在数字迷宫里漫游

——一个千古数学难题的破解

魏文池　著

天　津　大　学　出　版　社

在数字迷宫里漫游——一个千古数学难题的破解

魏文池著

出版发行：天津大学出版社（电话：022－27403647）
地　　址：天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
印　　刷：天津大学印刷厂
经　　销：新华书店天津发行所

开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：4.5
字　　数：113千
版　　次：1999年2月第1版
印　　次：1999年2月第1次
印　　数：1～2000
书　　号：ISBN 7－5618－1052－0/O·98
定　　价：6.00元

前　　言

“洛书”是我国最古老的文化科学遗产之一，也可称得上是世界最古老的文化科学遗产之一。大约300年前，一个外国名人就间接地作出了这样的评价。17世纪末或18世纪初，德国哲学家、数学家莱布尼兹收到了法国传教士白晋自北京寄给他的《周易》和“六十四卦圆图”。他在给白晋的回信中十分肯定地认为他的二进制数学与“六十四卦圆图”完全一致。信中又说：“这个易图是现存科学之最古老的纪念物。”二进制是计算机技术的数学基础。如今我们再评价“六十四卦圆图”这个现存科学之最古老的纪念物对现代科学技术发展的影响是怎么说也不过分的。一般认为，先有“河图”“洛书”后有“八卦”，再后才有“六十四卦圆图”，所以“洛书”是现存科学比“六十四卦圆图”更加古老的纪念物。对“洛书”何时问世也有不同看法。“洛书”问世以来，一直是受人瞩目的数学问题，我国古代许多名家，数学家都对它进行过评述和研究。经过了三千多年的漫长岁月，才由我国宋代数学家杨辉找到了它的排列方法，并在他的《续古摘奇算法》(1275年)书中刊行于世。杨辉还排列出4阶、5阶、……、10阶共7个纵横图(即现代数学的幻方)，由此引发了世界上不少国家的幻方热，寻找大幻方和幻方的科学排列方法。时间又过去了七百多年，世界上已有了105阶幻方，但奇、偶数幻方排列问题仍是一个未解的数学难题。它与当代热浪迭起的梅森素数大寻找十分相似。梅森于1644年在他的《物理学随感》中刊出了经他验证的7个素数，即数2^n-1(n为素数)中是素数的有$n=2$、3、5、7、13、17、19，并提出一个猜想：$n=31$、67、127、257时2^n-1是素数，$31<n<259$的其它素数，2^n-1都是合数。虽然后来证明了梅森这个猜想有误，$2^{67}-1$和$2^{257}-1$不是素数，并且被梅森认为不是素数的$2^{61}-1$却是素数，但被后人称为梅森素数的$Mn=2^n-1$的寻找却未曾停止。随着计算机的发展进步，梅森素数大寻找成了人类智慧的大较量。到1992年发现的最大梅森素数是$M_{796839}=2^{796839}-1$，如果把这个数全印出来，这本书将有180页，不过它也只是梅森素数的第32个。近日报刊消息，最大梅森素数是$M_{3021377}=2^{3021377}-1$，它也只是梅森素数的第37个，是否存在最大的梅森素数，仍是一个未解之谜。

出于对我国文化科学遗产的挚诚热爱，也出于对象“八卦”那样本来属于我国文化科学遗产却由外国人揭示它的真谛的事情不再重演的民族自尊，可以说是不自量力地投入了对“洛书”未解之谜的探索。也许是功夫不负有心人吧！通过10年的不懈努力和不断的探索，初步解决回答了以下问题：

(1)不存在最大的幻方。用简单易行的以图代数法可由一个3阶幻方排列出9阶、27阶、81阶、243阶……直到无限。

(2)找到了奇、偶数阶幻方的通用方法。当n为大于等于3的整数时，n^2自然数都能排列成n阶幻方。

(3)“洛书”型幻方，对角线对称型幻方都具有多种类、多方向、多层次的对称和多方向的等差数列结构特征。由这些结构特征推导出幻方的4种变幻方法可以排列出许多同阶幻方。比如一个11阶幻方用这4种变幻方法可以得到15132800个11阶幻方。把这些幻方排印成书，最少要有2000页的书500卷，约可排满4个书架。

(4)幻方不是自然数的特有现象，还可以排列出由 n^2 项等差数列组成的 n 阶幻方，其中 n 为大于等于 3 的任意整数，而且数列可以由任意正负有理数、正负无理数、正负虚数或复数组成；它还可以有条件地由 n 个 n 项等差数列组成；有条件地由 n^2 个简单函数组成。对于这样的幻方，可称为广义幻方。由 n^2 个自然数构成的幻方则只是广义幻方的一个特例，即由首项为 1、公差为 1 的 n^2 项数列构成。

(5)任何一阶幻方都可通过对它的每个数进行加、减、乘、除而改造成幻和为任意有理数、无理数、虚数或复数的同阶幻方，进而组成一个无限系列，这样的无限系列显然强于由自然数组成的无限系列，也强于由数轴上所有点组成的无限系列，即强于由德国数学家康托尔命名的超限数系列 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$。它与由平面上曲线组成的超限系列 $\aleph_2$ 何者为强，笔者未能作出比较。但在目前被承认的 3 个超限系列 $\aleph_0$、$\aleph_1$ 和 $\aleph_2$ 之外，又出现了一个由幻方组成的超限系列。

由于笔者未曾专门学过数学，也未从事过与数学有关的工作，是地道的数学专业门外汉，因此本书的内容有某些错误实所难免，甚至所用语言也非数学专业用语。为此，诚恳地企盼读者给予指正，使‘洛书’这颗由我们祖先留给我们的科学种子能在华夏大地上生根、开花、结实，并造福炎黄子孙。

作者. 于 1998 年 10 月

目　　录

第一章　幻方的历史和现状 …………………………………… (1)

　第一节　一个科学问题的神秘化 …………………………… (1)

　第二节　第一次突破 ………………………………………… (1)

　第三节　任意阶幻方的排列——一个待解的数学难题 …… (2)

第二章　打开幻方迷宫的万能钥匙 ………………………… (3)

　第一节　奇数阶幻方的排列 ………………………………… (3)

　第二节　偶数阶幻方的排列 ………………………………… (17)

　第三节　幻方的间接排列 …………………………………… (29)

　第四节　立体幻方的排列 …………………………………… (30)

第三章　神奇的变幻 ………………………………………… (34)

　第一节　幻方的个体变幻 …………………………………… (34)

　第二节　幻方的群体变幻 …………………………………… (38)

第四章　广义幻方与∞ ……………………………………… (42)

　第一节　广义幻方 …………………………………………… (42)

　第二节　关于∞ ……………………………………………… (50)

　第三节　广义幻方的无限集合强于直线上点的无限集合 … (54)

第五章　自然数的其它有序排列 …………………………… (57)

　第一节　自然数的线排列 …………………………………… (57)

　第二节　奇妙的数字金字塔，自然数的另一种有序排列…… (60)

第一章　幻方的历史和现状

第一节　一个科学问题的神秘化

世界上第一个幻方产生在我国，一般人认为已有 4000 年的历史，也有人认为已有 5000 年了。它以“洛书”（图 1-1）之名被正式刊载于春秋时代成书的《周易》，也有约 2600 年的历史了。仅就它以符号表示数字这一特征来看，它很可能产生于文字出现以前的原始社会。也就是说，我们的祖先还在以结绳或符号表示事物的数量时，就能够排列出在几千年之后才由数学家找到排列方法的数字方阵，实在是有难以理解之处。它以点连线这种符号表示数字，又恰好是我国古代结绳记事的象形符号，说明它的确是我国祖先的伟大创造。《周易》在正式刊载它时引用了两则美丽的神话传说，大意是说伏羲氏得了天下，黄河里跃出了金马驹，背负“河图”作为礼物献给他，伏羲氏因作“八卦”作为治理国家的法规；大禹治水获得成功，洛水中浮出神龟，背负“洛书”献给他作为礼物，大禹因作“九畴”作为治理国家的法则。“洛书”本来是一个比较明显的数学问题，就这样被人为地神秘化了。它的正式刊出更引起世人的瞩目，许多古代名家甚至数学家都曾把它赞誉为“天地生成之数”，更在它的神秘面纱上涂上了斑斓的色彩。就这样，它又走过了近 2000 年的神秘历史。

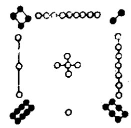

图 1-1

大约在公元 3 世纪，希腊也出现了一个每行、每列和两条对角线 4 个数之和都等于 34 的 4 阶幻方（图 1-2）。它比“洛书”的诞生晚了 2000 多年，比“洛书”被正式刊出也晚了近千年。但它同样具有神秘的传说，人们认为它是可以避邪和治病的神物。幻方的神奇结构和排列困难是使人感到神秘的重要原因。

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

图 1-2

近年由新世界出版社出版的《当今世界之谜破解》一书中，认为“洛书”是外星人送给地球人的礼物。这虽然只能说是一种猜想，似乎也近似神话，但却不能完全排除这种可能性。美国发射的以探寻外星人是否存在为目的的旅行者Ⅰ号和Ⅱ号都载有幻方图作为送给外星人的礼物。如果确有外星人存在，他们把“洛书”赠给地球人作为礼物，就是合乎逻辑的事。外星人应同地球人一样，是宇宙间的高级智慧生命体，并不是根本不存在的神仙。事实已经证明，地球人不仅能排列出并非“天地生成之数”的“洛书”，还可以排列出许许多多乃至无穷多阶幻方。

第二节　第一次突破

在“洛书”正式刊出近 2000 年后，我国宋代数学家杨辉首开先河，揭开了“洛书”的神秘面纱。在他所著《续古摘奇算法》（1275 年）一书中，不仅给出了“洛书”的排列方法，并把这一纯数学问题称作纵横图，排出了 4 阶、5 阶、…、10 阶纵横图。在此书中，对“洛书”4 阶纵横图排

列方法的记述虽然只是作为个别纵横图的专用方法，但对今天发现奇、偶数阶幻方的通用排列方法给予了重要的启示。为此，这里以现代语言对他的 3 阶纵横图（即“洛书”）的排列方法作简单介绍。

把 1、2、3、…、9 这 9 个自然数按自左上至右下的顺序进行 3×3 的斜向排列（图 1-3），上下 1、9 对调，左右 7、3 互换（图 1-4），4 个偶数沿对角线向外挺出，就成了与“洛书”的结构完全相同的 3 阶幻方（图 1-5）。它的奇妙之处就在于各行、各列及两对角线上三个数之和均等于 15。杨辉纵横图的排列方法在全世界数学界产生了巨大的影响。七百多年来，世界上不少国家都兴起过幻方热，许多数学家都参与研究。大发明家富兰克林也曾因排列出一个 16 阶幻方而倍受称赞。1990 年出版、1994 年再版的《中国少年儿童百科全书》科学技术卷第 165 页仍以《神秘的幻方》为题对幻方的历史和现状进行了介绍。或许是由于它的结构奇妙，幻方才有它几千年的神秘历史，但今天已无神秘可言了。

		①		
	④		②	
⑦		⑤		③
	⑧		⑥	
		⑨		

图 1-3

		⑨		
	④		②	
③		⑤		⑦
	⑧		⑥	
		①		

图 1-4

④	⑨	②
③	⑤	⑦
⑧	①	⑥

图 1-5

第三节　任意阶幻方的排列——一个待解的数学难题

现代数学给幻方下的定义是：把 n^2 个自然数排列成 n 行 n 列的 n 阶方阵，使每行、每列和两条对角线上 n 个数之和都等于同一数 S。S 称为幻和，$S=\dfrac{n(n^2+1)}{2}$。这个问题已成为现代数学一个重要分支组合学的研究课题。目前国外已排出 105 阶，我国已排列出 119 阶和 120 阶。但是大于 120 阶幻方如何排列，仍是不得而知。即便是小于 120 阶，也不是每阶都已排列出来。阶数 n 大于 3 的任意整数是否都存在幻方？人们已经发现，当幻方的阶数 n 分别为奇数和偶数时，排列存在许多共性。但是，是否存在着奇、偶数阶幻方排列的通用方法呢？总之，奇、偶数阶幻方排列问题仍是一个未解的数学难题。

幻方在现代科学技术诸多方面都有所应用，如图论、博弈论、程序设计、人工智能等，它还是启迪智力和进行智力测验的工具。

第二章　打开幻方迷宫的万能钥匙

如果把 3、4、5、…、∞每一阶幻方都看成是一座数字迷宫，只要有三把万能钥匙就可以把这无穷多个迷宫全部打开，它们是：

$n=2m+1$ （$m=1$、2、3、…∞），即 $n=3$、5、7、…、∞；

$n=2\times 2m$ （$m=1$、2、3、…∞），即 $n=4$、8、12、…、∞；

$n=2\times(2m+1)$ （$m=1$、2、3、…∞），即 $n=6$、10、14、…、∞。

讲形象一点就是第一把钥匙从第一座迷宫 3 阶幻方开始，每隔一间都可以打开。

第二把钥匙从 4 阶幻方开始，每隔 3 间都可以打开。

第三把钥匙从 6 阶幻方开始，每隔 3 间都可以打开。

那么真有这样的万能钥匙吗？回答是肯定的。下面分别介绍这三种神奇的万能钥匙。

第一节　奇数阶幻方的排列

一、打开“洛书”型幻方迷宫的万能钥匙

世界上第一个出现的幻方是“洛书”，它是奇数阶幻方最小的排头兵。因为不存在 2 阶幻方，所以它也是整个幻方系列最小的排头兵，是所有幻方迷宫的第一间。随着幻方阶数的增大，每阶幻方都存在着许多个结构不同的同阶幻方，但在所有奇数阶幻方中都有一个与“洛书”结构完全相同的幻方，因而称为“洛书”型幻方。下边就是这一类型幻方的排列方法。这一方法是在前边介绍的杨辉排列方法的启示下得到的。把它放在首位进行介绍，也是对这位伟大数学家在幻方排列方面首开先河卓越功绩的缅怀。为了清晰和节省篇幅，只选一个较小的 7 阶幻方的排列为例。

把 1、2、3、…、49 这 49 个自然数作由右下向左上的倾斜 7×7 排列，便得到图 2-1 中的斜正方体图形。这个图形与前边介绍的杨辉方法在方位上不同，相当于旋转了 180°，目的是让它的结果与“洛书”的方位完全一致。仔细分析图 2-1 中的斜正方体图形不难发现以下结构特点：

纵向观察共有 13 行，其中奇数行都是奇数，偶数行都是偶数。每行都是由下向上的递增等差数列，公差是 8，即幻方的阶数 $7+1=8$。即便只有两项，它的差也是 8。任意奇数阶幻方排列在这个方向的公差都是阶数 $n+1$，即 9 阶幻方是 $9+1=10$，11 阶幻方是 $11+1=12$，等等。

横向有 13 列，同样奇数列是奇数，偶数列是偶数。它们也同样都是由左向右的递增等差数列，公差是 6，即幻方的阶数 $7-1=6$。任意奇数阶幻方排在这个方向的公差都是阶数 $n-1$，比如 9 阶是 $9-1=8$，11 阶是 $11-1=10$，等等。

中间行和中间列都是 7 项，即项数与幻方的阶数 n 相同（任意奇数阶幻方排列也都是如此）。这两个数列的 7 项总和都等于幻方的幻和，即 $S=\frac{n(n^2+1)}{2}=\frac{7(7^2+1)}{2}=175$。

行数之差为幻方阶数 n（在这里为 7）的两行数的个数，都等于幻方阶数 $n=7$。即第 1 行的 1 个数与第 8 行的 6 个数之和是 7 个数；第 2 行的 2 个数与第 9 行的 5 个数之和也是 7 个数，……，所有这样 7 个数之和也都等于幻方的幻和 $S=175$。

在列方面也是如此，凡列数之差为 7 的两列都有 7 个数，7 个数之和也都等于幻和 $S=175$。

根据上述结构特点，引进代数学直角坐标系的概念，把中间一行视为纵轴，中间一列视为横轴。有了这个坐标系，再把第一象限的所有偶数全部调到第三象限，第三象限的所有偶数调向第一象限；第二象限的所有偶数调向第四象限，第四象限的全部偶数调往第二象限。调动的方法是：

每个偶数都沿斜线方向调动 7 个方格（也是幻方的阶数 n，9 阶幻方调 9 格，11 阶幻方调 11 格，余类推），把 4 个象限所有偶数全部沿斜向调 7 格后，偶数都移到图 2-1 的黑体字位置。然后把原来位置上的偶数全部去掉，得到图 2-2。图 2-2 上余下的 7 行 7 列整理靠近，就是图 2-3。它就是要求的 7 阶“洛书”型幻方。

使用这一方法可以排列出任意奇数阶幻方，直到无穷大。

这里不妨再与杨辉的排列方法作一比较。斜排是相同的，只是方位变为由右下到左上，排列后得出的幻方结构与“洛书”完全相同。不同的是，杨辉的方法是把除中间数 5 以外的所有 8 个数都进行调动（旋转 180°），即调动了 n^2-1 个数。本方法只调动所有偶数，它恰好是$\frac{n^2-1}{2}$个数，即杨辉方法的 $1/2$ 个数。杨辉方法调动方向不规范，特别是在调动偶数时，距离不规范。随着幻方阶数增大，调动距离难以掌握，所以它只是排列三阶幻方的专用方法。本方法调动的只是偶数，方向和距离是规范的，因而适用于任意奇数阶幻方的排列，比如用它排列“洛书”，在斜向 3×3 排列后，只调动 2、4、6、8 四个偶数，每数沿斜向调 3 格，再去掉原有的偶数，进行整理就得到与“洛书”完全相同

24		**30**		**36**		49		**6**		**12**		**18**
					42		48					
16		**22**		35		41		47		**4**		**10**
			28		34		40		46			
8		21		27		33		39		45		**2**
	14		20		26		32		38		44	
7		13		19		25		31		37		43
	6		12		18		24		30		36	
48		5		11		17		23		29		**42**
			4		10		16		22			
40		**46**		3		9		15		**28**		**34**
					2		8					
32		**38**		**44**		1		**14**		**20**		**26**

图 2-1

24		**30**		**36**		49		**6**		**12**		**18**
16		**22**		35		41		47		**4**		**10**
8		21		27		33		39		45		**2**
7		13		19		25		31		37		43
48		5		11		17		23		29		**42**
40		**46**		3		9		15		**28**		**34**
32		**38**		**44**		1		**14**		**20**		**26**

图 2-2

24	**30**	**36**	49	**6**	**12**	**18**
16	**22**	35	41	47	**4**	**10**
8	21	27	33	39	45	**2**
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	**42**
40	**46**	3	9	15	**28**	**34**
32	**38**	**44**	1	**14**	**20**	**26**

图 2-3

的 3 阶幻方。

这里肯定会提出问题，即当幻方的阶数还不太大时，可以用实际排列的结果检验它是否正确。但当阶数 n 不断增大时，直接排列是不可能的。比如 101 阶幻方，就有 10201 个数参与排列；1001 阶幻方会有 1002001 个数参与排列；如果是 10001 阶，就会有 100020001 个数参与排列。如果将每个数填入一平方厘米的格子里，大约需要用一个足球场那样大的纸，这怎么能实际操作呢？显然是无法证明这一方法是否可以通用于任意大奇数的。为了证明它的正确性，这里再介绍另一种与它相似的方法，可以得出完全相同的结果。

这一方法的具体运作是把 1、2、3、…、49 依次由右向左横向排列，7 个数为 1 列，各列由下而上排列成 7 阶自然方阵。以它的两条对角线把全图分成上、下、左、右四个部分。上部分的所有偶数全部向下直移 7 个方格；下部分全部偶数向上直移 7 格；左部分全部偶数向右平移 7 格；右部分全部偶数向左平移 7 格，图 2-4 黑体字是被移动的所有偶数。去掉图 2-4 原有白体字所有的偶数，再把图形沿顺时针方向旋转 45°角，靠近整理后就会得到图 2-5，它与图 2-3 是完全相同的 7 阶"洛书"型幻方。

以上两种方法走的是不同的途径，但得出完全相同的结果，是殊途同归。这就初步证明了它的正确性和普遍适用性，但这种方法也有局限性，用它们只能排列出"洛书"型幻方。

						18						
					12		**10**					
				6		**4**		**2**				
			49	48	47	46	45	44	43			
		36	42	41	40	39	38	37	36	**42**		
	30		35	34	33	32	31	30	29		**34**	
24		**22**	28	27	26	25	24	23	22	**28**		**26**
	16		21	20	19	18	17	16	15		**20**	
		8	14	13	12	11	10	9	8	**14**		
			7	6	5	4	3	2	1			
				48		**46**		**44**				
					40		**38**					
						32						

图 2-4

24	**30**	**36**	49	**6**	**12**	**18**
16	**22**	35	41	47	**4**	**10**
8	21	27	33	39	45	**2**
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	**42**
40	**46**	3	9	15	**28**	**34**
32	**38**	**44**	1	**14**	**20**	**26**

图 2-5

下边再介绍一种完全不同的方法，它既能排列出"洛书"型幻方，又能排列出与"洛书"不同的许多同阶幻方。由于这一方法目前还找不到先例，所以暂称它为"轴对称有序配位法"。为了说明它能排列出"洛书"型幻方，这里仍以 7 阶幻方为例，具体方法如下：

首先把 n^2（$n=7$）个自然数 1、2、3、…、49 排列成 7×7 的自然方阵（图 2-6）。再把图中每个数给出位置标号，例如"1"在图中第 1 行第 1 列的位置，位置标号是 $\begin{matrix}H_1\\L_1\end{matrix}$；"2"这个数是在第 1 行、第 2 列，位置标号是 $\begin{matrix}H_1\\L_2\end{matrix}$；…以此类推，数 9 是 $\begin{matrix}H_2\\L_2\end{matrix}$。由左上到右下对角线上 7 个数是

1、9、17、25、33、41、49，它们的位置标号则是 $^{H_1}{}_{L_1}$、$^{H_2}{}_{L_2}$、$^{H_3}{}_{L_3}$、$^{H_4}{}_{L_4}$、$^{H_5}{}_{L_5}$、$^{H_6}{}_{L_6}$、$^{H_7}{}_{L_7}$。这条对角线上各数的位置标号是行代号与列代号的数码相同，而且任意阶自然数方阵的这条对角线上各数的位置标号都是如此。本方法中的轴就是用的这个特性。为了运作方便，去掉标号中的字母，规定左上为行代号，右下为列代号，图 2-7 就是 7 阶幻方的轴对称有序配位图。轴是中间一行，即 $^{1}{}_{1}$、$^{2}{}_{2}$、$^{3}{}_{3}$、$^{4}{}_{4}$、$^{5}{}_{5}$、$^{6}{}_{6}$、$^{7}{}_{7}$。由下向上递增是为了使结果与‘洛书’型幻方的方位相同。采用由上到下递增，或把轴放在中间列的位置都可得出相同的结果，只是方位不同。作一个旋转就会得到方位也相同的幻方。什么叫有序配位呢？图中与 $^{1}{}_{1}$ 对称位置上各数的位置标号左右分别是 $^{7}{}_{2}$ $^{2}{}_{7}$、$^{6}{}_{3}$ $^{3}{}_{6}$、$^{5}{}_{4}$ $^{4}{}_{5}$；在 $^{2}{}_{2}$ 的左右对称上则是 $^{1}{}_{3}$ $^{3}{}_{1}$、$^{7}{}_{4}$ $^{4}{}_{7}$、$^{6}{}_{5}$ $^{5}{}_{6}$。就是说每个对称位置上的位置标号都是行列互异，全图都是如此。它们是怎样排出来的呢？这就是由‘有序’来决定。这个‘序’就是行标号，是由左向右递增，到边缘后再返到最左继续向右递增（7 的右边是 1 而不是 8）；列标号则是由右向左递增，到边缘后返回最右，再向左递增（7 的左边是 1 而不是 8）。关键是保证中间行的位置标号都是行列相同。

1	8	15	22	29	36	43
2	9	16	23	30	37	44
3	10	17	24	31	38	45
4	11	18	25	32	39	46
5	12	19	26	33	40	47
6	13	20	27	34	41	48
7	14	21	28	35	42	49

图 2-6

$^{4}{}_{3}$	$^{5}{}_{2}$	$^{6}{}_{1}$	$^{7}{}_{7}$	$^{1}{}_{6}$	$^{2}{}_{5}$	$^{3}{}_{4}$
$^{3}{}_{2}$	$^{4}{}_{1}$	$^{5}{}_{7}$	$^{6}{}_{6}$	$^{7}{}_{5}$	$^{1}{}_{4}$	$^{2}{}_{3}$
$^{2}{}_{1}$	$^{3}{}_{7}$	$^{4}{}_{6}$	$^{5}{}_{5}$	$^{6}{}_{4}$	$^{7}{}_{3}$	$^{1}{}_{2}$
$^{1}{}_{7}$	$^{2}{}_{6}$	$^{3}{}_{5}$	$^{4}{}_{4}$	$^{5}{}_{3}$	$^{6}{}_{2}$	$^{7}{}_{1}$
$^{7}{}_{6}$	$^{1}{}_{5}$	$^{2}{}_{4}$	$^{3}{}_{3}$	$^{4}{}_{2}$	$^{5}{}_{1}$	$^{6}{}_{7}$
$^{6}{}_{5}$	$^{7}{}_{4}$	$^{1}{}_{3}$	$^{2}{}_{2}$	$^{3}{}_{1}$	$^{4}{}_{7}$	$^{5}{}_{6}$
$^{5}{}_{4}$	$^{6}{}_{3}$	$^{7}{}_{2}$	$^{1}{}_{1}$	$^{2}{}_{7}$	$^{3}{}_{6}$	$^{4}{}_{5}$

图 2-7

有了这个轴对称位置标号图，再把所有位置标号还原成它在自然方阵中所代表的数，就得到图 2-8。它是与图 2-3 和图 2-5 完全相同的 7 阶‘洛书’型幻方。它是怎样还原成数的呢？直观办法就是根据位代号在自然方阵中去找。比如左上角的位置标号是 $^{4}{}_{3}$，即 4 行 3 列，自然方阵中 4 行 3 列的数是 24；右上角的位置标号是 $^{3}{}_{4}$，即 3 行 4 列，自然方阵中 3 行 4 列的数是 18。如此逐个落实就是图 2-8 的 7 阶幻方。这样运作，在排列较大阶数幻方时实在太麻烦。因为它必须有一个自然方阵，再逐个找出填好，既麻烦，又容易失误，只要错一个数，其结果就必然不是幻方，而且不易发现和校正。有效的方法是在排出标号图之后，

24	30	36	49	6	12	18
16	22	35	41	47	4	10
8	21	27	33	39	45	2
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	42
40	46	3	9	15	28	34
32	38	44	1	14	20	26

图 2-8

可以直接计算出每个行列标号代表的数。这个计算公式是:行标号减 1,乘以阶数 n,再加列标号。可以这样表示:$(H_x-1)n+L_y$。仍以左上角的 $\begin{matrix}H_4 & \\ & L_3\end{matrix}$ 为例,这里的 H_x 是 H_4、L_y 是 L_3,即 $(4-1)\times 7+3=24$;左下角是 $\begin{matrix}5 & \\ & 4\end{matrix}$,即 $(5-1)\times 7+4=32$。使用这一方法排列大幻方时,直接计算出各数,就免去了在一个大图中去找某个数的麻烦。

这个计算公式不仅可以计算出用行、列标号代表的每一个数,而且用它还可以证明用本方法排列出的任意奇数阶幻方都是正确的。即用它可以证明每行、每列和两对角线 n 个数之和 $S=\dfrac{n(n^2+1)}{2}$ 都相等。证明方法如下:

从图 2-7 可知,每列的行代号都是从左到右递加 1 为 1、2、3、…、n(这里 n 是 7),列代号则是从右到左递加 1 为 1、2、3、…、n(这里 n 是 7),所以行或列代号总和都等于 $\dfrac{(1+n)\times n}{2}=\dfrac{(1+7)\times 7}{2}=28$。因为每个数都等于行代号减 1 再乘以 n 后加列代号,因而要计算全列(或行)n 个数之和时,就是从列(或行)的行代号总和 $\dfrac{(1+n)n}{2}$ 中减去 n 个 1 即 n 以后再乘以 n,然后再加上 n 个列代号的总和 $\dfrac{(n+1)n}{2}$。所以全列(或行)的总数就为 $\left[\dfrac{(n+1)n}{2}-n\right]n+\dfrac{(n+1)n}{2}=\dfrac{n^3-n^2}{2}+\dfrac{n^2+n}{2}=\dfrac{n^3+n}{2}$,这正好是幻方的幻和 S。

再观察图 2-7 的两条对角线,左上右下对角线的行代号都是 4。这个 4 也是 $\dfrac{n+1}{2}$。又因为是 n 个 4,所以行代号总和也是 $\dfrac{(n+1)n}{2}$;列代号则是 1、2、3、…、n(这里是 7),共 n 项。所以,它们的总和也是 $\dfrac{(1+n)n}{2}$。因此,这条对角线 n 个数之和也是 $S=\left[\dfrac{(1+n)n}{2}-n\right]n+\dfrac{(n+1)n}{2}=\dfrac{n^3+n}{2}$。从右上到左下的对角线与它相反,行代号是 1、2、3、…、n(这里是 7),列代号都是 $\dfrac{(n+1)}{2}$(这里是 $\dfrac{7+1}{2}=4$)。所以这条对角线上 n 个数之和 $S=\left[\dfrac{(n+1)n}{2}-n\right]n+\dfrac{(n+1)n}{2}=\dfrac{n^3+n}{2}$。

为了使这一证明更形象,这里再以一个稍大一些的 13 阶幻方排列为例。图 2-9 是轴对称有序配位图。从图中可以清楚地看到,每行、每列的行列代号都是 1、2、3、…、13 这 13 个连续数。13 是幻方的阶数 n。所以,每行、每列的行列代号总和都是 $\dfrac{(1+13)\times 13}{2}$,每行、每列的幻和 $S=\left[\dfrac{(1+n)n}{2}-n\right]n+\dfrac{(1+n)n}{2}=\dfrac{n^3+n}{2}=\dfrac{13^3+13}{2}=1105$,正好是 13 阶幻方的幻和 S。再看两条对角线,它们的情形和 7 阶幻方是一致的:左上右下对角线行代号都是 7,也是 $\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{13+1}{2}$,它们的和也是 $\dfrac{(1+n)n}{2}$,列代号是 1、2、3、…、n(这里是 13),它们的总和也是

$\frac{(1+n)n}{2}$。这条对角线 n（这里是 13）个数的总和 $S=\left[\frac{(1+n)}{2}-n\right]n+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{n^3+n}{2}=1105$。另一条对角线也是如此，不赘述。由这一证明可以得出如下结论：对一个正方阵，当每行每列和两对角线的行代号之和等于列代号之和且等于 $\frac{n(n+1)}{2}$ 时，它必是一个幻方。

7 6	8 5	9 4	10 3	11 2	12 1	13 13	1 12	2 11	3 10	4 9	5 8	6 7
6 5	7 4	8 3	9 2	10 1	11 13	12 12	13 11	1 10	2 9	3 8	4 7	5 6
5 4	6 3	7 2	8 1	9 13	10 12	11 11	12 10	13 9	1 8	2 7	3 6	4 5
4 3	5 2	6 1	7 13	8 12	9 11	10 10	11 9	12 8	13 7	1 6	2 5	3 4
3 2	4 1	5 13	6 12	7 11	8 10	9 9	10 8	11 7	12 6	13 5	1 4	2 3
2 1	3 13	4 12	5 11	6 10	7 9	8 8	9 7	10 6	11 5	12 4	13 3	1 2
1 13	2 12	3 11	4 10	5 9	6 8	7 7	8 6	9 5	10 4	11 3	12 2	13 1
13 12	1 11	2 10	3 9	4 8	5 7	6 6	7 5	8 4	9 3	10 2	11 1	12 13
12 11	13 10	1 9	2 8	3 7	4 6	5 5	6 4	7 3	8 2	9 1	10 13	11 12
11 10	12 9	13 8	1 7	2 6	3 5	4 4	5 3	6 2	7 1	8 13	9 12	10 11
10 9	11 8	12 7	13 6	1 5	2 4	3 3	4 2	5 1	6 13	7 12	8 11	9 10
9 8	10 7	11 6	12 5	13 4	1 3	2 2	3 1	4 13	5 12	6 11	7 10	8 9
8 7	9 6	10 5	11 4	12 3	13 2	1 1	2 13	3 12	4 11	5 10	6 9	7 8

图 2-9

以上介绍了三种任意奇数阶幻方的排列方法。三种不同的方法可以排列出完全相同的结果。第三种方法轴对称有序配位法已被证明适用任意奇数阶幻方的排列。既然前两种方法所得结果与第三种方法完全相同，可以推想它们也都适用任意奇数阶幻方的排列。以上方法排列出来的幻方都称为"洛书"型幻方，是因为它们的结构特征与"洛书"完全相同。而用轴对称有序配位法还可以排列许多与"洛书"型幻方结构特征不同的幻方，只是采用的"序"不同。稍后将具体介绍这一方法所排出的非"洛书"型幻方。

什么是"洛书"型幻方的结构特征呢？幻方最基本的结构特征是每行、每列和两条对角线上 n 个数之和都等于同一数。"洛书"型幻方除了这一基本特征外还有许多可视为神奇的结构特征。通过对这些特征的研究，结合以上介绍的三种排列方法可以总结出一个排列"洛书"型幻方的通用公式。使用这个公式可以比上述三种方法更加简单、准确地排列出任意奇数阶"洛书"型幻方。"洛书"型幻方的结构特征有以下几个。

（一）对称结构

"洛书"型幻方具有多种类、多方向、多层次的对称。

1. 以数和相等展示的对称

(1)横轴两侧全体数之和等于纵轴两侧全体数之和,且等于$\frac{n^4-n^3+n^2-n}{2}$,这为总体对称。

(2)一条对角线两侧各数的总和等于另一条对角线两侧各数的总和,且等于$\frac{n^4-n^3+n^2-n}{2}$,这也为总体对称。

(3)横轴两侧各数之和相等,且等于$\frac{n^4-n^3+n^2-n}{4}$。

(4)纵轴两侧各数之和相等,且等于$\frac{n^4-n^3+n^2-n}{4}$。

84	96	108	120	132	144	169	12	24	36	48	60	72
70	82	94	106	118	143	155	167	10	22	34	46	58
56	68	80	92	117	129	141	153	165	8	20	32	44
42	54	66	91	103	115	127	137	151	163	6	18	30
28	40	65	77	89	101	113	125	137	149	161	4	16
14	39	51	63	75	87	99	111	123	135	147	159	2
13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133	145	157
168	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	131	156
154	166	9	21	33	45	57	69	81	93	105	130	142
140	152	164	7	19	31	43	55	67	79	104	116	128
126	138	150	162	5	17	29	41	53	78	90	102	114
112	124	136	148	160	3	15	27	52	64	76	88	100
98	110	122	134	146	158	1	26	38	50	62	74	86

图 2-10

(5)任意与横轴对称的两列各数之和等于任意与纵轴对称的两行各数的和,且等于n^3+n。

(6)任意与中心数(两对角线共用的数)对称的两数之和相等,且等于n^2+1。

(7)如果把中间行和中间列视为纵横坐标组成的直角坐标系,那么,第一象限的各偶数加第三象限的各偶数总和,等于第二角限和第四象限各偶数的总和,且等于$\frac{n^4-1}{8}$。

(8)第一象限各奇数加第三象限各奇数总和等于第二象限加第四象限各奇数总和,且等于$\frac{n^4-4n^3+4n^2-4n+3}{4}$。

2. 以数的奇偶性展示的对称

任一'洛书'型幻方的四边中点都是由1、n、n^2、$n(n-1)+1$四个数组成。以这四点为顶点的菱形内全部是奇数,四角的四个全等三角形内则全是偶数。如果把整个图形视为横轴和纵轴组成的直角座标系,则每个象限的奇数区和偶数区都是一个三角形。因而有以下对称关系:

(1)四个偶数区对于中心、两对角线、横轴、纵轴都是两两对称的;

(2)四个奇数区对于中心、两对角线、横轴、纵轴也都是两两对称的;

(3)图中四个象限内任一奇数,它的中心对称位置,对角线对称位置,横轴对称位置,纵轴对称位置都是奇数;

(4)图中任意偶数,它的中心对称位置,对角线对称位置,横轴对称位置和纵轴对称位置都是偶数;

(5)图中任意数(包括两中轴线上的数)与中心数对称的位置全部奇、偶同性。

(二)等差数列结构

任意阶'洛书'型幻方内,每行、每列、两对角线和与两对角线平行的各线上,凡有两个以上奇数或偶数必成等差数列。即便是两个奇数或偶数,它们的差也等于与其平行数列的公差。

(1)横轴和与它平行的各列的等差数列的公差是$n-1$,偶数分成左、右两部分,但是统一

的等差数列。

(2)纵轴和与它平行的各行的等差数列的公差是 $n+1$,偶数分成上下两部分,但是统一的等差数列。

(3)左上右下对角线和与它平行的斜线上的等差数列的公差是 2,对角线上两个数列混合排列构成以中心数为中项的连续数列。

(4)右上左下对角线和与它平行的斜线上的等差数列公差是 $2n$,对角线上两个数列混合排列构成以中心数为中项的公差为 $2n$ 的数列。

"洛书"型幻方的这些结构特征不仅非常神奇、奥妙、有趣,而且有着超越数学本身的内涵。"洛书"是《周易》基本图形之一,除它以外,《周易》还有"先天太极图"、"伏羲八卦方位图"、"六十四卦方圆图"和"伏羲六十四卦次序横图"等。这些图形分别以图、符号和数三种形式展示一个共同的内涵——对称。"先天太极图"是以图和符号两种形式展示对称:外周的八卦是以卦爻符号展示对称,即与中心对称的任意两爻都是阴阳互异的;中间的阴阳鱼则是以图展示对称,图中任意与中心对称的两点都是黑白互异的,在图中作任意与中心对称的曲线,图形也必然是黑白互异。"六十四卦方圆图"中的方图和圆图都是卦爻符号展示的中心对称,即任意与中心对称的两爻都是阴阳互异。"伏羲六十四卦次序横图"则是以阴阳(黑白)展示的轴对称,即与中轴对称的任意两爻都是阴阳(黑白)互异。而"洛书"则是以数的和与数的奇、偶性展示的对称。从总体来看,这些图形是以不同形式向人们展示宇宙间一切事物一个共同存在的形式——对称。反映在哲学上就是对立统一或相反相成。

"洛书"型幻方的这些结构特征为发现幻方排列的万能公式创造了条件。图 2-11 就是根据这些结构特征设计的一个排列"洛书"型幻方的万能公式。使用它不仅可以排列出任意奇数阶幻方,排列准确无误,而且排列速度之高可以达到让人难以置信的程度。这个公式是怎样设计出来的呢?它是在大量的排列实践中总结出来的。首先是"洛书"型幻方结构特征的陆续发现,特别是一些大型幻方的排列,比如 101 阶、113 阶,它们的对称数列结构更加明显,奇、偶数分区分布也更为明显,特别重要的是四边中点总是 1、n、n^2、$n(n-1)+1$。发现这四个关键数,是能完成公式的突破点。这个公式四边的边码都是$\frac{n+1}{2}$,是四边的中间格位置。图中的虚线是表示这个图可以任意伸缩,n 可取任意奇数。图中最下一列中间格是 1,向左上递加的奇数等差数列与左上右下对角线平行,根据结构特征它是公差为 2 的等差数列,且到最左边第一行的中间格 n 为止;与它平行的是由最右边一行中间上一格 2 开始的连续偶数数列,它的公差当然也是 2,直到最上一列中间右一格为 $n-1$ 止;从 n 开始向右上是 n、$3n$、$5n$、…、n^2,它是公差为 $2n$ 的等差数列,它也有结构特征,凡平行于右上左下对角线的都是由公差为 $2n$ 的等差数列组成;和它平行的是由最下一列中间右一格 $2n$ 开始直到最右一行中间下一格的 $n(n-1)$为止的等差数列,它们是 $2n$、$4n$、$6n$、…、$(n-1)n$,也是公差为 $2n$ 的等差数列。这就是图 2-11 中的全部数字。

怎样应用这个公式排列出任意奇数阶"洛书"型幻方呢?这里仍以较小的 11 阶幻方的排列为例说明它的使用方法。

首先画出 11×11 的正方格,每边的中间格的位置是$\frac{n+1}{2}$(这里是$\frac{11+1}{2}=6$),即每边的第 6 格是中间格。为了显示公式中的数字,用黑体字在最下列的第 6 格中填写 1,由 1 向左上填

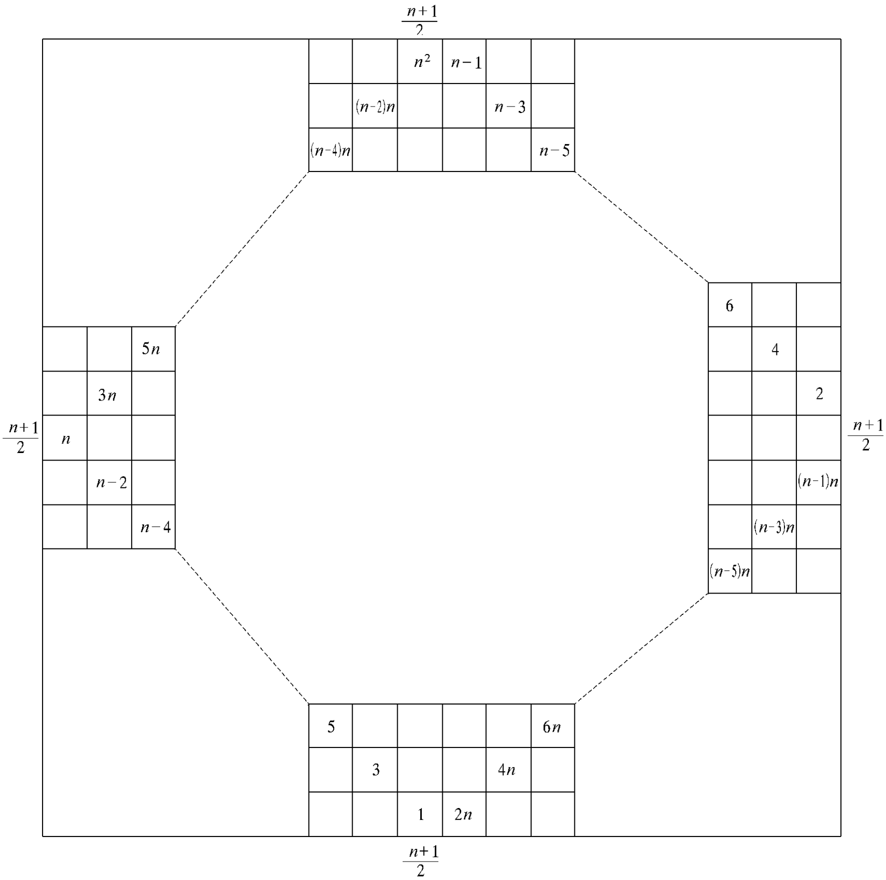

图 2-11

写连续奇数，11 正好落在最左行中间格；由 11 向右上是公差为 $2n$ 的等差数列，即 n、$3n$、$5n$、…、n^2（$n^2=11\times11=121$），正好落在最上列中间格；1 的右侧是 $2n$，由 $2n$ 向右上也是公差为 $2n$ 的等差数列，它们是 $2n$、$4n$、…、$(n-1)n$，$(n-1)n=(11-1)\times11=110$，它落在最右行中间下 1 格；中间上 1 格是 2，由 2 向左上是公差为 2 的等差数列，即连续偶数，$n-1$ 落在 n^2 的右边。这就是图 2-12 中的全部黑体字，它是公式中的所有数字。有了它再根据‘洛书’型幻方的结构特征，横向各列都是以公差为 $n-1$ 的奇、偶数数列组成，因此，从每个黑体字向右连续递加 $n-1=11-1=10$，奇数遇到偶数止；偶数到最右边再返向最左边，直到遇到奇数止。把图中所有格子填满，就得到要排列的 11 阶‘洛书’型幻方。使用这个公式，一个有 121 个数参与排列的 11 阶幻方，大约用书写速度就可以完成。为什么说可以用书写速度完成呢？因为在完成黑体字时是四个等差数列。即连续奇数 1、3、…、11，连续偶数 2、4、6、8、10，它们是完全可以用书写速度完成的。另两个等差数列 11、33、55、…、121 和 22、44、…、110，也可以用书写速

度完成，除黑体字外的全部数字都是在上述黑体字的右侧连续加 $n-1=11-1=10$，显然用不着计算，也是可以用书写速度完成的。如果没有掌握排列方法 这里介绍的 4 种方法或别的方法），排列成 11 阶幻方的希望几乎是零。为什么这样说呢？它可以用数学方法来证明。用 121 个数可以排列出多少个 11 阶方阵 包括幻方和非幻方）呢？显然这是一个排列问题。即由 121 个不同元素进行全排列它可排列成的不同的“一”字长蛇阵是 $P_{121}=A_{121}^{121}=121!$ （$21!\approx 8.1\times 10^{200}$），而每条“一”字长蛇阵又要截成相等的 11 段再排成 11 阶方阵又有 $P_{11}=A_{11}^{11}=11!\approx 3.99\times 10^{7}$，可排成的 11 阶方阵的总数 $P_{121}\times P_{11}\approx 8.1\times 10^{200}\times 3.99\times 10^{7}\approx 3.2\times 10^{208}$，它是一个有 209 位的数。不妨将它与一个天文数字进行比较，用现代技术可以测量出半径的质子 构成原子核的带正电荷的基本粒子）无缝隙的塞满可观察宇宙 半径为 130 亿光年）需要的质子数约为 4.6×10^{124}。也就是说把 11 阶方阵刻在质子的表面上 每粒质子表面刻一个 11 阶方阵），它的数量还要填满 $\dfrac{3.2\times 10^{208}}{4.6\times 10^{124}}\approx 6.9\times 10^{83}$ 个可观察宇宙。如果说 11 阶方

60	70	80	90	100	**121**	**10**	20	30	40	50
48	58	68	78	**99**	109	119	**8**	18	28	38
36	46	56	**77**	87	97	107	117	**6**	16	26
24	34	**55**	65	75	85	95	105	115	**4**	14
12	**33**	43	53	63	73	83	93	103	113	**2**
11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
120	**9**	19	29	39	49	59	69	79	89	**110**
108	118	**7**	17	27	37	47	57	67	**88**	98
96	106	116	**5**	15	25	35	45	**66**	76	86
84	94	104	114	**3**	13	23	**44**	54	64	74
72	82	92	102	112	**1**	**22**	32	42	52	62

图 2-12

180	198	216	234	252	270	288	306	324	**361**	**18**	36	54	72	90	108	126	144	162
160	178	196	214	232	250	268	286	**323**	341	359	**16**	34	52	70	88	106	124	142
140	158	176	194	212	230	248	**285**	303	321	339	357	**14**	32	50	68	86	104	122
120	138	156	174	192	210	**247**	265	283	301	319	337	355	**12**	30	48	66	84	102
100	118	136	154	172	**209**	227	245	263	281	299	317	335	353	**10**	28	46	64	82
80	98	116	134	**171**	189	207	225	243	261	279	297	315	333	351	**8**	26	44	62
60	78	96	**133**	151	169	187	205	223	241	259	277	295	313	331	349	**6**	24	42
40	58	**95**	113	131	149	167	185	203	221	239	257	275	293	311	329	347	**4**	22
20	**57**	75	93	111	129	147	165	183	201	219	237	255	273	291	309	327	345	**2**
19	37	55	73	91	109	127	145	163	181	199	217	235	253	271	289	307	325	343
360	**17**	35	53	71	89	107	125	143	161	179	197	215	233	251	269	287	305	**342**
340	358	**15**	33	51	69	87	105	123	141	159	177	195	213	231	249	267	**304**	322
320	338	356	**13**	31	49	67	85	103	121	139	157	175	193	211	229	**266**	284	302
300	318	336	354	**11**	29	47	65	83	101	119	137	155	173	191	**228**	246	264	282
280	298	316	334	352	**9**	27	45	63	81	99	117	135	153	**190**	208	226	244	262
260	278	296	314	332	350	**7**	25	43	61	79	97	115	**152**	170	188	206	224	242
240	258	276	294	312	330	348	**5**	23	41	59	77	**114**	132	150	168	186	204	222
220	238	256	274	292	310	328	346	**3**	21	39	**76**	94	112	130	148	166	184	202
200	218	236	254	272	290	308	326	344	**1**	**38**	56	74	92	110	128	146	164	182

图 2-13