(-1)＝－F(1)＝－2．故$F^{-1}(-2)=-1$．

6．发掘反函数的“保质性”，提高知识的综合运用能力

一个函数的反函数，由于它的定义域和值域与原函数的定义域和值域正好相反，从自变量到函数的对应规则也就不同，原函数的某些性质就会改变．但是，由于原函数与反函数的对应值之间的“配对关系”并没有改变，原函数的某些性质也就得以保留下来，如原函数的单调性、增减性、原点对称性等．反函数的这一特性，为我们将反函数与其它知识进行整合，构建更加完美的知识结构提供了理论基础．比如，利用原函数与反函数的同单调性，对于单调函数$f(x)$，可以构建$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$的知识结构．运用这一知识结构，就可以解决单调函数的函数值不等式问题．

例 6 已知奇函数 f(x)在定义域(－1，1)上是增函数，且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$．求实数a的取值范围．

解析：∵$f(x)$是奇函数，且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$，∴$f(1-a)<f(a^2-1)$．

又∵f(x)在(－1，1)上是增函数，

$$\therefore \begin{cases} 1-a<a^2-1, \\ \therefore -1<1-a<1, \\ -1<1-a_2<1. \end{cases}$$

解这个不等式组，得$1<a<\sqrt{2}$，

∴a的取值范围是$(1，\sqrt{2})$．

“排列、组合”单元的教学体会

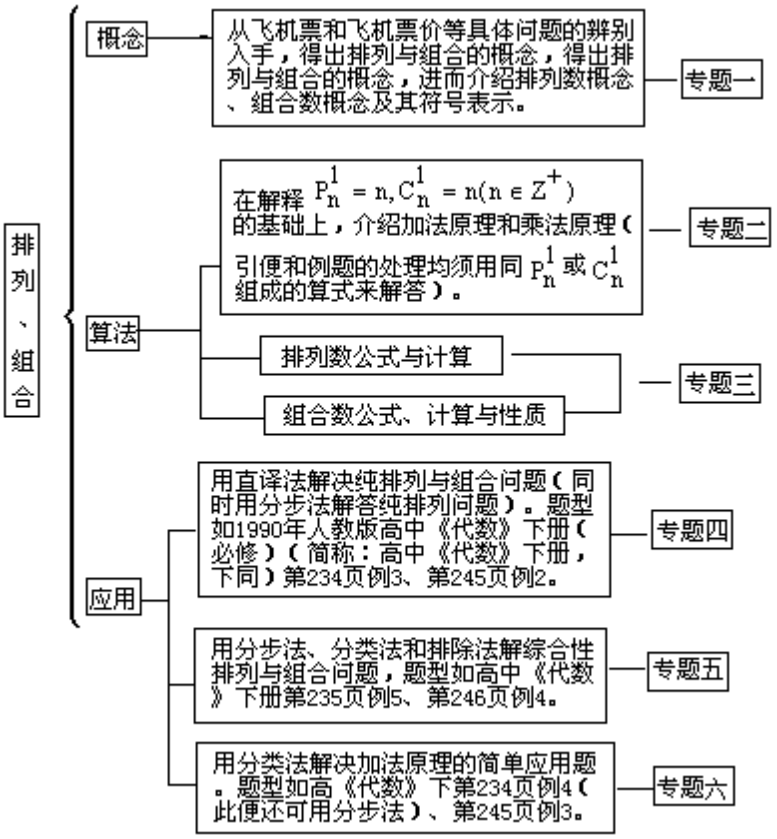
——优化和发展学生数学认知结构的再认识

湖南省衡东县职业中专 贺德光

1．调整教材内容顺序，加强认知结构的层级性

智慧技能的教学是学校教学的中心任务．著名认知心理学家加涅认为，智慧技能主要涉及概念和规则的掌握与运用，它由简单到复杂构成一个阶梯式的层级关系 概念(需要以辨别为先决条件)→规则(需要以概念为先决条件)→高级规则(需要以规则为先决条件)．因此，对于中学数学的每个单元，学生应该按照加涅关于智慧技能由简单到复杂构成的这个层级关系去学习，以便按照这个层级关系把所学的知识组织到大脑当中，形成具有良好层级性的认知结构．

据此，笔者在“排列、组合”单元的教学中，将教材内容的顺序进行了调整．调整后的结构如图 1 所示．



于是该单元的教学次序是：基本概念的形成(排列与组合的概念、排列数与组合数的概念)→基本算法规则的掌握(原理与公式)→概念和算法规则相结合的应用(这里是以解题规律为主线,把排列应用题和组合应用题一并按其解法由易到难分层次集中而对偶地解决的),完全符合加涅关于智慧技能的学习必须按从概念到规则，再到高级规则的层级顺序去进行的规律，理顺了学生学习排列、组合内容的认知层次，加强了该单元认知结构的层级性．

2．运用先行组织者，促成认知结构的稳定性

运用先行组织者以改进教材的组织与呈现方式，是提高教材可懂度，促进学生对教材知识的理解的重要技术之一．其目的是从外部影响学生的认知结构，促成认知结构的稳定性．

因为高中生首次面对排列、组合单元的学习任务时，其认知结构中缺乏适当的上位观念用来同化它们，因此，我们在该单元的入门课里，在没有正式学习具体内容之前，先呈现如图 2 所示的组织者，能起到使学生获得一个用来同化排列、组合内容的认知框架的作用．



值得一提的是，安排在本文的入门课——专题一中的飞机票和飞机票价等具体问题，以及安排在基本原理课题中的两个引例，它们也分别起到了学习相应内容的具体模型组织者的作用．

3．实行近距离对比，强化认知结构的可辨别性

如果排列概念和组合概念在学生头脑中的分离程度低，加法原理和乘法原理在学生头脑中的可辨别性差，则会造成学生对排列和组合的判定不清，对加法原理和乘法原理的使用不准，从而严重影响学生解排列、组合问题的正确性．因此，在教学中我们必须增强它们在学生头脑中的可辨别性，以达到促使学生形成良好的“排列、组合”认知结构之目的．

按调整后结构的顺序教学，很自然地实行了近距离对比，加大了排列与组合、加法原理和乘法原理的对比力度，从而强化了它们在学生头脑中的可辨别性．

(1)在入门课里，开篇就将排列概念和组合概念进行近距离对比，有利于引导学生得到并掌握排列和组合的判定标准：看实际效果与元素的顺序有无关系．

(2)专题二首次近距离比较加法原理和乘法原理,并运用其判定标准——是分类还是分步，去完成对实际问题的处理，以加强学生对它们的理解与辨别．

(3)专题四、五、六里，把排列、组合问题按其解法分层次对偶地解决，在没有单独占用课时的情况下，很自然地为排列和组合的近距离比较，为加法原理和乘法原理的运用对比，提供了切实而尽可能多的机会．

4．及时归纳总结，增强认知结构的整体性与概念性

我们知道，认知结构是人们头脑中的知识结构，也就是知识在人们头脑中的系统组织，它具有整体性和概括性．认知心理学认为，认知结构的整体性越强、概括水平越高，就越有利于学习的保持与迁移．因此，在每个单元的教学中，我们必须随着该单元教学进度的推进，及时归纳总结已学内容的规律，以促进学生认知结构概括水平的不断提高，最终促使学生高效高质地整体掌握该单元，从而形成整体性强、概括程度高的认知结构．

于是对于“排列、组合”单元，笔者就随着教学进度的深入，引导学生不断归纳、及时总结出以下各规律：

(1)排列与组合的判定标准(见前文)．

(2)加、乘两原理的判定标准(见前文)．

(3)排列数公式的特征(略).

(4)组合数与排列数的关系(略).

(5)解排列、组合问题的基本步骤与方法：

①仔细审清题意，找出符合题意的实际问题.

所有排列、组合问题，都含有一个“实际问题”，找出了这个实际问题，就找到了解题的入口.

②逐一分析题设条件，推求“问题”实际效果，采取合理处理策略.

处理排列、组合问题的常用策略有：正面入手；正难则反；调换角度；整、分结合；建立模型等.但不管采用哪个策略，我们都必须从问题的实际效果出发，都必须保证产生相同的实际效果.因此，实际问题的实际效果，就是我们解排列、组合问题的出发点和落脚点，因而也可以说是解排列、组合问题的一个关键.

③根据问题“实际效果”和所采取的“处理策略”，确定解题方法.

解排列、组合问题的方法，不同的提法很多，其实归根到底，不外乎以下五种：枚举法；直译法；分步法；分类法；排除法.如所谓插空法，推究起来也只不过是在调换角度考虑的策略下的分步法而已.

5.注意策略的教学与培养，增大认知结构的可利用性

智育的目标是：第一，通过记忆，获得语义知识，即关于世界的事实性知识，这是较简单的认知学习.第二，通过思维，获得程序性知识，即关于办事的方法与步骤的知识，这是较复杂的认知学习.第三，在上述学习的同时，获得策略知识，即控制自己的学习与认知过程的知识，学会如何学习，如何思维，这是更高级的认知学习，也是人类学习的根本目的.

所谓策略，指的就是认知策略的学习策略，认知策略是个人用以支配自己的心智加工过程的内部组织起来的技能，包括控制与调节自己的注意、记忆、思维和解决问题中的策略.学习策略是“在学习过程中用以提高学习效率的任何活动”，包括记忆术，建立新旧知识联系，建立新知识内部联系，做笔记、摘抄、写节段概括语和结构提纲，在书上评注、画线、加标题等促进学习的一切活动.

在中学生的数学学习中，如果学生的认知结构中缺乏策略或策略的水平不高，那么学生的学习效果就不好、学习效率就不高，特别是在解题过程中，就会造成不能利用已学的相关知识而找不到解题途径，或造成利用不好已学的相关知识而使解题思路受阻，或造成不能充分利用好已学的相关知识而使解题方法不佳，以致解题速度不快、解答过程繁冗、解答结果不准确等.因此，中学数学教学，必须重视策略的教学和培养，让学生学会如何学习和如何思维，以增大学生认知结构的可利用性.

为此，笔者在“排列、组合”单元的教学中，除注意一般性学习策略(如做笔记、画线、注记和写单元结构图等)的培养以外，更注重解排列、组合问题的培养和训练.

(1)在专题二、四、五、六里，对排列、组合问题解法的教学，始终按“仔细审清题意，找出符合题意的实际问题→逐一分析题设条件，推求问题实际效果，采取合理处理策略→根据问题实际效果和所采取的处理策略，确定解题方法”的基本步骤进行，以培养学生在解排列、组合问题时，有抓住“实际问题的实际效果”这个关键的策略意识和策略能力.

(2)重视一题多解和错解分析(多解的习题要有意讲评，例题讲解可故意

需要全本请访问 www.ertongbook.com

设错)．

一题多解能拓宽解题思路，让学生见识各种解题方法和处理策略．另外，一题多解又能通过比较各种解法的优劣，使学生在较多的思路和方法中优选．同时，因为解排列、组合问题，其结果(数值)往往较大，不便于检验结果的正确性，而一题多解可以通过各种解法所得结果的比较，来检验我们所作的解答是否合理、是否正确，从而起到检查、评价乃至调控我们对排列、组合问题的解答的作用．

错解分析能使学生注意到解答出错的原因所在，同时使学生体验到解题策略调节的必要性和方法，防止今后犯类似的错误，增强学生解题纠错力．

故意设错如高中《代数》下册第 246 页例 4 的第

(3)小题：如果 100 件产品中有两件次品，抽出的 3 件中至少有 1 件次品的抽法有多少种？

错解：由分步法得$C_2^1C_{99}^2=9702$(种)．

略析：像该题一样的“至少”问题最好莫用分步法，这里分步出现了重复计算(以上错解是学生易犯错误，教学中必须注意)．

参考文献

1　邵瑞珍主编．学与教的心理学．上海：华东师范大学出版社，1990

2　袁贤琼．优化和发展学生数学认知结构的认识与实践．中学数学，1991，1

3　陈学军．数学教学中学生学习策略的教学与培养．中学数学教学参考，1999，4

初中数学思想方法教学的基本原则

江苏省连云港市新海中学 孙朝仁

《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》明确提出数学思想方法是数学基础知识的重要组成部分．数学教学如何才能有利于促进学生数学思想方法的形成和发展呢？笔者从 1993 年起参与江苏省教育科学“九五”规划项目“发展学生数学思想，提高学生数学素养”的教学实验研究，通过六年两轮的探索，认为进行数学思想方法教学，除了应遵循通常的数学教学的基本原则外，还应遵循以下五条基本原则：

1．目标性原则

既然数学思想方法被纳入数学基础知识的范畴，那么数学课堂教学应该有数学思想方法的教学目标，否则，数学思想方法的教学就得不到应有的保障，在数学课堂教学中亦无法落实．遵循数学思想方法教学的目标性原则，首先要明晰教材中所有数学思想方法，就目前共识的共有三大类 18 种，即策略思想方法，包括抽象概括、方程与函数、整体、化归、猜想：逻辑型思想方法，包括分类、类比、归纳、反证、演绎、特殊化；技巧型思想方法，包括换元、配方、待定系数、构造、参数、判别式．其次对某些重要的数学思想方法进行分解、细化，使之明朗化，具有层次性．如了解某种数学思想方法的含义及价值为第一层次：掌握某种数学思想方法的初步应用为第二层次；会应用该种数学思想方法指导思维活动，解决某些具体的数学问题为第三层次．第三，在具体的每一节课教学中，数学思想方法教学目标应与课堂教学结构的各个重要环节相匹配，形成知识目标与思想方法目标的有机整合，使之具有可操作性．

2．渗透性原则

数学思想方法教学依附于数学知识的教学,但又不同于数学知识教学.在数学思想方法教学中，应以数学知识为载体，挖掘教材中蕴含的数学思想方法，进行恰当的、适时的“渗透性”教学．遵循渗透性教学原则需做到以下两点：

(1)挖掘渗透内容　虽然数学思想方法纳入数学基础知识范畴,但数学思想方法是数学知识的精髓，它内隐于数学知识之中，需要从数学知识中挖掘、提炼．比如，在初一新学期开始的第一课，可以有目的地向学生渗透分类的数学思想方法：“新教材共分上下两册，上册分为四章，下册又分为三章，每章都有若干节……”，使学生刚接触到教材就受到分类思想的熏陶；又在寻找各种具体的有理数运算结果的规律中，渗透归纳、抽象概括的思想方法；在“两个相反数相加得零”写在“异号两数相加”的法则里，渗透特殊与一般的思想方法；有理数的大小比较借助于绝对值的概念转化为算术数的大小比较，有理数的减法(除法)运算借助于相反数(倒数)概念转化为加法(乘法)运算等多处渗透化归的数学思想方法．教师只有认真钻研教材，才能正确地挖掘出课本知识中所蕴含的数学思想方法，这是课堂教学中渗透数学思想方法的前提．

(2)把握渗透的方法　由于学生数学思想方法的形成和发展比数学知识的增长和积累需要更长的时间，花费更大的精力．因此，在教学中，有机地结合数学表层知识的传授，恰当地渗透其中的数学思想方法，让学生在“数

学知识的再发现”过程中享受“创造”或“发现”的愉悦，孕育数学发现的精神品质，这才是成功的渗透方法

3．层次性原则

数学思想方法的形成难于知识的理解和掌握，数学思想方法教学应与知识教学、学生认知水平相适应，数学思想方法教学应螺旋式上升、并遵循阶梯式的层次结构．在实验研究中，笔者认为数学思想方法教学一般要经过渗透孕育期、领悟形成期、应用发展期、巩固深化期四个层次．遵循层次性原则，达到螺旋上升的目的．下面以化归思想方法教学为例，简要说明．

(1)渗透孕育期　这一阶段为初一代数上册的教学.通过有理数的大小比较、有理数的四则运算、整式加减、一元一次方程的解法教学来反复孕育化归思想方法，使学生初步了解和体会到化归思想方法的意义和价值．

(2)领悟形成期　这一阶段为初一代数下册的教 学．主要是通过“二元一次方程组”、“一元一次不等式(组)”、“整式乘除”等内容的教学，从正面向学生介绍化归目标、确定化归方法，并通过引典故、举范例，深化学生对化归思想方法的认识，在此基础上应用它去探索分析问题，使学生初步形成化归思想方法的雏形．

(3)应用发展期　这一阶段为初二代数全册和初三代数“一元二次方程”的教学．通过教学引导学生参与知识发生过程，进一步揭示、概括、提炼化归思想方法，更高层次地领悟化归思想方法的涵义及其价值．在宏观上培养学生应用化归思想方法增强知识迁移的能力；在微观上，强化化归技能技巧的训练，使学生现有知识形态的化归思想方法逐渐内化为意识形态的化归思想方法．

(4)巩固深化期　这一阶段为初三代数“函数”、几何“圆”这两章的教学．特别在解几何问题时，引导学生把解决的几何问题作为化归对象，把基本图形作为化归目标，将复杂图形化归为基本图形等，通过不断地在新情景下应用化归方法，可使学生进一步巩固、深化对化归思想方法的理解，从而有意识尝试用数学思想方法指导自己的思维活动，形成独立探索问题的能力．

由于数学思想方法有浅显与深奥之别，学生的认知水平和数学思想方法的发展程度也不尽相同．因此，在不同数学思想方法的教学层次的划分也不一样，即使是同一种数学思想方法，它的四个发展期的确定也并不惟一，而应依据实际，作出较为合理的层次划分．

4．概括性原则

所谓概括就是将蕴含于数学知识体系中的思想方法归纳、提炼出来．在教学中，遵循概括性原则，将统摄知识的数学思想方法适时地概括出来，可以加强学生对数学思想方法的运用意识，也使其对运用数学思想方法解决问题的具体操作方式有更深入的了解，有利于活比所学知识，形成独立分析问题、解决问题的能力．

概括数学思想方法一般可分两步进行：一是揭示数学思想方法的内容、规律，即将数学对象共同具有的属性或关系抽取出来，这也就是“概”字的含义；二是明确数学思想方法与知识的联系，即将抽取出来的共性推广至同类的对象上去从而突出从特殊性认识上升为一般性认识．比如通过解方程

$(x-2)^2+(x-2)-2=0$与$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+1}=2\frac{1}{2}$，发现都可用换元法求解，在此基础上推广至$x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+1}=1$，也可用换元法求解．由此概括出换元法可以将复杂方程转化为简单方程，从而认识到化归思想方法是对换元法的高度概括，还可进一步认识到数学思想方法是数学的灵魂，它是对数学知识的高度概括．

5．实践性原则

学生数学思想方法的发展水平最终取决于自身参与数学活动的过程．数学思想方法教学既源于知识教学又高于知识教学．知识教学是认知结果的教学，是重记忆理解的静态型的教学，学生无独立思维活动过程，具有鲜明的个性特征的数学思想方法也无法形成．因此，遵循实践性原则，就是在实际教学中，教师要特别注重营造教学氛围，要给学生提供思想活动的素材、时机，悉心引导学生积极主动地参与到数学知识的发生过程中，在亲自的实践活动中，接受熏陶，不断提炼思想方法、活化思想方法，形成用思想方法指导思维活动，探索问题解答策略的良好习惯．数学思想方法也只有在需要该种思想方法的教学活动中才能形成．

参考文献

1 “MA”课题组．“发展学生数学思想，提高学生数学素养”教学实验研究报告．课程·教材·教法，1997，8

2 臧 雷．数学思想方法教学原则刍议．中学数学，1997，4

3 孙朝仁．初中数学思想方法教学的基本途径．中学数学教学参考，1998，11

如何用高数知识及其观点指导中数研究

湖北省武汉市第二中学 王池富

如何用高等数学及其观点指导中学数学研究和调控数学教学活动，这是值得广大一线数学教师积极参与研究的课题．指导与调控，并非狭义地指用高数知识解决初数习题，而应该包括：

(1)在备教材表述内容的同时,注意考察该数学知识在整个教学体系中的地位和作用：

(2)在设计暴露教学概念产生、形成、抽象概括的过程之前，注意了解该数学概念后续发展理论；

(3)在设计针对训练时，注意所训练的方法、技巧的方法论依据(含哲学背景、逻辑规律等)．

这样做的目的在于通过思考，不仅从方法上，而且从观念上充实自己，彻底打破“只会这样做，不知为什么要这样做”的经验型格局．本文通过若干例子阐述笔者是如何借助高数观点分析中数教材的，供同仁评鉴！

例 1 “集合”与“无穷观”．

无限的观点并非存在在极限概念中才涉及．实质上，高一入门阶段“集合”部分就渗透了无限观．如对有限集 A 和 B 之间的关系，当然可以通过一一查验集合中的元素确定其包含关系，但对无限集 A 和 B，则不可能如此操作．因此另辟蹊径，变有限集的操作查验凸(有限步)为定性描述(无限思想)。如$A \subseteq B \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \forall_x$，则$x \in B$；$A=B \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$且$B \subseteq A$，并由此衍生出解决问题的归纳——演绎式探索法．比如探求集合 A＝{x｜x＝2k＋1，k∈Z}与 B＝{x｜x＝4n±1，n∈Z}之间的关系：第一步，特值观察；第二步，猜测归纳；第三步，数学论证(用集合相等的定义)．这也打破了非要等到高二学习数学归纳法之后才出现探索式问题的传统讲授格局．同时，也为高一学习立体几何“线面平行”、“面面平行”由定义(不便操作——不可能查验)到判定方法(方便操作——定性论证)，奠定了理论和方法基础．

例 2 “距离”与“测度观”．

距离问题师生非常熟悉，但细究发现教材只定义了点到直线的距离，而回避了点到射线、线段的距离．有的教师认为点到射线、线段的距离就是点到射线、线段所在直线的距离，这个观点正确与否？我们从距离的背景入手，分析中学阶段各类距离的定义(两点的距离→点到直线的距离→点到平面的距离→线线、线面、面面间距离→球面上两点的距离)即可发现，其基本特征是最短；距离的知识背景是距离公理：(1) ρ (x，y)≥0；(2) ρ (x，y)＝ρ (y，x)；(3) ρ (x，z)＋(z，y)≥ρ (x，y))．在测度论中对两个集合 A、B 间距离定义为$d=\inf_{\substack{x\in A\\ x\in B}}\rho(x,y)$，由此观点自然明确了点到射线、线段、半平面的距离与点到射线、线段所在直线及半平面所在平面的距离不是同一概念．

例 3 “函数”与“赋范空间”．

函数是初等数学中的一个重要概念，深刻理解和掌握函数概念实质，不仅对学习初等数学本身,而且对进一步学习高等数学都会产生深远的影响.中

学阶段对函数曾有两种定义：

其一，如果在某变化过程中有两个变量 x、y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 是 x 的函数，……

其二，……当集合 A、B 都是非空的数的集合，且 B 的每一个元素都有原象时，这样的映射 f：A→B 就是定义域 A 到值域 B 上的函数(或 A、B 都是非空的数的集合，函数实质就是集 A 到集 B 的映射(必修教材))．如果从函数概念的发展线索来看，经历了以下几个阶段：

①研究具体的函数(如莱布尼兹)；

②研究变量与常量组成的函数(如贝努利)；

③研究函数的表示法(欧拉)；

④抓住对应实质研究函数(古典定义，如狄里赫莱)；

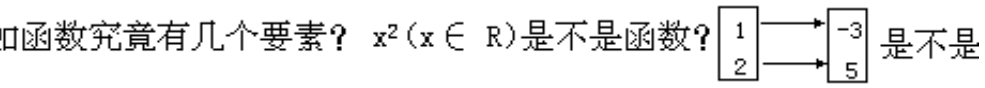
⑤借助集合用“关系”定义函数时期(如笛卡尔)；

⑥引进、提出δ函数时期；

⑦广义函数．

从这个角度分析，中学教材基本上采用了狄里赫莱的定义，其本质乃是对应思想．建立集合论以后，研究集合的结构固然重要，但建立和研究集合之间的映射更重要．现代数学的各个分支，实质就是研究具有不同数学结构的集合之间的各种映射关系(如同态、同构、可测函数等)．泛函分析中引入线性赋范空间概念后，可进一步研究左(右)逆映射、共轭映射等，这实质就是将实数域推广到了具有更一般数学结构的集合，将对应法则也推广到了更一般的情形．

概览函数概念发展的历程后，再回过头来看中学数学中有关函数的问题，



函数？函数的定义域能否为空集？函数的图象是连续的曲线，还是视为有序数对的集合？由于观点理性化，所以必将摒弃模棱两可的认识．

例 4 “共轭”与“对偶”观．

初中阶段曾利用共轭根式将形如 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 的分式分母有理化，高中阶段引入了共轭复数、椭圆的共轭直径、共轭双曲线的概念，还有大量成对出现的表达式(如a＋b与a－b，ab与$\frac{a}{b}$)和成对出现的结论(如$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$等)，以及借助配对巧妙求值的算法(如A＝sin10°sin30°sin50°sin70°，B＝cos10°cos30°cos50°cos70°，则 $A\cdot B=\frac{1}{16}\sin20°\sin60°\sin100°\sin140°=\frac{1}{16}B\Rightarrow A=\frac{1}{16}$ 尤其成对出现的命题，只需将其中一个的推理论证过程系统地予以改造即得另一个命题的证明．这些现象属于巧合，还是隐藏着必然规律？除了体现类比思维格式外，能否上升到定性的理论层次？事实上，射影几何中的对偶原理正好可看作上述对偶化方法的升格，或说上述现象正好是对偶原理在中学数学中的渗透．在射影平面上，视“点”与“直线”为对偶元素，“点在直线上”与“直线过点”、“两直线交于一点”与“两点连成一条直线”等基本关系称

需要全本请访问 www.ertongbook.com