
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

国家数学课程标准研制工作研讨会纪要*

国家数学课程标准研制工作小组

1999 年 10 月 8 日-10 日，受教育部基础教育司委托，国家数学课程标准研制工作小组在京召开了“国家数学课程标准研制工作研讨会”。会议特别邀请了国内知名的数学家姜伯驹院士、严士健教授、梁国平研究员、张尧庭教授，以及数学教育家张孝达、张奠宙、王长沛等先生。参加会议的有来自全国 24 个省、直辖市和自治区的教研员，30 余所高师院校的数学教育工作者，现行中小学教材的部分主编，国内较有影响的十几家中小学数学教育杂志的主编，20 余位来信、来稿的代表，以及国家数学课程标准研制工作小组的成员和在京的部分教育工作者，共计 180 多位同志汇聚一堂，结合“关于我国数学课程标准研制的初步设想（修改稿）”和工作组前期的研究成果，就义务教育阶段“国家数学课程标准”研制工作中可能涉及到的问题进行了广泛而深入的讨论。

大会首先由教育部基础教育司朱慕菊副司长向与会代表介绍了新一轮国家课程改革的基本思路。随后 7 位知名数学家和数学教育家为大会作了精彩的报告。次日会议分四个小组进行了紧张而有序的讨论与交流。大会的最后一天，国家教委考试中心数学学科负责人任子朝同志介绍了高考改革的基本思路，分析了近几年高考的基本走向，特别指出高考改革将随着课程改革的深入而深入，即课程改革到哪一步，考试就会跟进到哪一步。教育部基础教育司李连宁司长向全体与会者传达了六月份召开的第三次全国教育工作会议的基本精神，以及基础教育司落实全教会精神的基本思路。李司长的讲话给与会代表以极大的鼓舞，大家对未来基础教育发展特别是数学课程改革充满了信心。

本次会议是工作组成立以来召开的规模最大的一次研讨会，受到了全国数学教育界的关注，有的一线教师是自筹资金参加会议。

这次会议是一次“集体会诊”的过程，代表们认真分析了我国数学教育的成绩与不足。普遍认为，解放后的 50 年，我国数学教育取得了巨大的成就，中小学生学习勤奋，基本功扎实，基础知识和基本技能熟练，优秀学生在国际数学奥林匹克竞赛中频频获奖，这些事实都是举世公认的。但是，更应该充分认识到，我们存在的问题也相当突出，主要表现为学生的创新精神、实践能力较差，数学学习方式单一、被动，数学学习的情感体验消极等。造成这些问题的原因是多方面的，有教育观念、教育管理体制、考试制度和社会用人制度等的原因，也有来自课程、教材和教师等方面的问题。面对 21 世纪的挑战，我们必须在适度保持优势的同时，尽快改革现行数学课程中存在的与时代要求不相适应的地方。新一轮课程标准的制订正预示着课程改革的开始，预示着我国数学教育的一次重大变革。

通过三天的讨论，代表们就以下问题达成了共识：

1.必须在对社会、数学和学生重新认识的基础上，建立旨在促进人的健康发展的新数学课程体系，这是一项十分重要而紧迫的任务。数学教育要从以获取知识为首要目标转变为首先关注人的发展，创造一个有利于学生生动活泼、主动发展的教育环境，提供给学生充分发展的时间与空间。义务教育阶段的数学课程应充分体现普及性、基础性和发展性，必须有助于人的情感、

态度、价值观和一般能力的发展，同时使学生获得作为一个公民所必须的基本数学知识和技能，为学生终身可持续发展打下良好的基础。

2.新课程标准的研制应该继承我国数学教育原有的优秀传统，对基础知识基本技能给予充分的关注，但不能被任意拔高要求。新数学课程要下决心删除既非数学本质，又对学生发展不利的内容，如乘数与被乘数的人为区分，过于繁杂的四则计算、算术应用题、恒等变形和几何证明难题，死记硬背的“口诀”等；增加密切联系生活，反映数学发展的新内容，如概率统计、线性规划等。

3.新课程标准要致力于弥补我国数学教育存在的不足。关注学生已有的生活经验和知识背景，关注学生的实践活动和直接经验，关注学生的自主探索和合作交流，关注学生的数学情感和情绪体验，使学生投入到丰富多彩、充满活力的数学学习过程中去，使数学学习具有价值，富于意义。新的课程要有利于学生通过主动参与、积极思考、与人合作交流和创新等过程，获得数学学习的自信心和兴趣，理解数学的基本思想和方法，体会数学的探索过程，体会数学与自然、社会和人类生活的联系，获得情感、能力、知识的全面发展。

4.新课程标准要充分重视新技术的运用。在义务教育阶段引入计算器已经得到了与会代表的广泛共识，大部分的同志认为学生可以在小学中、高年级使用计算器，用来处理繁杂的计算，解决数据较为复杂但对学生富有意义的实际问题，探索有关数字的规律。有的代表还提出将函数计算器和计算机列入到新的课程标准中，并在每学期设立相应的课题。

5.新课程标准在保证学生发展基本要求的基础上，应具有弹性。给学生学习提供充分的时间和空间，给教材编写、学校管理和教师教学留有充分的余地。

6.课程的实施过程非常重要。新课程的推进要像“滚雪球”一样，本着学校和教师自愿的原则设立实验区，并给实验教师一定的倾斜政策，在实验的基础上再逐步推广。目前可以逐步修改现有的教学大纲和教材，为新课程标准的推广奠定基础。同时，必须加大教师培训的力度，不仅包括对在职教师的培训，还包括高等师范院校未来师资的培养，使教师尽快转变观念，提高业务素质，适应并参与数学课程改革。

总之，新课程标准应促进中小学数学内容的现代化，增进数学与学生现实世界的联系，努力改善学生的学习方式，使学生参与到实践、探索、交流的主动学习的过程中，并在这个过程中，整合社会、时代、学科的要求，使学生在整个学习生涯中得到充分的发展。

与此同时，代表们还就一些存在争议的问题发表了一系列建设性的意见：

1.关于平面几何的改革。对于这一数学课程改革的焦点问题，刘兼同志在大会上就“初步设想”中对此的处理作了详细的阐述：首先，初中几何课程的首要目标是使学生更好地理解人类赖以生存的空间，发展学生的空间观念和几何直觉。作为逻辑推理的体系，几何也许是可以代替的，但作为一种直观、形象化的数学模型，几何是不可替代的。因此，新一轮数学课程的改革，几何的内容不但不会减少，反而将大大拓展，特别是有关三维空间的几何问题。第二，培养学生“说理有据”是十分重要的，它在数学的各个领域中都应该得到体现，不能仅仅局限于平面几何中。第三，对于义务教育阶段

的学生，体会证明的必要性比证明本身更为重要，没有感受到证明的必要性，是很难理解证明的意义和方法的。第四，公理化的思想是数学的本质之一，但不是数学的全部。同时，对绝大多数义务教育阶段的学生来说，理解这一思想体系是十分困难的。大量的教学实践表明，平面推理几何是一把“双刃剑”，一方面有大约 20%—30%的初中学生因为学习平面推理几何，从此走上了数学和科学研究之路；另一方面，有不少学生在遭遇平面推理几何之后，丧失了对数学的学习兴趣，乃至失去了对学校教育的信心。第五，理性精神是人类文明的重要体现，理性精神的基石是对客观事实的尊重和批判的精神，它决不等同于逻辑三段论。因此，对于义务教育阶段的学生，几何教学更重要的目标是培养空间观念、几何直觉和合情推理能力，同时通过对基本图形的基本性质的证明，进行有限而必要的论证训练，使学生把主要的精力用于理解证明的必要性，认识证明的前提，体会证明的思想，而不是证明的技巧和证明的速度。

2.代表们一致赞成大力精简远离生活的、技巧性过高的算术应用题，但对小学是否引入方程以帮助解决应用题存在着两种意见：一种意见认为小学生对方程的一套形式化语言很不适应，并且小学解方程的方法与初中的方法不一致，在小学学习解方程事倍功半。同时由于精简了算术应用题，小学引入方程又显示不出其优越性，因此，可以不在小学引入方程，当然，应渗透方程的思想。另一种意见则认为，20 多年来的教学改革，体现出小学数学内容现代化的举措之一就是引入了方程，如果不引入方程，将是一种倒退。能否在这两种意见中取得一种平衡，在引入方程的同时，减少不必要的形式化部分，还有待研究。

3.对一些具体内容的取舍，特别是在“度”的把握上，还需要进一步研究。如小学四则运算的速度和复杂度要求到什么程度：负数在何时引入；分式方程是否保留；计算机等新技术要求到什么程度；新内容（如概率统计等）应增加到什么程度以及课程的弹性如何体现等。

与会代表们一致表示，鉴于数学课程改革涉及的范围很大，应“有所为而有所不为”。对于看准的问题，应马上付诸行动，对于存在争议的问题，要尽快立项，在深入研究的基础上，提出改革方案，并组织试验。

这次会议是相当富有成效的，通过三天的讨论，与会代表们的感触很多。大家共同呼吁：课程的改革要适应社会和数学发展的要求，促进学生的发展；课程改革要纳入到规范化和法制化的轨道，形成良性循环，做到每 5－10 年有一次大的变化和调整；必须出台相应的配套措施，尤其是考试制度必须做出相应的改革，为课程发展服务；必须加大教师培养和培训的力度。

会后，国家数学课程标准研制工作小组的成员将带着本次会议的研究成果，集中一段时间进行标准的起草工作。按教育部的统一要求课程标准的初稿将于今年年底完成，2000 年上半年在全国大范围地征求意见，在此基础上于明年暑期完成修订稿。如果进程顺利，新的课程标准可望在明年下半年提交教育部批准并组织实验。鉴于新、老标准的差别较大，新标准将不采用一步到位的实施方式，而是从各省的课程改革试验区开始，由点到面，滚动发展，逐步推进，计划用 5－10 年的时间，完成新老标准的过渡。在此期间，考试方式也将采用“双轨制”，即新标准用新的考试方式，旧大纲用老的考试方式，以确保新老课程标准的衔接。在这里，我们数学课程标准研制工作小组的全体成员向所有与会代表和所有关心和支持这项事业的同行表示真诚

的感谢，并欢迎大家继续来信、来稿，为我国新课程标准的研制提出宝贵的意见和建议。让我们共同努力，为正在成长中的下一代提供更好的精神食粮！

需要全本请访问 www.ertongbook.com

“过程学习”教法实验简报

安徽省蚌埠市第二中学 肖 健 王学山（邮编：233000）

摘 要 “过程学习”是美国 80 年代提出的一种教学理论，由于这种教学方法有助于学生创造性思维和能力的培养，得到广大教学同行的认可，并广泛付之实施与实验。本文是蚌埠二中通过初中、高中两个阶段，五年对比实验的一份“过程学习”教法实验简报，就此项教法的理论与认识，实验情况与实验结果，作了较详尽的论述。

我们课题组从 1994 年开始在数学教学中进行“过程学习”的教法实验，五年来经过初中、高中两个阶段探索实践与对比实验，取得了不少体会和成果，现将实验状况简报如下：

1“过程学习”教法实验的理论要点

美国教育家在 80 年代末提出了“过程学习”的理论，其理论要点是：“过程学习，就是要培养学生的创造性思维和各种能力，在教学过程中，不仅重视学习结果，更重视学习的过程，简单地讲，过程学习，就是方法学习”[1]。我们认为，过程学习的理论还应拓宽，“在重视学习的过程中”着重研究学生学习心理的变化——通过外显的认识，借以提高“方法学习”的效率。过程学习的程序、内涵也应拓宽，应将“结论过程的研讨——得出结论”这一学习过程加以延伸，在得出结论之后，还要将结论知识加以运用，在运用中加深对“过程”和“结论”的进一步理解。其模式可以概括为“结论过程的研讨——得出结论——融会贯通——加以运用——加深对过程研讨的理解”。

实验中我们深深感到“过程学习”教法应贯串整个教学过程，教师应在充分尊重学生是学习主体的前提下，竭力提高学生求知欲、求成欲、互助欲，把数学教学作为一种活动来进行，使学生在课堂上有自由活动的机会，处于积极参与、积极思维状态。

2“过程学习”教法实验情况

在教师与学生水平均较接近的情况下，实验班用“过程学习”教法进行教学，对照班用一般方法进行教学。实验班与对照班的教材是统一的，进度是一致的，测试卷是相同的。

实验班的教学方法——“过程学习”教学法。在教学实施上大致分为六个环节：

设置情境——探索结果——归纳结论——引申拓宽——效果反馈——及时调节。

2.1 设置情境，激发学生参与意识

心理学研究表明：当一个人有强烈的、明确的学习动机时，就能产生坚定的意志，积极主动地投入学习过程完成学习任务。因此“过程”教学，教师首先要根据教材的重点和难点，选择突破口，运用学生的生活经验，从学生熟知的事物入手，设计成生动、切题的问题或活动，把重点放在如何使学生对所学知识产生浓厚的兴趣上。

2.2 重视过程学习，探索结论的形成

布鲁纳认为“探索是数学教学的生命线”。在学生求知欲正浓，探索欲正旺的时候，教师要不失时机地进一步引导学生有目的、有针对性的去探索

解决问题的方法，解决问题的理论根据，使学生思维始终处于高度活跃状态。在探索过程中可能遇到许多障碍，教师应及时给予指导，“架桥铺路”，让学生在探索过程中，逐步掌握学习方法，学会“学习”，这是“过程学习”的重要环节。由于我们重视学生数学学习过程中的学法指导，实验班学生思维灵活、新奇、求异，长期扎实的训练，他们能把孤立、游离状态下的知识、方法进行积累、归纳、串通、灵活地选择思维发散点，并掌握多种发散方式，数学素质提高较快，思维的灵活性、广阔性、深刻性进一步提高。

2.3 引申、拓宽，灵活运用所学知识

教师在备课过程中，应准备一些有梯度的习题，本着由易到难、由浅入深的原则，对某些习题进行适当的变化，引申或拓宽，培养学生以不变应万变的能力（即题目是千变万化的，但基础知识基本技能是不变的）。

同时，这可以通过学生自拟习题，互相出题，以检查学生对结论形成的过程是否明确，彻底改变那种重结论轻过程的教学方法。

2.4 归纳结论，使知识系统化

组织学生对探索的结果进行归纳整理，使之形成一般的结论。教师应在学生归纳的基础上进行必要的补充与完善，揭示所得结论在整个知识体系中的联系和作用，以便灵活地应用它去解决问题，为以后的学习奠定良好的基础。

2.5 反馈学习效果，更多了解学生

过程学习重视教学信息反馈，在教学中，要通过巡视、提问、检测来了解学生的学习效果，对学习中暴露出的问题，要及时组织学生进行互相质疑与解答，把一些隐蔽较深，不易被发现的问题或普遍易犯的错误通过质疑与反馈达到明确认识，引导同学走出误区。要充分利用电化教学手段对整个教学过程作最优化控制。

2.6 调节矫正，保证效果

在每一单元结束时，要及时进行“阶段过关”检测，对教学效果进行检查，以便教师对教法加以适当调节与改进，对已达到教学要求的学生，可进一步设计一些有一定难度的题目，让他们自己练习，对学有困难的学生要及时进行矫正性辅导，帮助他们过关。

以上六个环节，相互联结，互相促进，形成有机整体。教师在教学中应根据学生的具体情况以及教材特点有所侧重，体现学生的主体作用和发挥教师的主导作用，克服传统教学的弊端，发展学生的智力和提高学生的能力。

3“过程学习”教法的实验结果

3.1 提高了学生学习的兴趣

通过“过程学习”的教法实践，明显提高了学生的学习兴趣，问卷调查表明：实验前后，对数学不感兴趣的学生由 22.5%降到 5%，能主动参与学习的学生由 15%提高到 57.5%。实验班与对比班相比较，对数学兴趣浓的各占 97.5%与 86%。

3.2 提高了差生与学生总体的学习成绩

不少原来数学差的学生，究其原因多数是学习方法不当。现在，由于改进了学习方法，学有所得，增强了学好数学的信心，调动了学习积极性和主动性，逐步提高了成绩，克服了两极分化。据统计，1995 年中考数学成绩与 1998 年高考数学成绩，实验班及格率均为 100%；优秀率各为 82.5%与 88%（对比班中考、高考优秀率各为 58.4%与 67%，另一所市重点中学各为 29.2%与

39%）。

3.3 提高了学生的参与意识

不少以往“以听为主，力争听懂”的学生，通过这阶段实验，绝大多数学生有了主动参与的意识，真正发挥了“主体”作用，课堂气氛生动、活泼，成绩有了稳步提高，有的学生甚至成为数学的优等生。

3.4 有利于学生的思维发展和能力培养

随着实验的进行，过程学习使得很多学生都愿意充当小老师的角色，走上讲台，谈自己的见解；在解题中不满足于一种解法，争相寻求最优化的解法。主动阅读课外参考书，在省级竞赛中取得优异的成绩。1995 年省级初中数学竞赛，在实验班 40 名学生中，参赛人数为 20 人，获奖率达 80%（对比班获奖率为 22.5%）。1997 年考入少年班学生有 8 人。高中数学竞赛 6 人获奖。1998 年高考本科达线率为 94.3%，重点院校达线率为 91%。

3.5 实验班与对照班的学习成绩比较

“过程学习”教法通过教师引趣、设问、置疑，学生课堂反映有较明显差异，每节课结束后，学生常仍沉浸在问题的反思中。学习成绩也随之明显出现差异。以实验班与对比班的中考成绩相比，及格率各为 100%与 88%，优秀率则差别更大，各占 88%与 67%。

3.6 实验班与对照班的思维能力测试比较

中学数学着重培养学生创造性思维能力，即用新的思维活动创造新的思维产品，它包含聚合思维和发散思维的有机结合，从培养学生能力来讲，发散思维尤为重要。若数学教学光侧重于模式训练，会使学生思维僵化，学生将来无法面对 21 世纪复杂风云的竞争环境。而“过程学习”强化了学习过程中本质规律的探讨，让学生体验规律产生的思维过程，有利于培养学生利用规律产生探究作发散性思维。实验班与对比班思维发散能力调查表明、实验班也明显高于对比班。“过程学习”充分尊重学生的思维，同时也提高教师的课堂应变能力。

3.7 实验班与对照班视图能力的比较

一次测试表明：要求学生在原图形中构建不同题目，实验班可达 15 个，而对照班仅达 10 个。

3.8 学生解题过程中“从重”心理和潜能的比较

我们曾出了一个平面几何题给学生思考 3 分钟，然后各找班上公认数学“尖子”回答证题思路与正确解法。再让全体学生思考有无其他方法解题。结果实验班换位思考提出新方法的人约占 63%，而对比班仅占 36%。

学生对自己的数学潜能估价及数学成绩在班级中的位置是否满意、对竞争是否有兴趣，我们在实验班和对比班做了问卷调查。调查表明：对数学成绩目前在班中位置不满意的实验班占 52.6%，对比班占 34%。对竞争有兴趣的，实验班占 79%，对比班占 66%。说明实验班的竞争意识更强些。

4“过程学习”教法实验的体会

通过 5 年两个阶段的实验，我们认为“过程学习”教法是可行的、高效的，“过程学习”教法适合青少年心理特征与数学学科特点，具有可操作性与迁移性，实验成绩是显著的。

怎样提高学生主体参与的积极性，怎样通过课堂教学提高学生的数学素质，“过程学习”教法是一种有效手段，通过实验我们还有以下几点突出体会：

4.1 素质教育要求 中学数学课堂教学应适当渗透“建构”思想，而“过程学习”教法对训练学生建构数学模型是有力的、有效的。数学本身就是一个社会建构过程，其流程图是：物质世界形形色色问题，建立数学模型，产生数学知识应用，通过管理挂靠，完成知识到经济的转换。而“过程学习”教法的六个环节基本上能反映上述数学的本质。“过程学习”教法使学生明了建构就是创造，不少学生尝到这种成功的感受，有利于将来的发展。

4.2 中学数学课堂教学应完成三个转变 即由个人组合转为师生教学互动；由教师作为正确答案唯一权威转为以逻辑导引与数学验证为标准；学生由机械听记转为积极参与和思维创新。“过程学习”教法有利于数学课堂教学的上述三项转变。

4.3 数学教师在课堂中应当扮演一个怎样的角色？ 我们认为应是导游。应以清晰的思路、精炼的语言、得当的方法，将学生导入数学王国广阔天地。老师要导得艺术，学生要游得积极，充分体现课堂的“互动精神”。教师应该是“泵”而不是“滤器”。教师要对自己的教学实践不断反思、总结、创新。教师应积极投入教育科研洪流终身不断充电接受继续教育。

数学教育理论仍处在襁褓中，60 年代“新教”、70 年代“回归”、80 年代“能力”、90 年代“大众化数学”，新观点、新口号不断涌现，做为一名数学教师应不断反思、不断实践、开拓思维、改革教学结构，研究学生学习心理，积极投入到数学教育理论研究中去。

参考文献

1 冯克诚，西尔枭主编。实用课堂教学模式与方法改革全书。北京：中央编译出版社，1994。

2 青浦县数学教改实验小组。学会教学。北京：人民教育出版社，1991。

3 吴克明，翟大林，孙自珍编著。中小学教育科研方法。合肥：安徽教育出版社，1993。

4 卢元锴。当代美国中小学教育现状与趋势。

中学教育，1995（1）。

借助函数的性质证明不等式

安徽萧县中学 冯亚光 （邮编：235200）

不等式是中学数学中重要的基础知识，教材中有关不等式的证明重点介绍了比较法、综合法、分析法、数学归纳法及反证法，其实，函数作为中学数学的轴线，它与不等式更有着千丝万缕的联系，因此借助函数的性质证明不等式也是一种重要的思考途径。

1 运用二次函数的性质推证

当不等式含有某字母的二次项时可构造二次函数，利用二次函数的性质推证不等式。

例 1 设 A+B+C=n 且 x、y、z∈R，求证：

$x^2+y^2+z^2\geq 2xy\cos C+2yz\cos B+2zx\cos A$。

证明 令$F(x)=x^2+y^2+zy-2xycosC-2yzcosB-2zxcosA$

$=x^2-2(ycosC+zcosA)x+y^2+z^2-2yzcosB$。

由 A+B+C=n，可知

cosB=-cos（A+C）=-cosAcosC+sinAsinC。

又$\triangle=4(ycosC+zcosA)^2-4(y^2+z^2-2yzcosB)$

$=4[y^2(\cos^2C-1)+z^2(\cos^2A-1)+2yzcsAcosC+2yzcosB]$

$=-4[y^2\sin^2C+z^2\sin^2A-2yzsinAsinC$

$=-4(ysinC-zsinA)^2\leq 0$

∴ F（x）≥0，

即 $x^2+y^2+z^2\geq 2xycosC+2yzcosB+2zxcosA$。

注 高中代数（下册）第 15 页习题 7、8、9、10 均可利用二次函数性质推证。

例 2 设$f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+\Lambda+(n-1)^x+n^xa}{n}$

其中 a∈（0，1]，证明 2f（x）＜ f（ 2x），当 x≠0 时成立。

分析 根据不等式构成的特点，可构造二次函数证明。

证明 根据题意，要证 2f（x）＜f（2x），即要证 n≥2 时，有

$[1+2^x+\Lambda+(n-1)^x+n^xa]^2<n(1+2^{2x}+\Lambda+(n-1)^{2x}+n^{2x}a],a\in(0,1],$

x≠0。

为此，可构造函数

$f(u)=(u-1)^2+(u-2^x+[u-(n-1)^x]^2+(u-n^xa)^2$

$=n\cdot u^2-2[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa]u+[1^2+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a^2]$。因为$x\neq 0$，$u-1$，…，$u-n^xa$不能同时为零，所以有

f（u）≥0，又 n≥2，故函数 f（u）的图象为开口向上的抛物线，与 x 轴无交点。

所以△＜0，即

$\triangle = 4[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2-4n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a^2]<0$，整理，得

$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2 < n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a^2]$，

又$a\in(0,1]$，有$a^2<a$，$n^{2x}a^2\le n^{2x}a$，所以$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a]$。

即 $2f(x)<f(2x)$，$a\in(0,1]$，$x\neq 0$。

2 运用一次函数的性质推证

当不等式含有某字母的一次式时，可考虑利用一次函数的性质推证。

例 3 设$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，求证：

$ab+bc+ca+1>0$。

证明 令 $f(a)=(b+c)a+bc+1$，$-1<a<1$。

$\because |b|<1$，$|c|<1$，

$\therefore f(1)=b+c+bc+1=(b+1)(c+1)>0$，

$f(-1)=-(b+c)+bc+1=(c-1)(b-1)>0$。

$\therefore$当$|a|<1$时，$f(a)>0$，

即 $ab+bc+ca+1>0$。

例 4 设$0\le a$、b、$c\le 2$，求证：

$4a+b^2+c^2+abc\ge 2ab+2bc+2ca$。`

证明 视 a 为自变量，构造一次函数

$f(a)=(bc-2b-2c+4)a+(b^2+c^2-2bc)$。

由$0\le a\le 2$，知 $f(a)$表示一条线段。

又 $f(0)=(b-c)^2\ge 0$，

$f(2)=b^2+c^2-4b-4c+8=(b-2)^2+(c-2)^2\ge 0$。

可见上述线段在横轴及其上方，

$\therefore$ $f(a)\ge 0$，即

$4a+b^2+c^2+abc\ge 2ab+2bc+2ca$。

3 运用函数的单调性推证

例 5 已知：$a>b>0$，求证：

$$\frac{a-b}{a+b}<\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

分析 考查函数 $f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{a^x+b^x}$（$a>b>0$），

$$f(x)=\frac{a^x-b^x}{a^x+b^x}=1-\frac{2b^x}{a^x+b^x}=1-\frac{2}{(a/b)^x+1}$$，

为R上的增函数，$\therefore \dfrac{a-b}{a+b}<\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$。

例6 求证：$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\Lambda\dfrac{2n-1}{2n}\le\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$。

证明 原不等式等价于

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\Lambda\ \frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{3n+1}\leq 1,$

设 f（n） $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\Lambda\ \frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{3n+1}$。

现考查它的单调性

$\because\ (\frac{f(n+1)}{f(n)})^2=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\cdot\frac{3n+4}{3n+1}$

$=\frac{12n^3+28n^2+19n+4}{12n^3+28n^2+20n+4}<1$，

$\therefore$ {f（n）}是递减数列，有f（n）＜ f（1） $=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}=1$，即原不等式成立。

4 运用函数的奇偶性推证

例 7 求证：$\frac{x}{2}>\frac{x}{1-2^x}$ （$x\neq 0$）。

分析 此不等式变形后与偶函数相关，便联想到构造偶函数。

证明 设f（x） $=\frac{x}{2}-\frac{x}{1-2^x}=\frac{x(2^x+1)}{2(2^x-1)}$。

则f（- x） $=\frac{-x(2^{-x}+1)}{2(2^{-x}-1)}=\frac{x(2^x+1)}{2(2^x-1)}=$ f（x），

f（x）为偶函数。

当x＞0时，2^x＞1，即f（x） $=\frac{x(^x+1)}{2(2^x-1)}$＞0；

又当 x＜0 时，有-x＞0，f（x）=f（-x）＞0；

综上恒有f（x）＞O，从而 $\frac{x}{2}>\frac{x}{1-2^x}$。

5 运用函数的图象推证

例8 已知$a\in R^+$，$b\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，求证：

（b - a）^{2} + （$\sqrt{2-b^2}-\frac{9}{a}$）$^2\geq 8$。

分析 左边可看作点P（b，$\sqrt{2-b^2}$），Q（a，q / a）的距离的平方。又点 P可看作位于半圆 $x^2+y^2=2$（y≥0）上的点，点Q（a，q / a）可看作位于反比例函数 y=9/x 在第一象限内那一支的点，P、Q 间的最短距离应是直线y = x与半圆$x^2+y^2=2$（y≥0）及函数y = q / x在第一象限内的一支的两交点的连线，此时有P（1，1）及 Q（3， 3），$|PQ|=2\sqrt{2}$，故命题成立。

小结 利用函数的性质推证不等式，在一般情况下，首先应根据所给不等式的特征，构造出一个具有所需性质的函数，再利用函数性质，作出简便证明，只要函数构造恰当，推证过程就会变得特别简捷明快。

浅议等差数列的基本性质

安徽省阜阳一中　袁永才（邮编：236034）

等差数列具有一系列基本性质，掌握这些特性对提高解题速度有着重要的作用。现总结如下，以供参考。

性质 1 有限项等差数列到首尾两项“等距离”的两项的和等于首尾两项的和。即：等差数列$\{a_n\}$共有n项，则 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$。

性质 2 若$\{a_n\}$是等差数列，a_m、a_n、a_p、a_q分别是该数列的第m、n、p、q项，且$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$。

利用等差数列的通项公式容易证得以上两个性质。

性质 3（性质 2 中的条件再加强些）在性质 2 的条件下并满足：①公差$d\neq 0$；②$mn>pq$，则有$a_m a_n$，$>a_p a_q$。

如：公差不为零的等差数列$\{an\}$的前100项为a_1，a_2，a_3，…，a_{100}，则有$a_1a_{100}<a_2a_{99}<a_3a_{98}<\cdots<a_{49}a_{51}<a_{50}^2$。

证明：设数列$\{a_n\}$首项为a_1，公差$d\neq 0$，则由通项公式得：$a_m=a_1+$（m-1）d，$a_n=a_1+$（n-1）d，$a_p=a_1+$（p-1）d，$a_q=a_1+$（q-1）d，则 $a_m a_n=a_{1^2}+a_1$（m+n-2）d+（m-1）（n-1）d^2，

$a_p a_q=a_{1^2}+$（p+q-2）$a_1 d+$(p-1)（q-1）d^2。

∵ $p+q=m+n$，$mn>pq$，∴ $a_m a_n-a_p a_q=$（mn-pq）$d^2>0$，即 $a_m a_n>a_p a_q$，得证。

性质4 若$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=pa_n+q$（其中p，q为给定常数），则数列$\{b_n\}$也是等差数列，且公差为原来的p倍。

推广可得：

性质5 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，$b_n=sa_{n+p}+ta_{n+q}$（s、t为给定常数，p、q为给定的正整数），则数列$\{b_n\}$也是等差数列，且公差为（s+t）d。

以上两个性质由等差数列的定义即可获证。

将性质 4 再加以推广可得：

性质6 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，$b_n=pa_{kn}+q$（其中k为给定的正整数，则数列$\{b_n\}$也为等差数列且公差为 pkd。

证明 由$b_n=pa_{kn}+q$知：$b_{n+1}=pa_{k(n+1)}+q=pa_{kn+k}+q=p(a_{kn}+kd)+q=pa_{kn}+q+kpd=b_n+pkd$，∴ $\{b_n\}$ 是等差数列且公差为 pkd。

将性质 5 与性质 6 结合起来加以推广可得：

性质7 若$\{a_n\}$**是公差为**d**的等差数列，则**$b_n=\sum_{i=1}^{r}s_i a_{k_i n}+p_i$**（其中**$s_i$**为给定的常数，**$k_i$**，**$p_i$**为给定的自然数，**$i=1,2,\cdots,r$**）仍为等差数列，其公差为（**$\sum_{i=1}^{r}s_i k_i$**）**d。

此性质可直接由性质 5、性质 6 推得。

下面再看等差数列的前 n 项和的几条性质：

性质8 若$\{a_n\}$**是公差为**d**的等差数列，**S_n**是其前**n**项和，则对一切自然数 n 均有**

$S_{n+2}+S_n=2S_{n+1}+d$。

证 设$\{a_n\}$**的首项为**a_1**，则由前**n**项和公式得：**

$$S_{n+2}=(n+2)a_1+\frac{(n+2)(n+1)}{2}d,$$

$$S_{n+1}=(n+1)a_1+\frac{(n+1)n}{2}d,$$

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

$$\therefore S_{n+2}+S_n=2[(n+1)a_1+\frac{n(n+1)}{2}d]+d=2S_{n+1}+d。$$

将此条性质加以推广则有：

性质9 若$\{a_n\}$**是公差为**d**的等差数列，**S_k**，**S_{2k}**，…，**S_{nk}**，分别为其前 k 项，前 2k 项，…，前 nk 项的和（k 为给定的正整数），则对于一切自然数 n 均有**

$S_{(n+2)k}+S_{nk}=2S_{(n+1)k}+k^2d$。

证 设$\{a_n\}$**的首项为**a_1**，由其前**n**项和公式得：**

$$S_{(n+2)k}=(n+2)ka_1+\frac{(n+2)k[(n+2)k-1]}{2}d,$$

$$S_{(n+1)k}=(n+1)ka_1+\frac{(n+1)k[(n+1)k-1]}{2}d,$$

$$S_{nk}=nka_1+\frac{nk(nk-1)}{2}d,$$

$$\therefore S_{(n+2)k}+S_{nk}$$

$$=2(n+1)ka_1+2\cdot\frac{(n+1)k[(n+1)k-1]}{2}d+k^2d,$$

$$\therefore S_{(n+2)k}+S_{nk}=2S_{(n+1)k}+k^2d$$

性质10 若$\{a_n\}$**是等差数列，**S_{nk}**（**$n=1,2,\cdots$**）表示其前**nk**项的和（k 为给定的正整数），则数列**

$\{S_{(n+1)k}-S_{nk}\}$**为等差数列。**

证 设数列$\{a_n\}$**的首项为**a_1**，公差为**d**，记**

$b_n=S_{(n+1)k}-S_{nk}$**，则**$b_{n+1}=S_{(n+2)k}-S_{(n+1)k}$。

∴ $b_{n+1}-b_n=S_{(n+2)k}-S_{(n+1)k}-S_{(n+1)k}+S_{nk}=S_{(n+2)k}+S_{nk}-2S_{(n+1)k}$，

∴ 由性质 9 知 $b_{n+1}-b_n=k^2d$ 为常数。根据等差数列定义知数列$\{S_{(n+1)k}-S_{nk}\}$是公差为 kd^2 的等差数列。

除以上介绍性质外，等差数列还有以下优美的组合性质：

性质 若数列$\{a_n\}(n=0，1，\cdots)$为等差数列，则：

$C_n^0a-C_n^1a_1+C_n^2a_2-\Lambda+(-1)^nC_n^na_n=0$对于一切$n\geq3$的自然数均成立。

证（用数学归纳法）首先观察一下简单情况：若a_0，a_1，a_2成等差数列，则易知$a_0-2a_1+a_2=0$；若a_0，a_1，a_2，a_3成等差数列，则易知$a_0-3a_1+3a_2-a_3=0$；若a_0，a_1，a_2，a_3，a_4成等差数列，则易知$a_0-4a_1+6a_2-4a_3+a_4=0$成立。故当$n=3$时，命题显然成立，且当a_1、a_2、a_3、a_4成等差数列时，有$a_1-3a_2+3a_3-a_4=0$成立。

设 n=k 时猜想成立，则有：

$C_k^0a_0-C_k^1a_1+C_k^2a_2-\Lambda+(-1)^kC_k^ka_k=0$①

$C_k^0a_1-C_k^1a_2+C_k^2a_3-\Lambda+(-1)^kC_k^ka_{k+1}=0$②

成立，①-②得：

$C_k^0a_0-(C_k^1+C_k^0)a_1+(C_k^2+C_k^1)a_2-\Lambda+(-1)^{k-1}(C_k^k+C_k^{k-1})a_k-(-1)^kC_k^k a_{k+1}=0$

由组合式得$C_k^i+C_k^{i-1}=C_{k+1}^i$（$i=1$，$\cdots k$），故得：

$C_{k+1}^0a0-C_{k+1}^1a_1+C_{k+1}^2a_2-\Lambda+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}\cdot a_{k+1}=0$，

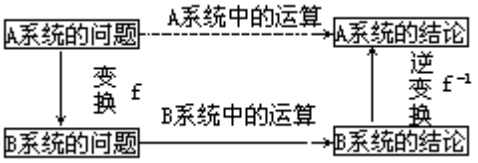
即当 n=k+1 时猜想成立，综上所述当 n 为大于或等于 3 的自然数时命题均成立。

以上只是列举了等差数列一系列最基本的性质，当然远不止这些，希望读者再将这些问题加以推广，从而达到更深层地掌握等差数列，并能运用它来研究相关的其他数列的目的。

变换思想在代数中的应用

安徽教育学院 金永容 （邮编：230061）

中学几何课程改革的一种主要倾向是加强几何变换的观点，变换思想和变换法在几何证题和解题中的应用得到重视和加强，大家知道变换群在几何中扮演着重要角色，其实变换的思想和技巧在代数中的应用也很广泛，它解题的基本模式如下图：



现就其中较具代表性的部分作介绍：

例 1　证明任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人互相认识或有 3 个人都不认识。

分析 在平面上取定 6 个点 A、B、C、D、E、F（任三点不共线）分别代表这6个人，将6个点两两连线，共得$C_6^2 = 15$条线。约定：两点连线涂以红色表示相对应代表的两人认识，两点连线涂以蓝色表示相对应代表的两人不认识。于是原问题等价于单色三角形问题：用红蓝两色涂边法去连接平面上任三点不共线的 6 个点，必然从中找到或者三边全红、或者三边全蓝的三角形。

证明 从顶点 A 出发，由 A 发出的 5 条线中必有三条同色，不妨设 AB、AC、AD 同红，再看 B、C、D 三点两两连线的三边中，若有一边涂红，比如 BC 涂红，则得三边全红的△ABC，否则△BCD 是三边全蓝的三角形。

例2 求不定方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$（n、m∈N）的非负整数解的个数。

分析 设计模型；n 个不可辨别的球放入 m 个不同的盒子中。球的每一种放法对应着方程的一组解；反之，方程的每一组非负整数解对应着球在盒中的一种放法。

解 因为n个不可辨别的球放入m个不同的盒子中放法的总数为C_{n+m-1}^{n}，所以方程的非负整数解的个数为C_{n+m-1}^{n}。

例3 任给7个实数，证明其中必有两个数x、y满足$0 \le \dfrac{x-y}{1+xy} \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

分析 建立区间（$-\infty$，$+\infty$）到区间（$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$）的一一映射f：x→tanα，任给的7个实数一一对应于（$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$）上的7个角弧度。问题转化为：必有两个角弧度a_1，$a_2 \in$（$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$），使$0 \le \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1+\tan\alpha_2} \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

证明 将区间（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）分成6等分：（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$)，[$-\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{6}$)，[$-\frac{\pi}{6}$，0)，[0，$-\frac{\pi}{6}$)，[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$]，[$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$)，由抽屉原则必有两个角弧度（不妨设$a_1 \geq a_2$）落在同一小区间内，从而$0 \leq a_1 - a_2 \leq \frac{\pi}{6}$，由正切函数的单调性：

$0 \leq \tan(a_1 - a_2) \leq \tan\frac{\pi}{6}$，

所以 $0 \leq \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$，

记$\tan a_1$、$\tan a_2$对应的实数分别为x、y，有$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$。

定义 设$\{a_n\}$为一给定的无穷数列，则形式幂级数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$称为数列$\{a_n\}$的母函数。

显然数列$\{a_n\}$与其母函数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$是一一对应的，于是对数列的研究可转化为对其相应的母函数的研究，一个数列的母函数一旦确定，则此数列的通项公式也随之被确定。

例4 求斐波那契数列$\{a_n\}$的通项。已知$a_0 = 1$，$a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）。

解 设数列$\{a_n\}$的母函数为：

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，

$-xf(x) = -a_0 x - a_1 x^2 - \cdots - a_{n-1} x^n - \cdots$，

$-x^2 f(x) = -a_0 x^2 - a_1 x^3 - \cdots - a_{n-2} x^n - \cdots$，

将以上三等式两边相加得：

$(1-x-x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n + \cdots$，由已知条件得$(1-x-x^2) f(x) = 1$，

所以$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

$= \frac{-1}{\{x+[(1+\sqrt{5}/2)\}\{x+[(1-\sqrt{5})/2]\}}$

需要全本请访问 www.ertongbook.com