
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

我的教育教学教研观

361003　福建省厦门双十中学　任　勇

1　我的教育观

教育是一项育人的伟大的事业，作为一名数学教师，不仅要教好数学，成为“经师”，而且更要成为学生成长和身心健康发展的指导者，成为“人师”.

“无德”不能为人师；“无能”也不能为人师．这就是人们常说的“打铁先得自身硬”.

素质教育要求我们培养学生的“创新精神”，“创新精神”是人类进步的灵魂”．这首先就要求教师有创新意识，并能在教学实践中不断提高自身的创新能力.

在教学三角公式时，我们导出三倍角的正弦公式$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$之后，引导学生又导出三倍角余弦、正切公式$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$，$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$．不少学生说：“这三个公式易混，难记”．学生对结论的不满意。表明学生对知识有新的追求,想进行新的探索,这是一种创造的萌动.抓住这一有利时机，我要求学生探索，并和学生一起研讨：“这三个公式是否能化得整齐些，是否有更和谐的形式”？

经过师生共同探索，最后我们得到：

$\sin3\alpha = 4\sin(60^\circ-\alpha)\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)$，

$\cos3\alpha = 4\cos(60^\circ-\alpha)\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha)$，

$tg3\alpha = tg(60^\circ-\alpha)\,tg\alpha\,tg(60^\circ+\alpha)$.

当三个整齐、和谐的公式导出时，学生报以热烈的掌声．这掌声是对创新追求的赏赐，是对自己创造性劳动的赞美.

要培养学生的创新精神，首先就应在日常教学中注重培养学生的创造性的思维习惯．例如，在解题教学中，有意识地开发和诱导他们的求异思维.

题目：已知锐角α、β满足$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=2$，

求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

多数同学是从最一般的思路入手：

$$0=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}-2$$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta-\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\Lambda\,\Lambda$$

$$= 2\sin(\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}).$$

$$[\frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin\beta} + \frac{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin\alpha}].$$

至此，目标已明，只须证上面方括号内的三角式不等于 0，而这是不难的．然而上面的三角变换对某些同学颇为“吓人”．能不能另辟路径呢？很快有学生提出了以下两种证法：

证法 1　依题设条件，不妨设

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \geq 1，\ \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \leq 1.$$

$\because \alpha、\beta \in (0，\frac{\pi}{2})$，

$$\therefore \begin{cases}\cos\alpha \geq \sin\beta \\ \cos\beta \leq \sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \geq \sin\beta \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \leq \sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{2} - \alpha \geq \beta \\ \frac{\pi}{2} - \beta \leq \alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

证法2　假设$\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$，则

$$\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta，\ \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

$\because \alpha、\beta、\frac{\pi}{2} - \alpha、\frac{\pi}{2} - \beta \in (0，\frac{\pi}{2})$，

$\therefore \cos\alpha < \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \sin\beta$，

$\cos\beta < \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$.

从而$2 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} < \frac{\sin\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 2$，矛盾，故$\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$．同理可证$\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$.

综上，有$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

我们的教学直接面对学生，面对学生上数学课就要有激情，就要最大限度地挖掘学生的情感潜能，融氛围美、数学美、探索美于数学教学之中．让学生感到数学学习不是一种苦役、一种负担，而是一种需要、一种享受．

例如，我在教复数时，顺便给出欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x，$$

令$x = \pi$，得$e^{i\pi} + 1 = 0$.

奇巧而有趣的是，数学中的“五朵金花”——中性数 0、基数 1、虚数单

位 i、圆周率π、自然对数的底数 e 竟能组成一个重要的“最美的等式”，不可谓不绝！学生在“意料之外”与“令人震惊”之中，又一次体验到了数学之美．

2　我的教学观

“教需有法，教无定法．大法必依，小法必话”．这是人们已达成的共识．但在现实的数学教学中，大多数教师仍采用：由教师给定义，推公式，讲例题，再由学生解题，教师评判的教学模式．这势必禁锢了学生的思维，扼杀了学生主动发展的积极性．因此，教师应树立新的教法观，让学生主动探索主动发展，不断提高数学素质．在这方面，我有以下实践．

主体参与．内因是变化的根本，外因是变化的条件．真正认识到学生是学习的主人，是学习的主体，学习是学生个体的自主行动．在教学过程中，只有充分调动学生认知的、心理的、生理的、情感的、行为的、价值的等各方面的因素，参与到学习活动中去，让学生进入一种全新的学习境界，就能充分发挥学生各自的主观能动性，融自己的主见于主动发展之中．

分层优化．一个班的学生，由于学习基础和认识水平的差异，发展总是不平衡的．对于不同程度的学生，可通过多种渠道，如指导预习和复习、适当提问、分层次完成作业，同学帮助、教师辅导等，让他们在原有的水平上得到提高．只有真正树立为学生服务的观点，给予不同层次学生以良好的期望，就能提高各类学生的数学素质．

“成片开发”．数学概念、命题（公理、定理、性质、公式）．解题等，常常是可以“成片开发”的．我在教学中，以单元结构教学法为主，辅以其他教学方法，整体推进．注重数学知识的纵横联系，揭示其本质属性，让学生整体把握数学知识．在解题教学中，引导学生考虑一题多解，让问题由点构成线；引导学生一题多变，让问题由线构成面；引导学生一题多用，让问题由面构成体．这样，学生就可以多层次、广视角、全方位地认识数学问题．

过程教学．现代数学教学的一条原则叫“过程教学”，就是让学生参与和经历整节课的思维过程，充分体现知识发生、形成的过程，充分挖掘解题的思维价值．其特征是“自主性+思维性”．仅举一例：

（1）游戏引入：①全班学生每人任意写下一个真分数；②分子、分母分别加上一个正数；③新分数与原分数大小关系怎样？

（2）得出结论：一个真分数的分子和分母分别加上一个正数后其值增大．

（3）引出问题：《高中代数（下册）》第 12 页例 7．

已知：a、b、m$\in R^+$，且a＜b，求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$．

（4）一题多解的教学价值：师生共同探索了分析法、综合法、求差比较法、求商比较法、反证法、构造函数法、定比分点法共七种证法，学生在探索后两种证法时进一步体会到数学知识之间的联系，获证时，全班学生笑声四起，他们明白了巧解的奥妙与真谛．

（5）一题多变的教学价值：师生共同探索“变式”，层层深入，共变出八个新的命题，最后一个是：

若a_i、$b_i \in R^+$，$i=1$，2，…，n．

且$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \Lambda < \frac{a_n}{b_n}$，则$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \Lambda \frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{b_1+b_2+\Lambda+b_n}$

$< \frac{a_2+a_3+\Lambda+a_n}{b_2+b_3+\Lambda+b_n} < \Lambda < \frac{a_{n-1}+a_n}{b_{n-1}+b_n} < \frac{a_n}{b_n}$．

“真过瘾！”这是学生们用换元法（有的用增量法）证得“猜想”成立时发出的感叹。

（6）一题多用的教学价值：利用本题的结论，“借题发挥”，可解决多个数学问题，其中包括1998年高考“压轴题”所要证明的不等式：

$(1+1)\ (1+\frac{1}{3})\ (1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1}) > \sqrt{2n+1}$（$n \in N$，$n \geq 2$）．

当学生得知，他们无意中解决了高考压轴题时，他们先是惊得目瞪口呆，继而发出会心的微笑．他们感到了自身的力量，进一步增强了学好数学的信心．

方法渗透．数学不仅是一种知识，而且具有丰富的思想和方法．我在教学中十分重视数学思想方法的渗透，因为数学学习不仅是数学知识的学习，而且也是数学思想方法的学习．只有注意数学思想方法的分析，才能把数学课讲懂、讲活、讲深，才能使学生的头脑形成一个具有“活性”的数学知识结构，促进学生数学能力的发展．

3　我的教研观

加强教育科研，是推动学校教育改革和发展的需要，是全面提高学校教育教学质量的需要，也是提高教师素质的需要．一所学校，只有坚持不断提高教育科研品位，才能有长远的发展；一个教师，也只有走教学与教研相结合之路，才能将教育教学工作提高到一个新的境界．

我国中小学教师不少是教学能手，但教学能力大都还是停留在有娴熟的教学基本功阶段．教师要实现最终的事业成熟，还必须学会在研究状态下工作，成为一个教育教学的研究者．

那么，怎样才能成为一个教育教学的研究者？

一要打破神秘感，保持自信心．研究并不是高不可攀，研究需要第一手活生生的教育资料，这是中小学教师的优势．1984年，我写了篇论文（今天看来只能算“经验文章”）入选全国数学教学年会，接触了许多数学教育名家，读了许多高质量的数学教育论文，当时深感自己十分渺小、水平很有限，但我没有打退堂鼓，而是认真向名家请教、学习，后来我修改了那篇论文，当年8月发表于湖北大学《中学数学》上．同年我的另一篇论文发表在华东师大的杂志上，我感到激动、兴奋，也看到了自己的潜力，觉得自己在教育科学领域里还是大有发展前景．教学促教研，教研促教学，16年来，我探索不止，不知不觉发表论文及教学经验文章达528篇，还编著或参与编著了近50部著作，应邀讲学百余场，自身素质也在各种学术活动中得到很大的提高．

二要有强烈的“研究意识”，把教育教学工作自觉地纳入研究的轨道．每个学生都是你研究的对象，你的班级、年级、学校（甚至更大范围），都可以是你的“实验田”，你可以在里面不断地耕耘、收获．只要树立“研究意

需要全本请访问 www.ertongbook.com

识”，并亲自“下田”实践，就一定会取得教育研究成果．这些年，我在所教的班里进行了数学学习指导、初中数学引趣、高中数学引深、数学作业再生、数学多维教育等实践，在所带的数学奥赛班里进行了数学超常教育实践，均取得显著效果，写成论文后均发表在各类学术期刊上．

三要重视教育科学理论的学习．数学教育教学研究离不开理论的指导，而这正是中小学教师的不足之处．教师若没有行之有效的教育理论作指导，是很难进行研究的．学习理论，除了师范教育、继续教育、各类进修外，还应抓住各种学习机会，随时随地学习，做学习的有心人．其中很重要的一个途径就是向书本、杂志学习．一个教师，没有一定数量的教育、科学、文化书籍和杂志是不可思议的．就我来说，从教二十年来，东买西购，已有 7000 余册数学、教育、文化方面的书籍，订阅了所有能订到的中学数学杂志和许多教育杂志．在书海中获知与启智，在书海中探索与创新．

四要掌握教育科研的方法．不懂教育科研方法，是造成中小学教师研究难以深入进行的原因之一．一些基本的教育科研方法是从事研究的基本条件，教师应很好地掌握．如怎样选定研究课题，制订研究计划，实施研究课题，整理研究资料，撰写研究论文等．

五是要及时了解教育动态．创新是科学研究的基本特征．要创新，就要了解、掌握教育教学的新信息、新动态、新趋势，选择具有独创性和新颖性的课题进行研究．我以为，克服困难争取参加有关学术会议、听学术报告和及时阅读数学教育期刊，是了解教育动态的主要途径．

常架“两法”之桥　促进能力提高

226511　江苏省白蒲高级中学　张云飞

随着高考改革的深入，在人才的选拔上愈来愈侧重于对能力的考查．因此，把对学生能力的培养放在教学的首位似已成为不争的事实．

数学解题教学中如何把对学生能力的培养落到实处？笔者以为：经常引导学生从错误解法到正确解法、经常引导学生进行几何解法与代数解法的转换、经常引导学生从通法到特技、从繁解到简解，即常架“两法”之桥是促进学生能力提高的一条行之有效的途径．

1　在错误解法同正确解法的转化中培养学生的纠错能力

虽然我们谁也不愿意在解题中发生错误，但解题出错的现象却时有发生．当纠正过的错误学生再错，你在抱怨学生没记性、马虎、“笨”的同时可曾想到教师的责任！纠错是解题教学的一项重要内容，纠错能力是解题能力的一个重要组成部分．我们以为：当学生解题出错时，教师不仅要指出错误原因，给出正确解法，而且应尽可能地挖掘学生“错解”中的“闪光点”，引导学生从错误解法走向正确解法，同时着力研究如何避免类似错误的发生．

例1　已知α、β是实系数方程$x^2+x+P=0$的两个虚根，且$|\alpha-\beta|=3$，求P的值．

错解　根据韦达定理$\begin{cases}\alpha+\beta=-1 & ①\\ \alpha\beta=p & ②\end{cases}$

于是　$9=|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4p$，

解得$p=-2$．

显然，若$P=-2$，则原方程有实根，与所设矛盾．

产生错误的原因：$x\in R$时有$|x|^2=x^2$，但当$z\notin R$时，$|z|^2\neq z^2$，因而

$|\alpha-\beta|^2\neq(\alpha-\beta)^2$．

以下给出正确解法：

设$\alpha=\alpha+bi$，$\beta=\alpha-bi$（$b>0$）代入　①

得　$2\alpha=-1$，$\alpha=-\frac{1}{2}$　③

代入$|\alpha-\beta|=3$得$|2bi|=3$，$b=\frac{3}{2}$．　④

由③、④得$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，$\beta=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，

$$p=\alpha\beta=(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}.$$

评析 以上纠错指出了错因，也给出了正确解法，但笔者以为：上述纠错方法不是最佳的纠错方法．因为以上纠错中还存在下列几个问题：

（ⅰ）遇到一元二次方程的根与系数的问题，特别是题目中含有两根之差的条件时，想到通过公式（α－β）^{2} ＝（α＋β）^{2}－4αβ实现解题目的，即想到通过“平方”解题的想法应该是常规思路，上述错解错在误用了｜z｜^{2} ＝ z^2．能用学生上述错解中“平方”的思想实现解题目的吗？

（ⅱ）上述正确解法似给人一种感觉：遇到复数问题都要设 z=a＋bi（a、b∈R）化“复”为“实”，是这样吗？

笔者引导学生分析上述错误的过程，发现：（1）尽管在复数集中$|z|^2 \neq z^2$，但却有｜z｜^{2} ＝｜z^2｜，能否利用这种“平方”关系解题呢？(2)错解中漏用一条件“α、β为实系数方程$x^2+x+p=0$的两个虚根”，而错解中的“（α＋β）^{2}－4αβ ＝1－4P”又正好是判别式△，由α、β为虚根知1－4P＜0，从而有：

∵α、β为实系数方程$x^2+x+p=0$的两虚根，

∴△=1－4p＜0，

9＝｜α－β｜^{2} ＝｜（α－β）^{2}｜

＝｜（α＋β）^{2}－4αβ｜＝｜1－4p｜＝4p－1．

∴ $P=\frac{5}{2}$．

这就实现了用错解中“平方”的思想获得问题的正确解法，同时也说明遇到复数问题时不一定都要化“复”为“实”！

学生为什么会误用｜z｜^{2} ＝z^2？在复数集中一般地｜z｜$^2 \neq z^2$，那么，复数z^2与｜z｜^{2}有没有相等关系，如有，有怎样的相等关系？

其实，复数的三角形式

z=｜z｜（cosθ＋isinθ）

（通常此处的｜z｜用 r 表示）就明明白白地给出了复数 z 与｜z｜的关系，由此易得

z^2 ＝｜z｜^{2}（cos2θ＋isin2θ）

这就是复数z^2与｜z｜^{2}的一个“肯定”的关系式（此处的“肯定”相对于｜z｜$^2 \neq z^2$中的“否定”而言）．

当 $\begin{cases}\cos 2\theta = 1\\ \sin 2\theta = 0\end{cases}$

即 $\begin{cases}\cos\theta = 1\\ \sin\theta = 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta = -1\\ \sin\theta = 0\end{cases}$

即 z为实数时，｜z｜^{2} ＝z^2；

当z为虚数时，｜z｜$^2 \neq z^2$，而是

z^2 ＝｜z｜^{2}（cos2θ＋isin2θ）．

笔者的教学实践表明：学生一旦明白了以上z^2与$|z|^2$的关系后，再遇到z^2与$|z|^2$的关系时就不会再犯错解中的那种错误了．

通过举例说明$|z|^2 \neq z^2$，用“堵”的办法给出$|z|^2$与z^2关系“治标不治本”，通过研究z^2与$|z|^2$的内在关系（其实也不需要多少时间！）给出$|z|^2$与z^2的关系$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$“治标又治本”．

同样，纠错教学中指出解法错误而另起炉灶去纠错也是“治标不治本”，善于捕捉错解中的“闪光点”，引导学生从错解到正解才是“治标又治本”．

思考：如把例1中“虚”字去掉将怎样？

2　在数与形的转换中培养学生的能力

我们以为对代数解法和几何解法的关系应形成以下两点意识：

2.1　既然数与形是客观世界的两种不同表 现形式，我们以为：一个问题如有其简洁的代数（几何）解法，一般地，它应有其不太繁杂的几何（代数）解法．这是我们在有了一个问题的代数（几何）解法后充满信心地寻找它的几何（代数）解法的基础（依据）．当然，对于一个问题，人们可以早已有了它的简洁的代数（几何）解法，但却没有它的相应简洁的几何（代数）解法，对此现象我们认为：一般不是没有相应的解法，而是人们对此问题的认识还不太深刻，一时没有找到相应的解法．

例2　求证：

$$\frac{(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2}{a^2+b^2} \geq (a+b+c)^2 .$$

多篇文章以为本题采用代数证法较难，进而给出下列借助点到直线距离公式求解的几何解法．

观察不等式的结构，将其变形为：

$$\frac{(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2}{(a^2+b^2)^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2},$$

即　$$\sqrt{(1+\frac{ac}{a^2+b^2})^2+(1+\frac{bc}{a^2+b^2})^2} \geq \frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .\qquad (*)$$

不等式（*）的几何意义是明显的：左边的点P（1，1）与点M（$-\frac{ac}{a^2+b^2}$，$-\frac{bc}{a^2+b^2}$）间的距离；右边是点P到直线l：$ax+by+c=0$的距离．易知，点M在直线l上，因此，从几何上看不等式（*）成立，于是，可证原不等式成立．

以上从几何的角度思考的方法是正确的，但由原不等式到（*）的变形等却是较为困难的．由题目的结构特征易联想到柯西不等式，而柯西不等式的一个几何意义正是点到直线的垂线段最短．把原不等式变形为

$$(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2 \geq (a^2+b^2)\cdot(a+b+c)^2,$$

借助柯西不等式的特例

$$\sqrt{A^2+B^2} \geq \frac{|A+B|}{\sqrt{2}}$$

运用差异分析法（比照式子右边的特点对左边进行展开整理）有下列较为简洁的代数解法：

$$(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2$$

$$=[(a^2+b^2)^2+2ac(a^2+b^2)+a^2c^2]+[(a^2+b^2)^2+2bc(a^2+b^2)+b^2c^2]$$

$$=(a^2+b^2)[2(a^2+b^2)+2c(a+b)+c^2]$$

$$\geq(a^2+b^2)[(a+b)^2+2c(a+b)+c^2]$$

$$=(a^2+b^2)(a+b+c)^2.$$

2.2　华罗庚教授说得好“数缺形时少直观，形缺数时难入微”．我们在平时的解题教学中，应既研究一个问题的代数解法又研究一个问题的几何解法，充分发挥“形”对“数”的直观作用．“数”对“形”的入微作用，在对两法的转换、比较中，加深对问题的深入理解，促进学生能力的提高．

例 3　正数 a、b、c、A、B、C 满足条件

a＋A=b+B=c+C=k．

求证：$aB+bC+cA<k^2$．

(1981 年第 21 届全苏数学竞赛题)

本题有一个很精美的几何解法 如图 1,作一个边长为 k 的正三角形 PQR，分别在各边上取 QL=A，LR=a，RM=B，MP=b，PN=C，NQ=c，

则有面积关系：$S_{\triangle LRM}+S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle PQR}$，即

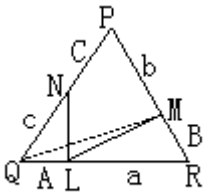


图　1

$$\frac{1}{2}aB\sin60^\circ+\frac{1}{2}bC\sin60^\circ+\frac{1}{2}cA\sin60^\circ<\frac{1}{2}k^2\sin60^\circ.$$

得 $aB+bC+cA<k^2$．

以上解法确实精美，常常作为数形结合的典型范例出现在多种杂志上，以至于很少有人去想它的代数解法．

这个问题有简单的代数解法吗？还是让我们来分析以上几何解法．这个精美的解法精美之处在于运用了一个很平凡的事实：“部分小于全体”，就是“3 个三角形之和小于 4 个三角形之和”．罗增儒教授巧妙地把这一事实换一种形式表示，法 b≥A 的连 QM，则

$$S_{\triangle LRM}<S_{\triangle MQR},$$

$$S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQM}=S_{\Delta MPQ}.$$

经过这一分离，新的形式提供了新的机会，即摆脱图形直接用代数放缩法证明．

不妨设 b 为 a、b、c、A、B、C 中的最大值，有 aB＜kB，bC+cA≤bC+cb=kb．

相加，$aB+bC+cA<k(B+b)=k^2$．

得到一个甚至比几何证法更为精美的证法．这个证法没有一点几何痕迹，但它确实是由几何证法“翻译”过来的．

3　在对通法与特技、繁解与简解的辩证认识、演变中促进学生能力的提高

3.1　通法与特技并重

我们以为：应辩证地看待通法与特技之间的关系：(1)某种方法称为通法，是指相对于一类问题普遍适用的方法，如把问题的范围改变，这种通法就可能变为特技，即通法与特技具有相对性．(2)任何一个可解决的数学问题，其结构(个性特征)与解决它的方法之间必然存在着其和谐的、令人觉得赏心悦目的内在联系，更何况作为一位解题者谁不想自己的解法既巧又简？一个问题的一种巧解妙证往往可能是它的本质解法，即有可能是这类问题的本质解法．

例 4　三棱锥 P-ABC 中，PA=a，AB＝AC=2a，∠PAB＝∠PAC＝∠BAC＝60°，求三棱锥 P-ABC 的体积．

解法 1　如图 2，设 P 在底面 ABC 上的射影为 O，依题意计算得△PAB 中AB边上的高$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$**，进而求得**$PO=\frac{\sqrt{6}}{2}\alpha$**．**

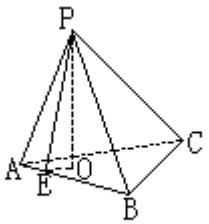


图　2

$$\therefore V_{P\text{-}ABC}=\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^2\text{．}$$

解法 2　在△PAB 中，

$\because PA=a，AB=2a，\angle PAB=60°$**，由余弦定理得**$PB=\sqrt{3}$**，**

∴∠APB=90°，同理∠APC=90°．

∴AP⊥平面 PBC．

$\because S_{\triangle PBC}=\sqrt{2}\alpha^2$**，**

$$\therefore V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}PBC}=\frac{1}{3}\sqrt{2}\alpha^2\cdot AP=\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^3\text{．}$$

一般以为，解法 1 是本题的通性通法(求底面积和高)，解法 2 是巧解特技(理由是一般问题中并不一定有 AP⊥平面 PBC)，但我们认为：解法 1 是机械使用体积公式的解法；解法 2 则是在对问题有了本质理解基础上的通性通法，因为它体现了对体积问题的本质认识；Sh 的本质是线面垂直．解法 2 是对求解体积问题形成了一个自然、流畅的思维链“V=Sh—底面积·高—直线和平面垂直—线线垂直”后的自然产物，学生一旦对体积问题有了以上深刻认识，处理体积问题时就有了明确的解题方向．

3.2　在解题教学中，应坚特由繁解到简解的训练，在繁解到简解的转换中促进学生能力提高．

例 5　试证明：

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}\text{．}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

证法1 $\Theta \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}=\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n$，　　$(*)$

$\therefore$ **令**$n=1$，2，Λ ，n**并把各式相加便得**$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$

$=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}$.

证法 1 简洁、精炼，然而学生在敬佩之余却弄不明白你是怎样想到(*)式而我为什么想不到，久而久之，在学生的心目中留下一个数学神秘、难学的印象．其实，我们很容易在该题的数学归纳法的证明中发现(*)式．

证法 2 (数学归纳法)n=1 时，命题显然成立；

设 n=k 时有

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}=\operatorname{arctg}(k+1)-\frac{\pi}{4}.$$

当$n=k+1$**时，由归纳假设有**

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k^2)}$$

$$=\operatorname{arctg}(k+1)-\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}.$$

从而要证

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}$$

$$=\operatorname{arctg}(k+2)-\frac{\pi}{4}.$$

只要证 $\operatorname{arctg}(k+1)-\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}=\operatorname{arctg}(k+2)-\frac{\pi}{4}$.

即 $\operatorname{arctg}(k+2)-\operatorname{arctg}(k+1)=\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}$.

这只要两边取正切并利用正切函数的单调性易证．此式就是(*)式．

综上，原命题对一切自然数 n 都成立．

如果先讲证法 2(常规解法，繁解)，在对证法 2 的分析中抽取关键的一步((*)式)到证法 1(特殊解法，简解)则学生会觉得自然、流畅．笔者的教学实践表明：如果用这种方式在高二时向学生介绍数列求和的裂项抵消法，效果奇佳．

4 在多种解法的相互转换、综合运用中促进学生能力的提高

一般地，在处理一个具体问题时，并不一定局限于上面介绍的各类“两法”中的一类情形，常常可以多法并用．值得注意的是：此处的“多法并用”区别于一般意义下的一题多解，我们认为：“多法并用”指在多种方法的相互转换、相互变通、综合运用中有效地促进学生能力提高的多法并用(举例略)．

“发现”思维训练的若干途径

311400　浙江省富阳中学　高春龙

研究、探索客观存在的、尚未被认识或掌握的事物、性质或规律的学习活动，是发现与创新的学习活动的特征．它具有激励学生思维，培养创新意识的效果．但在数学课堂教学中，进行“发现”思维训练往往存在一定困难，一是要花费较多的时间；二是“发现”过程是否符合教学内容自身形成的规律、是否符合学生头脑中认识变化发展的过程，都不容易掌握．在较短的课堂教学时间内，如何进行“发现”思维训练，使学生完成由朦胧意识——清晰认识——精确表达的发现过程，这是值得研究的一个课题．本文将对“发现”思维训练教学设计的若干途径和方法作一粗略介绍，供大家参考．

1　通过类比、归纳法进行“发现”思维训练

类比法是一种从个别到个别(或特殊到特殊)的思维方法．它是在甲、乙两个(或两类)事物之间进行对比，从它们的某些类似或相同(相异)的属性出发，根据甲具有某一种属性，推出乙可能也有与之类似或相同(相异)的另一属性．

归纳法是通过对一个或几个具体的、特殊的问题研究，探索并发现其共性或一般规律的发现方法．

由于类比和归纳发现法都可以使学生从对一类事物(或个别事物)的认识推移(推广)到对另一类事物(或一般事物)的认识，扩大了认识的领域，是创造思维的一种形式．因此，它是进行“发现”思维训练的一种行之有效的途径．

如在立体几何和数列教学中，我们经常可采用类比、归纳发现法设计教学，进行“发现”思维训练．鼓励学生大胆类比、尝试、猜想，不但可以发现新的知识，而且还可以从类比对象的解决方案中得到启发，从而悟出解决新问题的方法和途径，或从个别情形入手，归纳发现一般结论．

例 1　给出平面几何命题：“正三角形 ABC 内任一点 P 到各边距离之和是一定值，且定值为此三角形的高．”试完成下列问题：

(1)通过类比，写出相应的立体几何命题．

(2)从以上平面几何问题的解法中,探索出相应的立体几何命题的证明方法．

分析　正三角形与正四面体类比，即得相对应的立体几何命题为：“正四面体 ABCD 内任一点 P 到各个面的距离之和是一定值,且定值为此四面体的高．”以上平面几何命题的证明方法是“面积分割法”．因此，此立体几何命题的证明可采用“体积分割法”进行尝试，并获得证明．

例2　试通过数列 $\{n\}$ 的部分和 S_n，探求数列 $\{n^2\}$ 的部分和 S_n'．

分析　个别尝试，完成下表：

n	1	2	3	4	5	…
$1^2+2^2+\cdots+n^2$	1	5	14	30	55	…
$1+2+\cdots+n$	1	3	6	10	15	…

通过上表，寻求规律：

n	1	2	3	4	5	…
$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	…

激励学生，发现规律：即数列$\left\{\frac{S'_n}{S_n}\right\}$是首项为1，公差为$\frac{2}{3}$的等差数列，从而

$$\frac{S'_n}{S_n}=1+(n-1)\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(2n+1),$$

得 $$Sn'=\frac{1}{3}(2n+1)\cdot S_n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

通过以上这样的“发现”思维训练设计，不但可以激发学生的思维，也提高了他们学习数学的兴趣和信心，使他们尝到了探索问题和发现问题的乐趣，从培养创造力的角度看，其效果要比那种传统的封闭式教学方法好得多．

2　通过联想、比较法进行“发现”思维训练

联想、比较法是指从一事物的现象或本质、功能、结构出发，通过广泛的联想和比较，发现与创新事物联系的创造思维方法．借助联想、比较，人们可以扩大感知认识领域，把以前认识过的事物与所要发明创造的新事物联系，克服两个概念在意义上的差距，甚至使之“风马牛相及”．因此，启迪学生合理联想和比较也是进行“发现”思维训练的一种途径．

例3　设$P_1(x)=x^2-2$，$P_k(x)=P_1[P_{k-1}(x)](k=2,3,\cdots)$．求证：对于任意正整数n，方程$P_n(x)=x$的根都是不同的实根．

分析　根据题设条件，$P_k(x)=P_1[P_{k-1}(x)]=[P_{k-1}(x)]^2-2$，即$\frac{1}{2}P_k(x)=2[\frac{1}{2}P_{k-1}(x)]^2-1$．(*)根据(*)式的结构特征，启迪学生灵活地从记忆中提取需要的表象进行联想，将(*)式与公式$\cos 2^k\theta=2\cos 2^{k-1}\theta-1$作比较，猜想$P_n(x)=2\cos 2^n\theta\ (n\in N)$，利用变换$x=2\cos\theta\ (|x|\leq 2)$，将方程“$P_n(x)=x$”转化为三角方程“$2\cos 2^n\theta=2\cos\theta$”，从而获得证明的思路．

例4　证明：三个分式$\frac{a-b}{1+ab}$、$\frac{b-c}{1+bc}$、$\frac{c-a}{1+ca}(a、b、c\in R)$之和等于其积．

分析　如果按照一般的思考方法，解题过程将相当繁琐，也达不到思维训练的目的．若能启发学生从三个分式的结构联想两角差的正切公式，设$tg\alpha=a$，$tg\beta=b$，$tg\gamma=c$，则$tg(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{1+ab}$，$tg(\beta-\gamma)=\frac{b-c}{1+bc}$，$tg(\gamma-\alpha)=\frac{c-a}{1+ca}$，故只需证明：

$tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)$

$=tg(\alpha-\beta)tg(\beta-\gamma)tg(\gamma-\alpha)$，而这个恒等式是我们所熟悉的．

客观事物以各种不同的表象形式储存在人们的大脑中，一旦需要，就从相关的事物表象的排列、组合、比较中，建立各种方式的联系，产生广泛的联想．这就要求我们必须具备丰富的知识，只有这样，才能灵活、准确地从大脑记忆中提取需要的表象知识，并获得应用，且不会枯竭．

3　通过映射、变换法进行“发现”思维训练

数学中，常将某一变量看作另一变量的函数(从简单到复杂)；反过来，把问题中的复杂的解析式当作单一字母(从复杂到简单)处理，这就是变量变换，也就是某种特定的映射．通过映射，可使问题从未知领域向已知领域转化，从而不断发现新的知识．因此，映射、变换法也成为我们进行“发现”思维训练的一种有效手段．

例 5　设 A、B、C 是△ABC 的三个内角，则有恒等式(或不等式)：

$tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC$，　①

$0<\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$，　②

试问：你能从这些熟知的恒等式(不等式)中，导出关于$\frac{A}{2}$、$\frac{B}{2}$、$\frac{C}{2}$的新的恒等式(或不等式)吗？

分析　通过变换：$A'=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$，$B'=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$，$C'=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$，由题设条件可知，$A'$、$B'$、$C'$均为锐角，且$A'+B'+C'=\pi$，故 A'、B'、C'是一个三角形的三内角，由恒等式①得：

$tgA'+tgB'+tgC'=tgA'\,tgB'\,tgC'$，

即有　$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$

$=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$　③

同理，从不等式②可得

$0<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$．　④

从上述变换启发学生发现结论：“如果对于△ABC 的三内角 A、B、C 的三角恒等式(或不等式)成立，则其半角的余函数所对应的恒等式(或不等式)也成立”．

这一变换(映射)手段，巧妙地从已知定理发现了新的定理，简直象魔术师手中的魔棍，变幻无穷，妙不可言，令学生惊叹不已．

4　通过移植、渗透法进行“发现”思维训练

移植、渗透法就是人们把某一事物、学科或系统已有的原理、方法有意识地转用到其他有关事物、学科或系统，为创造发明或解决问题提供启示和借鉴的创造性思维方法．

法国数学家、哲学家 R·笛卡尔把代数方法移植于几何学，产生了解析几何学，创立了一种新的数学方法．近代科学飞速发展，交叉学科不断产生，

移植、渗透法已成为极具活力的创造性思维方法．因此，在中学数学教学中，教师应充分利用这一方法和途径，加强各学科间原理、方法的相互移植和渗透的“发现”思维训练，培养学生的创新意识．

例 6　求证：

$$\sum_{k=0}^{1999}\cos\frac{k\pi}{1000}=\sum_{k=0}^{1999}\sin\frac{k\pi}{1000}=0\text{．}$$

分析　此题表面上看是一个三角求和问题，照常规解法，过程冗繁．若能引导学生，将点$A_k(\cos\frac{k\pi}{1000}$，$\sin\frac{k\pi}{1000})(k=0$，1，2…，1999)视为均匀分布在单位圆上的 2000 个质点，且共点于正 2000 边形中心的力系，由物理学中的力学知识可知其合力为零而获证．

以上通过一个简单的物理学原理的移植、渗透，非常简洁、新颖和具有创造性地解决了这一数学问题．

5　通过实验、观察法进行“发现”思维训练

实验、观察法就是利用作图、演示教具、放映教学幻灯片和多媒体教学等数学实验手段，通过观察，感性地发现数学问题的特征、内在联系或规律的创造性思维方法．

长期以来，利用数学实验这一形象直观的教学手段，进行“发现”思维训练，没有引起数学教学工作者的足够重视，似乎实验、观察法仅仅是物理、化学等学科的专利．而事实上，如能充分利用这种直观教学手段，引导学生细心观察，借助形象直觉思维，有时恰恰能获得出奇制胜的效果．

例 7　过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$**上一定点**$P$**(不在长轴上)的弦**$PA_k$、$PB_k$ $(k=1$，2，3，…，n)**与长轴分别交于**M_k、N_k**两点，若**$|PM_k|=|PN_k|$**，则得到**n**条直线**$A_kB_k(k=1$，2，3，…，n)**．试问：这**n**条直线的位置关系如何？**

分析　若定点 P 在椭圆的短轴上时，由椭圆的对称性，通过作图演示，容易发现这 n 条直线是一组平行直线．那么当 P 点不在椭圆的短轴上时，情形又会怎样呢？师生一起共同作图、操作、演示，直观发现这 n 条直线仍然是一组平行直线(如图 1)，进一步观察其变化规律，找出变与不变的因素，即这些直线的斜率相等为一定值，从而提供了解决这个问题的根本思路．若设

P**点坐标为**$(a\cos\theta$，$b\sin\theta)$**，经计算可得直线**A_kB_k**的斜率为**$\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta$**(定值)．**

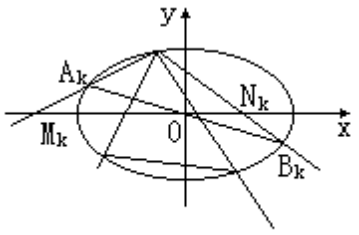


图　1

总而言之，要在短短的课堂教学 45 分钟时间内，进行“发现”思维训练，

并取得较好的效果，关键在于选择科学的训练途径，精心设计教学．

以上仅仅是笔者在教学实践中的一些具体做法，随着教学观念和教学手段的不断更新，相信这种“发现”思维训练方法会越来越引起广大教学工作者的重视．

需要全本请访问 www.ertongbook.com